Table of contents

Implementing multidisciplinary study and research paths in Japanese lower secondary school teaching

Kenji Kuzuoka
Joetsu University of Education, Japan

Takeshi Miyakawa
Joetsu University of Education, Japan

Abstract. This paper reports on results of teaching experiments with a study and research path carried out in Japanese lower secondary school classrooms. The generating question relates to the change of world population. Based on these results, we discuss the conditions and constraints for implementing inquiry in ordinary teaching in Japan.

Résumé. Dans cet article, nous présentons quelques résultats de l'expérimentation de parcours d'étude et de recherche qui est conduite dans les classes d'un établissement secondaire au collège au Japon. La question concernant le changement de population mondiale est utilisée. Nous discutons, en nous appuyant sur ces résultats, les conditions et les contraintes pour la mise en place d'une enquête dans une classe ordinaire au Japon.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Introduction

The notion of *didactic paradigm* (Chevallard, 2015) proposed within the Anthropological Theory of the Didactic (ATD hereafter) allows us to recognize, from a broader point of view, the different ideas underlying teaching. In particular, the paradigm of *questioning the world* promoting scientists' attitudes in teaching has opened our eyes to the mathematics teaching in the light of broad scientific inquiry, removing the barriers between disciplines. Further, the *Study and Research Path* (SRP hereafter) based on such paradigm formulates the structure and functioning of scientist's inquiry within ATD. This theoretical formulation takes into account the mechanisms of inquiry which has not been explicitly dealt with in other theoretical frameworks. We consider that it may provide us with new insights how the inquiry-based teaching of mathematics and also other disciplines might be designed and organized in the classroom.

Today in Japan, it is required to implement the multidisciplinary studies and the inquiry-based teaching, and more strongly than before (e.g. MEXT, 2017). This is not only the case in Japan. Implementing inquiry in day-to-day teaching is also an issue to be addressed in the international community of mathematics education research (Maass & Artigue, 2013). We are therefore interested in the implementation of multidisciplinary SRP in the ordinary classroom to clarify its potentials and limitations in Japan and in other countries. In this paper, we investigate this point through the teaching experiments conducted in a Japanese lower secondary school from a wider perspective, that is to say, rather than focusing on a specific aspect of SRP, we report the overall results of these experiments and discuss inductively the conditions and constraints for implementing such inquiry in ordinary teaching in Japan.

2. Preliminaries on inquiry

Before going into the details of the teaching experiments, we briefly describe how the inquiry is perceived and dealt with in educational research and in Japanese national curricula.

2.1. Inquiry from different perspectives

The idea of implementing inquiry in teaching is not new. Dewey's theory of inquiry (Dewey, 1938) modelling scientist's inquiry, has often been used as a reference for inquiry-based teaching. And there are several theoretical frameworks that support the implementation of inquiry in teaching (Artigue & Blomhøj, 2013). In Japan, apart from Dewey's theory which is well known, there is a perspective of implementing researchers' inquiry in the classroom, which is called *Researcher Like Activity*, proposed by the influential educational psychologist Ichikawa (1998) from the University of Tokyo. This framework suggests to implement different activities usually carried out by the researcher, including not only the process of finding a problem, solving it, reporting the result, etc., but also the activity of reviewing papers, panel discussion, etc.

What is different among theoretical frameworks about the inquiry is the way to characterize scientific inquiry: what are the principal elements that constitute the inquiry, how are they functioning, in what structure, etc. Among these, the idea of SRP provides a new insight for characterizing the inquiry by clarifying the dialectic nature of inquiry between questions and answers (*questions-answers dialectic*) and also the dialectic between searching of information from different resources (*media*) and working with questions, obtained answers, data, experiments, etc. (milieu) (*media-milieus dialectic*). In this paper, we also adopt these points for designing and analysing inquiry-based teaching in Japanese classrooms.

2.2. Inquiry in Japanese lower secondary school curricula

As we noted earlier, it is strongly required today in Japan to implement multidisciplinary studies and inquiry-based teaching. This does not mean that there was no multidisciplinary study or inquiry so far. In the Japanese national curricula, multi-disciplinary study has been emphasized since around 2000, and a subject called 'Periods for multidisciplinary studies' (*sōgōtekina gakusyū no jikan* in Japanese) was created and implemented from primary to upper secondary school in 2002. As the name of the subject implies, it aims at multidisciplinary studies. According to the official curricular document (MEXT, 2008), it is requested that students carry out inquiry-based learning and acquire certain competences of working autonomously, such as finding a problem, learning, thinking, judging, solving the problem, etc. However, in reality, this subject is dissociated from ordinary subjects, and is often used for career education or out-of-school activities in lower and upper secondary school. There is very little room for mathematics, and even for scientific inquiry.

In the new national curricula announced in 2017, the multidisciplinary studies are emphasized not only in the 'Periods for multidisciplinary studies', but also in ordinary subjects such as mathematics (MEXT, 2017). Hence, we now have a much more substantial setting for multidisciplinary studies and scientific inquiry, and it is required to carefully study how we can implement such teaching and learning in ordinary classrooms.

3. Methodology

In order to better understand how the multidisciplinary SRP could be implemented in Japanese lower secondary school, we design a sequence of lessons from the perspective of SRP and carried out teaching experiments, as it is usually done in the *didactic engineering* (Barquero & Bosch, 2015). Based on the data collected in the experiments and their analysis, we discuss the *conditions* that support the implementation of SRP in Japan and the *constraints* that hinder it.

3.1. Initial question: world population problem

The initial question Q_0 we have chosen is the following one which relates to the world population.

> Q_0: When is the number of all people in the world who have lived until the year 1900 equal to the number of people after the year 1900?

This question is supposed to generate several multidisciplinary questions, related to the discipline of social studies including history, anthropology, etc., and also to mathematics. In fact, in order to find the number of people who have lived before 1900, it requires first of all to know the definition of humankind and from what time the humankind exists on earth.

From the mathematical point view, an idea to answer this question is to think about the population *p* as a function of year *y* and the length of life *l* as a function of year *y* as well, and then solve the following equation:

$$\int_{y_0}^{1900} \frac{p(y)}{l(y)} dy = \int_{1901}^{x} \frac{p(y)}{l(y)} dy.$$

Of course, grade 8 students would not formalize their ideas as this equation. And one may not directly get to this idea before investigating other ideas. But we consider that the question Q_0 allows them during the inquiry to employ some mathematical ideas they have already learnt (linear function, linear equation, area, etc.) and to investigate some new ideas accessible to them (more general function, equation, integral, etc.).

The question Q_0 is a slightly modified version of the question proposed by Yves Chevallard and Marianna Bosch (2016) in the workshop of ATD organized at Osaka, Japan in 2016. The original question in the workshop was formulated differently, as follows.

> "They say there are more people now alive that all that have lived before 1900. Is that possible? On which year could this be possibly true?"

Our question asks to compare two numbers, of people having lived before and after 1900, while the original task asks to compare the amount of people before 1900 and the population in a specific year. We consider that our initial question Q_0 directs students to think more about some specific mathematical ideas related to functions, equations, etc., which they have already learnt to some extent.

3.2. Teaching experiments

The teaching experiments was carried out with grade 8 students (13-14 years old) in a public lower secondary school in Japan. A total of four periods of classes in the computer room were designed and experimented with five different grade 8 classes. The first author was the main teacher of these classes. He is a teacher of this school, but is not teaching otherwise this year, due to his in-service training at the university of the second author.

About 32 students in each class were divided into 7 to 8 groups with 3 to 4 students for group work. The inquiry was carried out in the three first periods of class, and the last period was dedicated to the presentation of the results of the inquiry.

In the introduction of first period, the teacher explained general features of researcher's scientific activities, as they were supposed to be carried out in the class. Specifically, the teacher told students to investigate the initial question and their own questions with group members by means of anything they needed, such as Internet, calculator, and textbook, etc. Two PCs are given to each group. In the second and third periods, it is allowed for the students to observe other groups and discuss with them. During the inquiry, the teacher moved from one group to another to support students.

We collected, as data, PC screens of all group by the software *AG-desktop recorder* (http://t-ishii.la.coocan.jp/download/AGDRec.html), the video data of certain students' activities (five groups), and their worksheets.

3.3. Analytical tools

We analyse the data collected in the teaching experiments mainly by means of two concepts of ATD which characterise the structure and functioning of SRP. The first one is *the questions-answers dialectic* which allows us to make explicit the complex process of inquiry and also its multidisciplinarity which is one of the main issues in our study. The second tool is *the media-milieus dialectic* which allows us to identify the dynamics of students' autonomous activities, that is to say, not only what kinds of resources students obtain from the media, but also how they interact with them and develop their own ideas based on them.

4. Students' study and research paths

Each group follows its own study and research path. There is a variety of paths and none of them are identical. We present here only two of them in order to show how the multidisciplinary inquiry was going on overall.

4.1. Group B: resolution by the area

Group B was sincerely working and asking several questions during inquiry. The number of interactions with media is relatively smaller than for other groups, but the students of this group carefully read the information obtained on the Internet and tried to understand it, that is to say, there were more interactions with milieus.

In the beginning of inquiry, the students were interested in the change of world population and the population explosion, and asked the following questions:

Q_1: How much is the actual world population?

Q_2: How many people have lived before 1900?

$Q_{2\text{-}1}$: When is the origin of humankind?

$Q_{2\text{-}2}$: What happened in 1900?

$Q_{2\text{-}3}$: Why did the world population grow suddenly?

$Q_{2\text{-}4}$: What is population explosion?

These are the principal ones asked in the beginning. There are also other small questions. The same index in the list means that the questions are derived from the main one. (e.g. $Q_{2\text{-}i}$ are derived from Q_2). Most of these are questions related to social studies. Students were searching for the pre-established answers $A_i^\diamond$ on the Internet, and thoroughly reading them. In the second period, they started creating a table with the data obtained from the entry of ‘World population’ of Japanese Wikipedia, and tried to find the answer by means of functions as Figure 1.

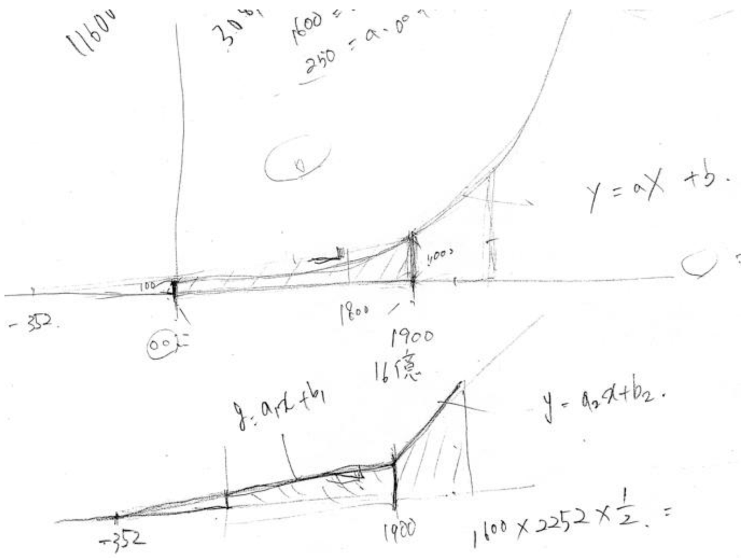


Figure 1. A part of the worksheet of Group B

Group B presented a final answer $A^{\heartsuit}$ to Q_0 in the fourth period, constructed on their own, which we briefly outline here. Although the group obtained different numerical data from Internet, the data they finally used were the following:

D_1: World population of AD 0 is 250,000,000.

D_2: World population of AD 1900 is 1,600,000,000.

D_3: World population of AD 2016 is 7,300,000,000.

Group B identified the functional relationship between year and world population from these data, and modelled the change of population by two following linear functions:

$y = 0.71x + 250$ … (i)

$y = 49x – 91500$ … (ii)

The first one is established with the two coordinates (0, 250) and (1900, 1600) obtained from data D_1 and D_2 (250 is used for 250,000,000), and the second from D_2 and D_3. The students consider, with the graph of functions shown in Figure 1, that the year to answer Q_0 is determined by finding out when the area of triangle in the left-hand side is equal to the area of trapezoid of right-hand side. To find this year, they first get the intersection point between the graph of the first function and the x-axis, by substituting $y = 0$ in the equation (i) and solving the linear equation: $x = –352$ which is the year of the birth of humankind (or, before that, the population can be considered negligible). This answer allows them to calculate the area of the triangle, which is 18,016. Then, they find out that the area of trapezoid is (16 + 133) × 240 ÷ 2 = 17880 when the year is 2140, and (16 + 134) × 241 ÷ 2 = 18075 when it is 2141. Their final answer $A^{\heartsuit}$ was thus the year 2141.

During the activities of building up their own answer, there are a lot of interactions between students and milieus. In particular, in order to determine which data to use, how to model, how to calculate, etc.

In the inquiries of other groups, we could also identify the active questions-answers dialectic and media-milieus dialectic. Most students were working hard and autonomously with their group fellows. However, most of their inquiries did not proceed as Group B did. Some groups provided an answer with much ambiguity and others could not get any answer. We present now one of them.

4.2. Group C: resolution by the number of birth

Group C were, from the beginning of inquiry, searching for the appropriate data that can be used to calculate an answer to Q_0. In this process, the students of this group studied the history of humankind. The questions they asked were similar to those of Group B. One may see a different discussion on the history of humankind as what follows:

172 S_3: Since when does humankind exist?

173 S_2: Not sure.

174 S_3: since 5 million years ago?

175 S_2: It's too big.

176 S_3: since 65 million years ago.

177 S_3: here, since 65 million years ago.

178 S_3: Humankind is a mammal, a primate. Otherwise, if it's an ape-man (Australopithecus), it's 4 million years ago.

179 S_2: Humankind is a new-man (Homo sapiens), no?

180 S_3: Humankind is a new-man?

181 S_2: Is it? I don't know.

…

For the purpose of collecting relevant data, it is required for students to study the history, that is to say, the historical ideas appeared here with the rationale (*raison d'être*) which would be sometimes missing in the teaching based on *the paradigm of visiting monuments* (Chevallard, 2015): why do we need to know about Homo sapiens, specific years, etc. This is one of the main advantages of multidisciplinary inquiry, which may provide rationales not only for mathematical knowledge but also for knowledge of other disciplines.

The students of this group spent a lot of time to find and fully understand the data given in websites. For example, they were searching for the answer to the question 'Q_4: How many people have lived on earth so far?' and found a pre-established answer '$A_{4\text{-}1}^{\lozenge}$: the actual population is one fifth of the number of whole people that have lived in the last 6000 years' in a website (https://matome.naver.jp/odai/2138339969046725701) which cited the text of Wikipedia. This website also provides the concrete numbers:

'6,800,000,000 (year 2009) × 5 = 34,000,000,000. By adding the actual population, the number is 34,000,000,000 + 6,800,000,000 = 40,800,000,000'. As the idea given here was not clear enough, the students doubted these numbers, and then searched again on the Internet and found another number (http://d.hatena.ne.jp/Zellij/20111104/p1) which is '$A_{4\text{-}2}^{\lozenge}$: the total number of humans who were born on the earth so far is 107.6 milliard'. And this time, in order to better understand it and obtain further data, they went even to the original English page (http://www.prb.org/Publications/Articles/2002/HowManyPeopleHaveEverLivedonEarth.aspx) and tried to understand what is written there. Japanese students are usually not good at English and often hesitate to use it.

However, as a consequence of spending a lot of time for finding and understanding data, there was a small amount of time left for developing their own answer, which was not fully elaborated and verified at the end of inquiry. In order to develop their own answer, the students used the data given in this last website and Wikipedia in a strange way, established an equation and solved it. Concretely, supposing that the number of people before 1900 is equal to the number of people born after 1900 in x years counting from the year 1900, they established the equation

(number of people before 1900) = (number of people born during one year) × x + (the population of the year 1900)

with the following data:

D_1: Number of people before 1900: 1,656,000,000,000;
D_2: World population of the year 1900: 3,522,000,000;
D_3: Number of births each year: 70,000,000.

The solution obtained was $x=23{,}609$, and therefore their final answer was AD 25509 by adding 1900. The data used above are not appropriate with respect to the data given in the websites. D_1 is much bigger than the number of people who have ever lived on earth, given in the website (107,602,707,791). It was probably taken from the population of the year 1900 (1,656,000,000). It would have required more time than was available to validate the calculation, and to receive feedback from others.

5. Discussion

The teaching experiments and the analysis of data allow us to discuss several conditions and constraints for the implementation of multidisciplinary SRP in the day-to-day teaching of Japanese lower secondary school. In what follows, we are going to discuss three aspects that seem important in this respect.

5.1. Germ of scientist's attitudes and its constraint

In the teaching experiments, we could identify germs of scientists' attitude among students, which is a main aim in the paradigm of questioning the world. At the beginning of inquiry, several students were thinking that the answer exists somewhere, and could be found on the internet. Some students even asked for the answer directly from the teacher. However, as time goes by, they started noticing that the question is not easy to answer and requires some efforts. Students' answers to the questionnaire proposed at the end of fourth period shows that nearly 90% of the students could be actively engaged in the inquiry. And several students made a comment like 'it was fun, while it was hard' or 'I tried hard without giving up'. These comments imply that faced with the task which was not easy for them, students could more or less behave in a *Herbartian* way, with a "receptive attitude towards yet unanswered questions and unsolved problems" (Chevallard, 2015).

On the other hand, in many groups, students often used the data obtained from the media without doubting their validity with a scientist's attitude. Even the group C presented above, who often questioned the data from media, did not examine precisely the data they used. One may point out here a time constraint that hinders a further inquiry on data. Since there were only three periods for getting the results of inquiry and students have to present them in the fourth period, there was only a small room left for further investigation and critics of the data. This phenomenon could be also a result of the didactic contract we discuss below.

5.2. Didactical contract hindering fruitfulness of SRP

We identified in the data a didactical contract which is specific to mathematics teaching and not to scientific inquiry. It was for students to find an answer to the initial question Q_0 proposed by the teacher, as it is in ordinary mathematics class. In scientific inquiry, the result obtained after a lot of investigation is not necessary an answer to Q_0, but very often a partial answer to Q_0, the answer to another question, or even another question without answer. In contrast, especially in the third period of our experiments, the teacher often notified students that there is a presentation in the fourth period and they have to prepare and present their answer to Q_0. Due to this contract, the SRP realized in the experiments did not broaden to investigate different interesting questions deeply. It was rather like a finalized SRP (Chevallard, 2009) which has a specific target knowledge to teach.

This discussion raises a question on the constraints related to the *chronogenesis*—the evolution of new questions and knowledges obtained from the media—in the multidisciplinary inquiry. We may identify some elements that lead students and also the teacher to stay with the initial question Q_0. The first element is mathematics teacher's intention related to the goal of inquiry, which is to engage students in mathematical activities in addition to the activities of social studies. Asking an answer to Q_0 was a solution for him. The second element is the teacher's way to intervene students' inquiry. As the inquiry was organised in the ordinary classroom with more than 30 students, the teacher communicates with students not like a supervisor of master or PhD research works, but like a teacher in an ordinary classroom setting where the teacher gives a hint or checks their answer by moving from one group to another. The teacher therefore could not work more deeply with one group and indicate a direction in which to go, according to the students' interest.

5.3. Conception on scientific inquiry

As we have mentioned in the earlier sections, the overall spirit of Japanese national curricula conforms with the idea of inquiry based on the paradigm of questioning the world. The inquiry is emphasized in Japanese lower secondary school curriculum and it seems that SRP could largely contribute to it. However, the idea underlying SRP is new for Japanese educators, and requires a new way to perceive scientists' inquiry. In particular, the role of question is often underestimated in

Japan. There is a cultural element that hinders understanding of this main characteristic of SRP. In Japanese language, the term *question* is not often used in scientific works. For example, the English expression *research question* is usually translated into the Japanese expression signifying ‘research task’ (*kenkyū kadai*). The term *inquiry* is translated into the Japanese term (*tankyū*) which does not mean ‘questioning’, but ‘seeking’. In fact, in the class of *Period of multidisciplinary studies* in Japan, students often look for several information using internet, summarize it and present it in a sophisticated way. However, as far as the first author knows and can judge, as a teacher who has been teaching mathematics and this multidisciplinary class, it is very rare for students to deepen the question as the SRP carried out in our study. We can also notice this in students’ written comments to the questionnaire at the end of class, which often say that this was the first experience to investigate a tough question such deeply. Therefore, the conceptual change on the inquiry in teachers and teacher educators would be a condition for implementing SRP in the day-to-day classroom. This point raises an issue of teacher education. Many lower and higher secondary mathematics teachers in Japan have never experienced scientific inquiry during their university study.

6. Conclusion

The discussion above raises several issues for further studies related to the implementation of SRP in the day-to-day classroom. In particular, we need to further investigate, from the scientific point of view, how the constraints from different levels of the scale of codetermination affect the different aspects of SRP (*mesogenesis*, *chronogenesis*, and *topogenesis*).

Acknowledgement

This work is supported by KAKENHI of JSPS (No. JP17H02694).

References

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 797-810.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (eds), *Task design in mathematics education* (pp. 249–272). Springer.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 173–187). Springer.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2016). *Workshop Doing research in ATD*. Slides for the workshop in Osaka on 11th October 2016.

Dewey, J. (1938). *Logic: The Theory of Inquiry*. New York: Henry Holt and Company.

Ichikawa, S. (1998). *Hirakareta manabi he no shuppatsu: 21 seiki no gakkō no yakuwari* [Departure to the open learning: the role of school in the 21st century]. Tokyo: Kaneko Shobō. [in Japanese]

Maass, K. & Antigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 779-795.

MEXT (2008). *Guideline for lower secondary school course of study: periods of multidisciplinary studies*. [in Japanese] http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2011/01/05/1234912_013.pdf

MEXT (2017). *Guideline for lower secondary school course of study: mathematics*. [in Japanese] http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387018_4_1.pdf

Modelling teachers' collective development knowledge of rational numbers through a dialectic between questions and answers: A comparative analysis of a Danish and an Indonesian case

Zetra Hainul Putra

Department of Science Education, University of Copenhagen, Denmark

Faculty of Teacher Training and Education, University of Riau, Indonesia

Abstract. This paper aims to present a method for comparing teachers' mathematical and didactical knowledge of rational numbers. The method is developed based on the anthropological theory of the didactic (ATD) using a specific notion of a dialectic between questions and answers. The initial questions and the pupils' answers are integrated into hypothetical teacher tasks (HTTs) which have been tested to 32 Indonesian and 31 Danish pre-service teachers who mostly work in pairs. In this particular study, we focus the comparative analysis on a specific case of two pairs, working on the addition and subtraction of fractions, in order to present the potential of the method to study teachers' collective knowledge.

Résumé. Cet article vise à présenter une méthode permettant de comparer les connaissances mathématiques et didactiques des enseignants sur les nombres rationnels. La méthode est développée sur la base de la théorie anthropologique du didactique (ATD) en utilisant une notion spécifique de dialectique entre questions et réponses. Les questions initiales et les réponses des élèves sont intégrées dans les tâches hypothétiques des enseignants (HTT) qui ont été testées avec 32 enseignants en formation initiale indonésien et 31 enseignants danois travaillant principalement en binômes. Dans cette étude particulière, nous concentrons l'analyse comparative sur un cas spécifique de deux paires, travaillant sur l'addition et la soustraction de fractions, afin de présenter le potentiel de la méthode pour étudier les connaissance collective des enseignants.

Resumo. Este trabajo tiene como objetivo presentar un método para comparar el conocimiento matemático y didáctico de los maestros sobre los números racionales. El método desarrollado se basa en la teoría antropológica de lo didáctico (ATD) utilizando una noción específica de una dialéctica entre preguntas y respuestas. Las preguntas iniciales y las respuestas de los alumnos se integran en tareas hipotéticas de maestros (HTT) las cuales han sido probadas con 32 profesores indonesios y 31 profesores daneses

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

que, mayoritariamente, trabajan por parejas. En este estudio particular, focalizamos el análisis comparativo en el caso específico de dos parejas de maestros, que trabajan la suma y resta de fracciones, para presentar el potencial del método en el estudio del conocimiento colectivo de los maestros.

1. Introduction

Massive studies on pre-service and in-service teachers’ mathematical knowledge lead us to some questions; to what extent do we perceive teachers’ knowledge? and how could a method, a model, or an approach be used to investigate teachers’ knowledge? Some answers have been presented to both questions, and most common studies are to present what mathematical knowledge teachers have and how they teach pupils about that knowledge (e.g., Ball, Thames, & Phelps, 2008), under a practice-based theory of content knowledge and pedagogical content knowledge for teaching (Shulman, 1986). Teachers’ knowledge is defined as an individual competence that is measured mostly through written tests.

On the other hand, the anthropological theory of the didactic (ATD) considers knowledge, including teachers’ knowledge, as shared knowledge that is developed in an institution (Bosch & Gascón, 2006). That knowledge can be analysed in term of a praxeology and also can be studied from a dialectic between questions and answers during their interaction or collaborative work (Barquero, Bosch, & Romo, 2015). In this paper, we are interested in studying and comparing Danish and Indonesian pre-service teachers’ (PsTs) collective development of mathematical and didactical knowledge in interacting with hypothetical teacher tasks (HTTs) of rational numbers (For more detail about HTTs, see Putra & Winsløw, in press). A motivation to do this comparative study is to search for possible causes of a gap between Danish and Indonesian pupils’ mathematics achievement in PISA and TIMSS (OECD, 2016; Mullis et al., 2016). The Danish pupils scored above average, whereas the Indonesian pupils scored far below the average. In addition, we could question current teaching practices and identify best practices in teaching (Stigler and Perry, 1988). Thus, the research questions of this study are: “How can PsTs’ collective mathematical and didactical knowledge of rational numbers be analysed in terms of a dialectic between questions and answers? What does this method add to the comparative study of Danish and Indonesian PsTs’ mathematical and didactical praxeologies?”

2. Modelling teachers' transposition knowledge: The dialectic between questions and answers

The anthropological theory of the didactic (ATD) investigates the phenomena of school mathematics related to how knowledge is introduced and reconstructed at schools or institutions (Bosch & Gascón, 2014). A body of knowledge mostly produced by scholars is needed to be transposed to taught and learnt knowledge in a given educational institution. The didactic transposition process of knowledge involves relations among knowledge, learners, and also institutions (Chevallard, 1992). In general, this process can be modelled as a relation R between learners (X) and an object of knowledge (O) that occurs in institutions I, and it can be denoted R_I(X, O). In social interaction, learners X get some help from a person Y, mostly a teacher y, to study the object of knowledge (O), and this process is known as a didactical situation that can be modelled into a didactical system of the type $S(X, Y, O)$ (Bosch & Gascón, 2014; Chevallard, 1992).

The object of knowledge to be learnt is made of praxeological components; types of tasks, techniques, a technology and a theory (Bosch & Gascón, 2014; Chevallard, 2006). A mathematical type is needed to be solved through some techniques. In a case study of teachers' knowledge, there is not a single technique for teaching a mathematical praxeology, and in many cases, pre-service or in-service teachers provide various mathematical and didactical praxeologies during their collective work. The process of constructing knowledge in our study can be influenced by interaction between pre-service teachers (PsTs) and HTTs during their collective work (Putra & Winsløw, in press).

PsTs engage in an initial question Q_0 situated in HTTs, they bring this question into a pair discussion as a dialectic between questions and answers. An existing answer to a mathematical question Q_0 presented in HTTs as a pupil's answer can play as a pre-established answer $A^{\Diamond}$. Other questions Q_k, involving mathematical and didactical questions, are derived from the initial question Q_0, and interaction between two PsTs leads to some possible answers A_k, and in the end this process is expected to reach a final answer $A^{\heartsuit}$, involving mathematical and didactical praxeologies. A sequence of linked questions and answers in a broader environment, for instance classroom activity, is called a study and research path (SRP) (e.g., Barquero & Bosch, 2015).

3. Methodology

The study started by designing five HTTs about rational numbers (Putra & Winsløw, in press). All five HTTs have been solved by 32 (16 pairs) Indonesian PsTs from one Elementary School Teacher Training study program, Indonesia (to teach pupils from grade 1 to grade 6) and 31 (14 pairs and one group of 3) Danish PsTs from four different Teacher Training Colleges (to teach pupils from grade 1 to 6 or grade 4 to 9). All Indonesian PsTs have already completed all courses in (didactic) mathematics, e.g. mathematics education for the upper grades of elementary school. Most of the Danish PsTs were taking a course on didactics of mathematics, e.g. learning mathematics, numbers, and arithmetic/algebra.

In this particular paper, we focus on an analysis of a pair of PsTs from each country in working on an HTT about addition and subtraction of two fractions. Through this specific case, we would like to show some possible differences on how they discuss the HTT and propose mathematical and didactical praxeologies through a dialectic between questions and answers. The HTT given to PsTs is stated in figure 1.

You ask sixth-grade pupils to solve $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\cdots$, and $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\cdots$

a. How do you solve these problems? (*to be solved individually within 3 minutes*)

You find that many pupils add and subtract fractions in the following way : $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$, and $\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$.

b. How do you interpret the pupils' methods? (*to be solved individually within 3 minutes*)

c. What strategies can you propose to teach these pupils? (*to be discussed and solved in pair, 5 minutes*)

Figure 1. The HTT about addition and subtraction of fractions

Three initial questions with one given pupils' answer are clearly presented in the HTT (Figure 1). From those questions, one can hypothesise some paths of questions as well as answers that might occur during the discussion (Figure 2).

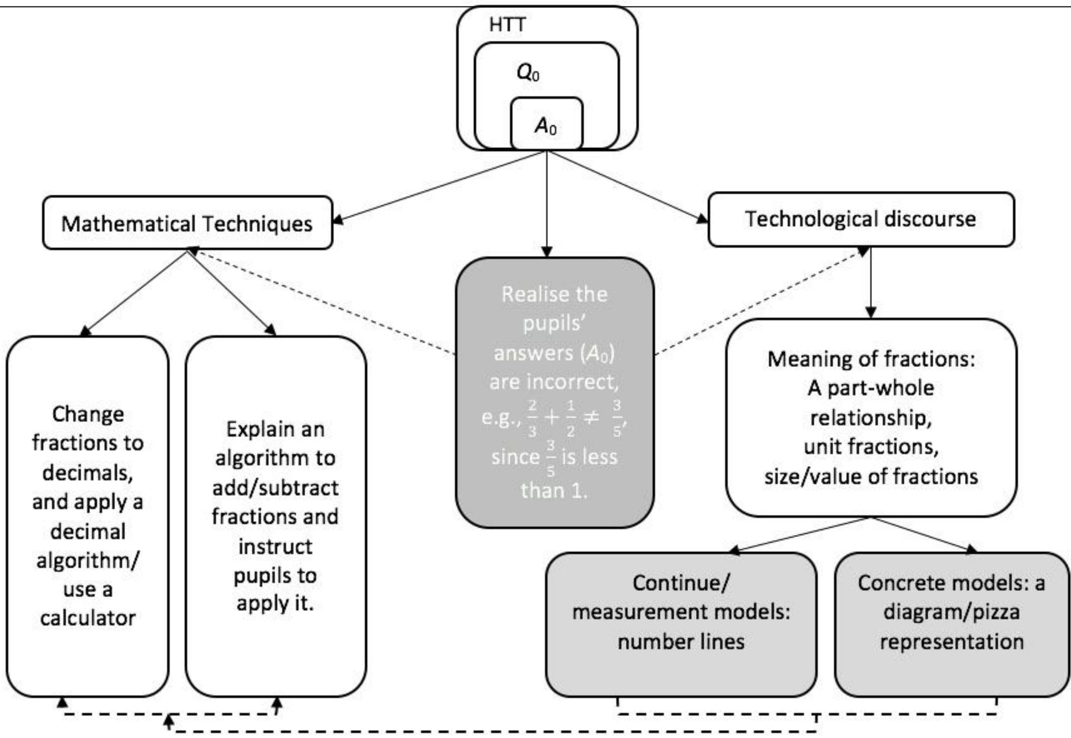


Figure 2. General structure of paths derived from the HTT about addition and subtraction of fractions.

In figure 2, we try to illustrate some possible paths starting from the initial question Q_0 and pupils' answer A_0 stated in the HTT. The first path is that a pair just focuses their discussion on a mathematical technique to solve the tasks. They first confirm that the pupils' answer is incorrect and then show a correct mathematical technique, an algorithm of fractions or an algorithm of decimals after conversion. In the end, they instruct the pupils to apply it to the similar task. The second path is based on technological discourse (TD) where PsTs focus on the meaning of fractions such as a part-whole relationship that could lead them to propose a didactical technique based on a diagram representation, and in the end, they might link it to explain how such an algorithm can work. For PsTs who discuss a measurement model, it will support pupils to have more flexible and coherent praxeologies not only for addition and subtraction but also for multiplication and division of fractions. There is also a possible path through first proving that the pupils' answers are incorrect, and then directly explain a correct mathematical technique or provide technological reasoning for developing a better didactical technique (including the meaning of fractions) for teaching addition and subtraction of fractions (indicated by dashed lines).

4. Findings

4.1. The case of Danish PsTs

A pair of third-year Danish PsTs from group 6 is selected with two considerations. First, it is to have the data to be more comparable to the Indonesian counterparts because they are prepared to teach pupils from grade 1 to 6, and secondly they have already completed the course of learning mathematics, numbers, and arithmetic.

The two Danish PsTs did not get any difficulty to solve the addition and subtraction tasks individually. They applied an algorithm of addition and subtraction of fractions: change each fraction into a common denominator and add numerators. To the second task about their interpretation of pupils' answers, both of them considered that the pupils add and subtract two fractions based on their position, adding a numerator to a numerator and a denominator to a denominator, and then the pupils need to find a common denominator to solve both tasks. In addition, one of them, DS_1 also conjectured that pupils perhaps apply a mathematical technique for multiplication of two fractions. After that, they elaborated their individual answers during the discussion of question c, and the first discussion focused on the interpretation of pupils' answers as follows:

DS_1: Ok. Should we first talk about what is wrong, or what they have answered?

DS_2: Yes. There are two things that are wrong, according to what I can see. First, there is an issue of common denominator, and then in both addition and subtraction there is the problem that they operate both in numerators and denominators. Here, they subtract numerators and denominators from each other, and here they add numerators and denominators. If we had a common denominator, then it would suddenly become twelfths, we would be working with…You have probably made this one into sixths. (points the addition task)

…

DS_1: Yes. I have a theory on that. I totally agree with you, but I also have a theory that they perhaps have taken a strategy from multiplication of fraction, where you multiply a numerator with a numerator and a denominator with a denominator, and then [they] try to use it here. Perhaps they have learned that one, and they try to use it here.

The first path that both Danish PsTs created from their discussion is to interpret possible TD for the pupils' answers. They gave two main interpretations behind the pupils' mistakes: on the one hand, pupils must think a fraction consists of two independent natural numbers (TD1), and, on the other hand, pupils seem to interchange the technique for multiplication and for addition/subtraction of fractions (TD2). In addition, there is a dialectic when DS_2 said "they would get seven twelfths". This means that even though the pupils know how to find a common denominator, they still need to realise that both denominators must not be added. The pupils need to grasp a technological discourse underlying the algorithm of fraction. The Danish PsTs did not discuss that further, and DS_2 only said "*...they are not to be added".*

Both Danish PsTs continued their discussion on how they teach the pupils.

DS_1: Which strategies would we suggest to teach those pupils? Again I think, it might be good to represent fractions in a different way, perhaps. Perhaps with a pizza. Because the fractions only make sense when you have a common denominator. And that can be expressed by, if you have a pizza, all the pieces are equally big. This wouldn't work (points uneven sized sectors of a circle that he drew). Then we would have... well, which denominator should we put on that one? Because they are mixing pieces of different seizes.

DS_2: And then again, the visual. You know, make some… make a little model, again, as we talked about before. Which is simply called?

…

DS_2 drew the model as follows:

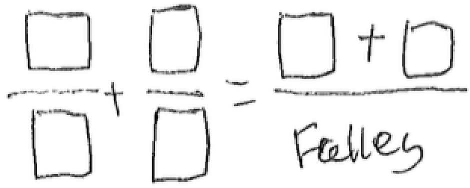


Figure 3. A visual representation for addition of fractions (*fælles* means a common denominator)

DS$_2$: Yes. And then do the same for subtraction, multiplication and… do the same all the way down, so you would have something visual, oh, now we have to add them, now we have to do this.

DS$_1$: Yes.

DS$_2$: Given that you cannot use a collection of formulas, [and] it is very much learning by rote if one has to, well, could one have something in the process so you don't have to refer back all the time to see [inaudible].

From the discussion, it is obvious that both Danish PsTs constructed the second path focusing on didactical techniques through concretising the mathematical tasks. No fundamental questions appear during the discussion that can lead them to discuss more on mathematical and didactical technologies or theories. For instance, DS$_1$ suggested to represent a fraction into a pizza diagram, but he did not provide a further explanation how to do it and what technological discourse could support it. His partner, DS$_2$, also did not provide questions in that respect, but he proposed an idea to concretise the algorithm (Figure 3). Unfortunately, we do not really see that the Danish PsTs try to explain how representations can help pupils perceive an algorithm for addition and subtractions of fractions, although in the end DS$_2$ realised that rote learning, such as memorising the algorithm, might be needed. We summarise the interaction of the two Danish PsTs in the following path:

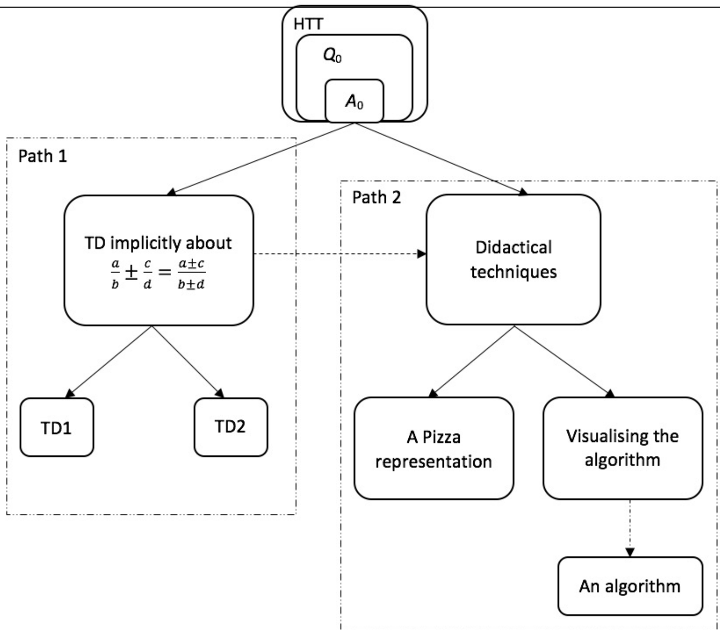


Figure 4. A path derived from the Danish pairs' collective work

4.2. The case of Indonesian PsTs

A pair of Indonesian PsTs from group 13 is selected to be analysed. A reason to choose this pair is that they may represent a common picture of Indonesian PsTs' collective knowledge.

The two Indonesian PsTs also did not get any difficulty to solve the addition and subtraction task individually and applied an algorithm of addition and subtraction of fractions. To the second task about their interpretation of pupils' answers, only IS_1 considered that the pupils added and subtracted two fractions based on their position, and then both of them wrote that the pupils first needed to find a common denominator to add and subtract fractions. In addition, IS_2 also added a statement that the pupils did not need to have a common denominator for multiplication and division of fractions.

Through a similar analysis to the Danish case, we figure out the collective work of the Indonesian pair into three different paths (figure 5). The first one leads to TD for interpreting pupils' answers. Both of them agreed that the pupils' inappropriate technique is due to lack of "understanding" the concept of fractions. This means that the pupils confuse a mathematical technique for addition and subtraction with that for multiplication and division of fractions. For instance, IS_2 said "*the* *pupils solved the task mostly using the method for multiplication and division of fractions*" (TD2).

Secondly, both PsTs agreed to apply an algorithm for addition and subtraction of fractions. The pupils need to find the least common multiple (LCM) of the denominators in order to master the algorithm. The discussion was dominated by IS_2 who started explaining what fractions mean. He defined a fraction consisting of a numerator and a denominator, and he expected pupils to grasp this meaning without giving a further technological discourse underlying it. A dialectic between questions and answers is mostly around an algorithm of addition and subtraction of fractions, e.g., how can pupils find LCM of the denominators? and have they learned about LCM before? The answer given by IS_2 "*before pupils learn fractions, they have already learned how to find LCMs. One subject relates to the other"* indicates that there is a link among several punctual or local praxeologies, and pupils' preliminary praxeology is a kind of support for developing a new praxeology. Nevertheless, instructing pupils of an algorithm seems to be the only didactical technique they propose to help the pupils to solve the addition and subtraction of fractions.

The third path is to provide the pupils with a situation of adding two fractions with a common denominator. They gave an example of mathematical tasks, $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$, but they still focused on the discussion on an algorithm of adding fractions, just adding the numerators. None of them tried to elaborate this situation in order to prove that the algorithm applied by pupils is incorrect. For instance, when IS_1 assumed that the pupils may give an answer $\frac{3}{6}$, a teacher could provoke pupils to prove that it is not possible because $\frac{3}{6}$ equals to a half and is less than $\frac{2}{3}$; but this is not proposed.

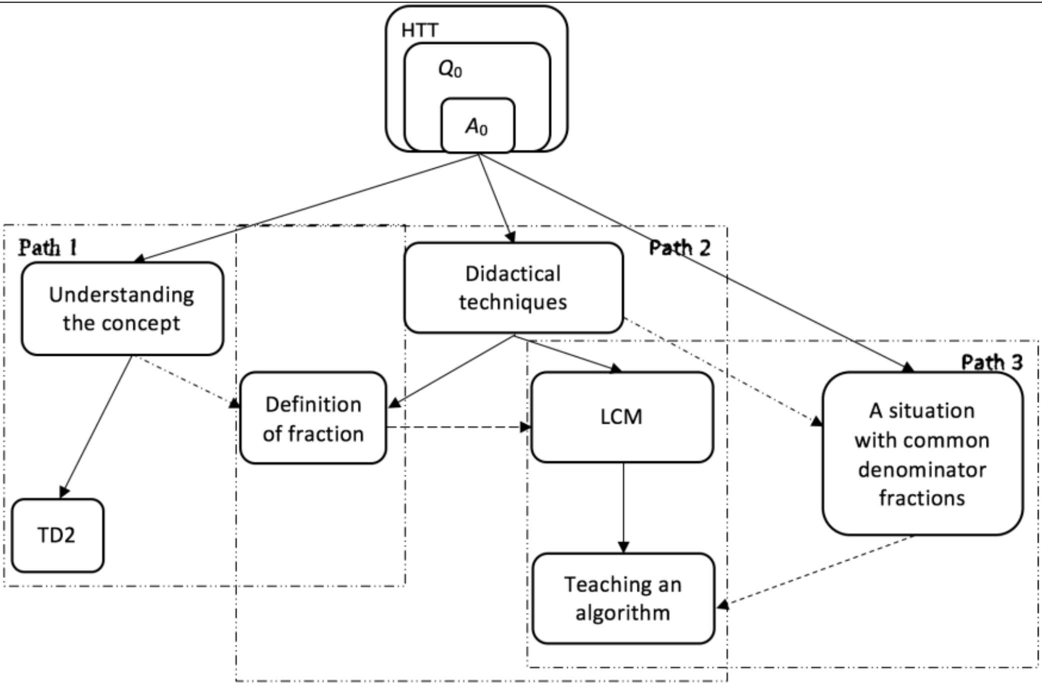


Figure 5. A path derived from the Indonesian pair's collective work.

5. Discussion: A comparative analysis

First, we discuss some common principles found in the results that show similarities of PsTs' mathematical and didactical knowledge of rational numbers, specifically on addition and subtraction of fractions. Both pairs successfully solved the mathematical task presented in question a. They applied the algorithm for addition and subtraction of fractions. Indeed, we cannot expect them to give more diverse answers since the question directly instructs them to solve the task.

The answers both pairs given to question b. are also similar. They provide an interpretation of the pupils' wrong answers: the pupils add and subtract both numbers based on their positions, they consider that a fraction consists of two independent natural numbers. The word "interpret", stated in the question, gives birth to the discussion that leads them to further explain their position. They suggest that pupils need to know how to find a common denominator, and the Indonesian pair focuses on presenting the algorithm for how to add and subtract two fractions.

The last similarity that we observed during their discussions is that both pairs first discussed TD2 underlying the pupils' answers and then related to finding a common denominator. The Indonesian pair considered teaching an algorithm as a didactical technique for addition and subtraction of fractions. By contrast, the Danish PsTs did not apply it as a didactical technique. In fact, it becomes the main difference of didactical knowledge presented by both groups.

The Indonesian pair tried to present an alternative praxeology to teach pupils through giving them a task of adding two fractions with a common denominator, but they still focused the discussion on how the algorithm works to that task (Path 2 in figure 5). In contrast, the Danish PsTs totally switched their ideas from applying the algorithm to the mathematical task into constructing visual representations (Showed by a dashed line from path 1 to path 2 in figure 4). However, the Danish pair did not really show in detail how to construct and visualise the mathematical tasks or unclear use of a contextual situation. In fact, we may doubt that they have sufficient mathematical and didactical knowledge to concretise the mathematical task.

In addition, the data show that none of Danish and Indonesian pairs consider to change fractions to decimals, or to use an instrumental technique such as provided by a calculator (Figure 2). This might be another potential didactical technique to help pupils realise that two different representations, fractions and decimals, have the same value. At the same time, we also observed considerable challenges for PsTs when they try to change fractions to decimals, e.g., $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$, and *a posteriori* when it comes to developing ideas for teaching pupils about "repeating decimals".

6. Final remarks

The analysis through the dialectic between questions and answers presented in diagrams (Figure 4 and 5) provides a general picture of how Danish and Indonesian pairs differ in formulating collective mathematical and didactical praxeologies in teaching addition and subtraction of fractions. The paths show what directions their discussion take, and how they link their mathematical and didactical praxeologies. For instance, the Indonesian pair focused their discussion exclusively on the algorithm (mathematical technique) for addition and subtraction of fractions, and only implicitly on didactic techniques for teaching these unique mathematical techniques. By contrast, the Danish pair discussed both the reasons (mathematical and didactic technology) for the pupils' error and tried to find a visual representation for teaching (didactic technique).

In conclusion, the method gives a picture of how the mathematical and didactical knowledge is shared and developed between two PsTs. This becomes a specific feature of the study that contrasts with other studies of mathematical knowledge for teaching (Ball et al., 2008).

Acknowledgment: We would like to thank the Ministry of Research, Technology, and Higher Education of the Republic of Indonesia for funding the author Ph.D. research under the grant no.102.7/E4.4/2015.

References

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 249-272). Switzerland: Springer International Publishing.

Barquero, B., Bosch, M. & Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9, 4-8 February 2015)* (pp. 809-815). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Bosch. M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICME Bulletin, 58,* 51-65.

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 67-83). Switzerland: Springer International Publishing.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: perspectives provided by an anthropological approach. In R. Douady & A. Mercier

(Eds.), *Research in Didactique of Mathematics* (pp. 131-167). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Eds.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics.* Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/

OECD. (2016), *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education,* PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

Putra, Z. H. & Winsløw, C. (in press). A framework for a comparative study of pre-service elementary teachers' knowledge of rational numbers. *Educaçao Matemática Pesquisa.*

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4 – 14.

Stigler, J. W. & Perry, M. (1988). Cross cultural studies of mathematics teaching and learning: Recent findings and new directions. In D. A. Grouws, T. J. Cooney, & D. Jones (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (pp. 194–223). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Les incohérences entre les préconisations institutionnelles et les conditions du système éducatif dans l'état de São Paulo

Marlene Alves Dias

Université Anhanguera São Paulo, Brésil

Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Sirlene Neves de Andrade et Míriam do Rocio Guadagnini

Université Fédérale du Pernambouc, Direction Régionale Sud et Université Anhanguera São Paulo

Abstract. This paper aims at showing how the functioning of an educational system that should take into account social cyclical needs can impose conditions and restrictions which transfer a considerable part of the development of mathematics to teachers and students. This leads to difficulties in performing well in collaboration and to the identification of evolution that occurs, highlighting inconsistencies related to institutional proposals and expectations towards the work of teachers and students.

Résumé. Dans ce rapport de recherche, nous montrons comment le fonctionnement d'un système d'éducatif, devant répondre aux besoins conjoncturels de la société, peut imposer des conditions et des contraintes qui transfèrent une partie considérable du développement des mathématiques aux enseignants et aux élèves. Ceci rend difficile que leur travail coopératif s'accomplisse de manière productive ; de plus, l'identification des évolutions qui ont lieu met en exergue des incohérences entre les propositions institutionnelles et ce qu'on peut attendre du travail des enseignants et des élèves.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introduction

L'objectif de ce travail est de faire comprendre les difficultés rencontrées par les enseignants et les éducateurs brésiliens dans le développement de leur profession lorsqu'ils sont confrontés à des orientations pédagogiques développées par la noosphère disciplinaire.

Ces orientations sont développées sur la base de propositions politiques qui ne correspondent pas aux conditions et contraintes imposées par la structure scolaire, c'est-à-dire, lorsque les niveaux « école » et « pédagogie » sont presque exclusivement du ressort du contrôle politique.

Cet objectif nous a conduits à la question de recherche suivante: Quelles sont les difficultés rencontrées dans l'enseignement des mathématiques pour mettre en œuvre des lignes directrices pédagogiques en fonction des conditions et des contraintes imposées par la conjoncture sociale qui se reflète dans l'organisation du système éducatif?

Les lignes directrices correspondent aux contenus à étudier étaux indications sur des méthodes possibles à mettre en œuvre.

Il semble important de faire une brève présentation de la reconnaissance par le ministère de l'éducation de la nécessité de construire des propositions d'enseignement pour tenter d'organiser l'éducation dans le pays, en respectant sa diversité.

En 1997, le ministère brésilien de l'éducation présentait les paramètres curriculaires nationaux (PCN) de l'enseignement primaire (élèves de 6 à 10 ans) dans le but de « [...] définir des objectifs de qualité pouvant aider l'élève à faire face au monde actuel en tant que citoyen participatif, réflexif et autonome, conscient de ses droits et devoirs » (Brésil, 1997, p.4). L'année suivante, étaient introduits les PCN du collège (étudiants de 11 à 14 ans) avec « l'intention d'élargir et d'approfondir un débat pédagogique impliquant les écoles, les parents, les gouvernements et la société et d'apporter une transformation positive dans le système éducatif brésilien » (Brésil, 1998, p.5). Ce document soulignait, par ailleurs, la volonté de conjuguer, dans le processus éducatif, le respect de la diversité régionale et culturelle avec la construction des références nationales communes à l'ensemble de tout le Brésil.

Dans une perspective semblable, en 2000, les paramètres curriculaires de l'enseignement secondaire sont introduits. Dans le premier document Brésil (2000), il est explicité que, selon la nouvelle loi de lignes directrices et de bases de l'éducation nationale - 9394/96 (LDB), « le nouveau profil pour le curriculum est basé sur des compétences de base pour l'insertion de jeunes dans la vie adulte. » (p. 04).

Deux ans plus tard, PCN + est présenté (Brésil, 2002) dans le but de discuter la conduite de l'apprentissage dans les différents contextes et conditions de travail des écoles brésiliennes. Dans ce document, les nouvelles orientations pour l'enseignement secondaire sont prises en compte, en soulignant l'importance de l'articulation entre les domaines de la discipline mathématique et les autres disciplines, ce qui est censé être réalisé par les enseignants dans leurs unités scolaires selon leur groupe d'élèves.

En 2006, les lignes directrices curriculaires pour l'enseignement secondaire ont été introduites (Brésil, 2006) dans le but de contribuer au dialogue, entre les enseignants et l'école, sur les pratiques pédagogiques. En ce sens, ce document présente des réflexions dans l'intention d'alimenter cette pratique.

En ce qui concerne les mathématiques, l'accent est mis sur : le choix du contenu ; la forme de travail du contenu ; le projet pédagogique et l'organisation curriculaire.

- Les contenus ont été organisés en quatre blocs : nombres et opérations, fonctions, géométrie, analyse de données et probabilités.
- Pour chaque bloc, des réflexions sont présentées afin de conduire l'articulation avec des connaissances déjà travaillées et avec des applications dans la vie quotidienne.
- Les problèmes d'ordre didactique, qui correspondent au projet pédagogique, sont envisagés à partir du triangle didactique en explicitant un exemple de situation, dans le but de montrer les difficultés de la motivation du savoir d'une part, et sa transmission d'autre part. Ceci a conduit à l'introduction des idées socioconstructivistes de la construction du savoir par l'élève lui-même, amenant l'enseignant au rôle de médiateur, où ce dernier doit créer des situations qui permettent aux élèves de remplir leur rôle.

Dans le document, il est souligné que les rapports entre l'enseignant et l'élève se font au moyen du contrat pédagogique, qui leur sera explicité. Les relations aux connaissances, renvoyant implicitement au contrat didactique, ne deviennent explicites que lorsque l'enseignant ou l'élève, en quelque sorte, rompent ce contrat.

À partir de la notion de contrat didactique, le document introduit l'idée de transposition didactique en utilisant la notion de transposition interne et externe. La transposition externe correspond au passage du savoir savant au savoir à enseigner, tandis que le travail interne qui se poursuit, vient après l'introduction des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. D'où l'idée que la transposition interne se matérialise à travers les lignes directrices du curriculum et le manuel.

Ces indications nous ont amenés à considérer l'objectif présenté précédemment, puisque les enseignants et les éducateurs brésiliens sont confrontés à des orientations pédagogiques qui ne sont guère compatibles avec les conditions et les contraintes imposées par la structure scolaire, où la participation des enseignants est insignifiante, à de rares exceptions près.

L'organisation curriculaire est directement associée au projet politique pédagogique de l'école qui doit tenir compte de son contexte social. C'est pourquoi chaque école construit son propre curriculum. Pour le lycée, il est nécessaire d'envisager l'articulation et l'intégration des connaissances afin de renforcer le travail interdisciplinaire.

Après avoir présenté ces lignes directrices, les auteurs du document soulignent l'importance des discussions que ce document peut générer dans le but de mettre l'accent sur la connaissance mathématique, mais d'une manière appropriée au projet politique pédagogique de l'école.

Ainsi, il est nécessaire de maintenir un équilibre dans la répartition des heures de cours, sans négliger l'importance du travail permanent qui nécessite un horaire hebdomadaire suffisant pour chaque année de lycée.

À partir de cette observation, nous avons été amenés à étudier la distribution des classes de mathématiques du secrétariat d'état de l'éducation de São Paulo pour différentes structures pédagogiques, où les mathématiques doivent être développées en tenant compte des mêmes domaines, secteurs, thèmes et sujets, lorsque nous nous référons aux niveaux de codétermination.

Nous soulignons également qu'au Brésil, les changements concernant les politiques publiques en matière d'éducation reposent sur la proposition d’un programme national. São Paulo est l’État qui détientle plus grand contingent d'élèves et qui dispose d’une politique spécifique pour son système éducatif. Nous estimons que si nous identifions les conditions et les contraintes imposées dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, nous pouvons aider les enseignants et les éducateurs à développer consciemment ces nouvelles propositions.

Ainsi, nous avons choisi comme référence théorique la théorie anthropologique du didactique pour le développement de notre recherche.

2. Cadre théorique

Afin d'observer ce que les différents acteurs qui composent la noosphère, en particulier, les spécialistes des mathématiques et d’éducation mathématique qui font des recommandations pour l'enseignement des mathématiques, nous avons choisi d'utiliser la théorie anthropologique du didactique (TAD) comme cadre théorique et surtout les notions qui y figurent : les rapports personnels, les niveaux de codétermination didactique et la notion de praxéologie. Nous soulignons que nous plaçons la discipline mathématique et son enseignement dans l'ensemble des activités humaines et sociales, telles que définies par Yves Chevallard (1998).

Nous avons choisi la TAD comme support théorique pour cette recherche, car elle fournit des outils qui nous permettent d'analyser ce qui est indiqué pour le développement des organisations mathématiques et didactiques en classe. Elle permet également de comprendre les conditions et les contraintes qui sont créées, non pas par l'enseignant, mais par d'autres acteurs du système éducatif, qui sont généralement responsables des choix structurels et didactiques à mettre en œuvre dans les écoles.

Les niveaux de codétermination définis par Yves Chevallard (2009), caractérisent les conditions et les contraintes du système éducatif et la responsabilité de ses acteurs selon l'échelle suivante.

Sujets ↔ thèmes ↔ secteurs ↔ domaine ↔ disciplines ↔ pédagogie ↔ école ↔ société ↔ civilsation ↔ humanité

Figure 1. Niveaux de codétermination didactique.

Cette échelle peut être décomposée en deux niveaux. Le niveau inférieur comprend les niveaux : sujets, thèmes, secteurs et domaines. Selon Chevallard (2009), l'action de l'enseignant, se concentre habituellement sur les sujets et les thèmes, c'est-à-dire, que son rôle est de gérer ce qui a déjà été décidé aux niveaux supérieurs de l'échelle. L'auteur souligne l'importance du fait que l'enseignant doive agir à d'autres niveaux, notamment aux niveaux : secteur, domaine et discipline.

Le niveau supérieur correspond à : disciplines ↔ pédagogie ↔ école ↔ société ↔ civilisation ↔ humanité. C'est là que les décisions sont prises pour être mises en œuvre aux niveaux inférieurs, qui peuvent également exercer des conditions et des contraintes sur ces niveaux supérieurs. Notre travail s'insère dans cette perspective, car nous analysons comment les décisions proposées aux niveaux supérieurs fournissent des conditions et des contraintes à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

La notion de rapport personnel, comprend toutes les interactions qu'un individu peut avoir avec un objet (Yves Chevallard, 2015) : on peut observer comment il manipule individuellement l'objet « équation » ou comment il rêve à l'objet « richesse ». Cette notion de rapport personnel d'un individu à un objet permet d'abord de définir son univers cognitif.

Pour faire face à l'évolution de l'univers cognitif, il est important de rendre explicite la notion d'institution :

> Une institution I est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres – c'est-à-dire de praxéologies (Yves Chevallard, 2003, p.2).

Nous soulignons ici que l'univers cognitif d'un individu est constitué et modifié à partir de son assujettissement à plusieurs institutions, constituant ainsi une *personne*. De plus, le rapport institutionnel à l'objet *o* par les sujets, devrait être celui des sujets de l'institution *I* en position *p*, selon Chevallard (2009, 2015).

La notion de praxéologie, notion fondamentale de la TAD, nous permet d'étudier les rapports personnels et / ou institutionnels, car selon Chevallard (1998) « [...] *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie* » (p.1).

Chevallard (2009) définit une praxéologie par : un type de tâche *T*, une technique τ qui indique une manière d'accomplir les tâches *t* de type *T*, une technologie θ qui correspond à un discours rationnel sur la technique et aussi d'une composante théorique Θ, qui gouverne la technologie θ elle-même. En somme, on peut visualiser la notion de praxéologie en deux parties, une technique pratique, c'est-à-dire le « savoir-faire » et l'autre technologique-théorique, que l'on peut identifier comme un « savoir ».

En ce sens, les notions de la TAD structurent cette recherche, en particulier compte tenu du fait que certaines conditions et contraintes ne sont pas créées par l'enseignant dans la classe et ne répondent pas à une intention didactique clairement identifiable (Chevallard, 2007).

3. Méthodologie

En cohérence avec le cadre théorique et la question de recherche, la méthodologie s'appuie sur:

- une explicitation de l'organisation du système éducatif mis en œuvre par le secrétariat de l'éducation de São Paulo pour le lycée, en considérant les écoles de jour et de nuit (où les cours sont développés de dix-neuf heures à vingt-trois heures du soir), les écoles « indígenas » et les écoles dans les prisons ;
- l'analyse du curriculum du secrétariat de l'éducation à São Paulo pour les trois années du lycée ;
- l'analyse du «cahier de l'enseignant», un manuel avec les contenus minimaux à développer dans les écoles publiques de São Paulo, construit par le secrétariat de l'éducation de cet état. Dans ce matériel didactique nous avons identifié : contenu, approche proposée, praxéologies et ostensifs et non ostensifs

privilégiés, qui correspond aux éléments indiqués pour être développés et qui servent d'outils pour identifier les conditions et les contraintes imposées;

- l'analyse des macro-évaluations ENEM, obligatoire pour l'entrée dans les universités publiques brésiliennes et pour l'obtention de bourses d'études dans des universités privées, et la première phase du concours d'entrée FUVEST, obligatoire uniquement pour ceux qui postulent une place à l'université de l'état de São Paulo (USP). Pour cette analyse, nous ne considérons que les tests appliqués au cours des cinq dernières années.

C'est à partir de ces analyses, que nous prétendons répondre à notre question de recherche.

4. Contexte et système d'enseignement actuel au Brésil et dans l'état de São Paulo

4.1. Le contexte

Actuellement, le Brésil compte 48,8 millions d'inscrits en éducation de base, soit environ un quart de sa population. Ceux-ci sont répartis entre les vingt-sept états et une région autonome administrativement, qui contient la capitale du pays, le district fédéral. 81,6% des inscriptions sont situées dans les écoles publiques, c'est-à-dire gérées par le gouvernement fédéral, l'état ou la commune. Dans les écoles publiques de São Paulo, d'après le recensement de l'année 2015, 3 565 325 étudiants étaient inscrits, dont 1 541 944 dans l'enseignement secondaire, ce qui correspondrait, si le même nombre demeurait en 2016, à environ 10% des 16,6 millions inscrits dans tous les états à cette étape de l'école.

Bien qu'il existe des documents nationaux qui proposent d'organiser le système éducatif, chaque état dispose d'une autonomie pour mener à bien cette organisation en fonction du contexte dans lequel se trouvent ses étudiants. L'état de São Paulo est le plus grand état brésilien, et ses politiques éducatives servent parfois de référence. C'est ce qui nous a conduit à le prendre comme objet d'étude.

4.2. Système d'enseignement actuel de l'état de São Paulo et ses conditions et contraintes

Plusieurs questions se sont posées à nous en initiant l'étude du fonctionnement du lycée dans l'état de São Paulo : Comment les étudiants sont-ils répartis selon le contexte culturel dans lequel ils se situent ? Quelles sont les disciplines requises et existe-t-il une proposition en termes d'horaire hebdomadaire pour chacune ? Existe-t-il un document qui guide la répartition des disciplines ou est-ce la responsabilité de l'état ? Existe-t-il des horaires hebdomadaires minimum pour les mathématiques au lycée ? Existe-t-il une proposition avec un contenu mathématique minimal à développer au lycée ?

En raison de la diversité des contextes culturels et du nombre d'élèves dans l'état de São Paulo, ceux-ci sont distribués dans des écoles sous l'autorité de régions et celles-ci reçoivent les directives du secrétaire d'état à l'éducation, de sorte que la répartition des élèves est effectuée par les régions selon les règles de ce secrétariat.

Nous observons que le lycée dans l'état de São Paulo, comme dans tout le pays, est organisé en trois ans, avec un horaire global annuel minimal de 800 heures, mais cette condition ne se réfère pas à l'enseignement ou à la formation accélérée et à l'enseignement de nuit. Les programmes d'accélération appelés « éducation des jeunes et des adultes » s'adressent à des personnes qui ont quitté l'école pendant un certain temps ou ne sont pas dans la tranche d'âge appropriée au niveau de l'éducation. Comme ils ont des lignes directrices et des horaires hebdomadaires spécifiques et leur propre matériel, nous ne les considérons pas dans la recherche, mais nous prenons en compte l'enseignement de nuit.

De plus, en fonction des contextes trouvés, les régions doivent tenir compte de cas spécifiques tels que l'école pour les « indígena » et l'école qui est responsable des étudiants en prison. Par exemple, dans une des régions, nous trouvons les contextes suivants : les écoles régulières : école élémentaire, collège et lycée qui peuvent ou non être séparées, l'école à temps plein (matin et après-midi), l'école des « indígena » et les services pénitentiaires. Nous ne considérons pas ici les écoles techniques, car elles ont un curriculum différencié.

Pour la région retenue pour l'étude, il existe 111 écoles réparties selon la figure 2.

Écoles et leurs contextes	Nombre d'écoles	Nombre d'heures de classe de mathématiques hebdomadaire par période au lycée	Nombre d'heures de classe de physique hebdomadaire par période au lycée
Écoles : élémentaires, collège et lycée (matin, après-midi, nuit)	111 66 lycées	Matin : 6 heures de classe Après-midi : 6 heures de classe Nuit : 5 heures de classe	Matin : 2 heures de classe Après-midi : 2 heures de classe Nuit : 2 heures de classe
École "indígena"	1		
Service en prison	responsabilité de l'une des écoles d'enseignement régulier		
École à plein temps	1		

Figure 2. Les écoles dans leurs contextes.

La figure 2 nous permet d'observer que la majorité des écoles sont à temps partiel (matin ou après-midi ou soir) et la figure 3 exprime les différences entre le nombre de cours et leurs durées respectives, témoignant de la différence entre l'enseignement de jour et de nuit dans les écoles secondaires.

Matrice curriculaire du lycée	Nombre de classes hebdomadaire de mathématiques			Nombre de classes hebdomadaire de physique		
	1er année	2ème année	3ème année	1er année	2ème année	3ème année
Jour (50 minutes chaque classe)	5	5	5	2	2	2
Nuit (45 minutes)	4	4	4	2	2	2
Éducation des jeunes et des adultes (45 minutes)	4	4	4	2	2	2
Intégral (50 minutes)	5	5	6	3	2	2

Figure 3. Nombre de séances par semaine en mathématiques et enphysique pour le lycée.

Cette différence est avérée concernant les mathématiques (4 h 10 contre 3 h). Mais lorsque nous considérons les disciplines obligatoires présentées dans la figure 4, nous observons qu'elles sont les mêmes, seul l'horaire global annuel change.

Matrice curriculaire du lycée	Horaire global annuel	Disciplines
Jour	1200 heures	Arts, biologie, éducation physique, philosophie, physique, géographie, histoire, langue et littérature portugaise, mathématiques, chimie, sociologie et langue étrangère (anglais).
Nuit	1080 heures	Les mêmes disciplines.
Éducation des jeunes et des adultes	540 heures	Les mêmes disciplines.
Intégral	1720 heures	Arts, biologie, éducation physique, philosophie, physique, géographie, histoire, langue et littérature portugaise, mathématiques, chimie, sociologie et langue étrangère (anglais). Disciplines électives : pratiques de la science, orientation et études, projet de vie, préparation académique et monde du travail.

Figure 4. Disciplines obligatoires pour le lycée dans les différentes modalités.

En dépit des différences d'heures de classe, lors de l'analyse du curriculum de São Paulo mis en place en 2008, nous avons constaté que l'objectif fixé par le secrétariat d'état est « le devoir de garantir à tous des bases communes de connaissances et compétences, afin que nos écoles puissent fonctionner comme un réseau » (São Paulo, 2008, p.3).

Afin de garantir cet objectif, il est proposé que :

> ... l'apprentissage résulte également de la coordination des actions entre les disciplines, de la stimulation de la vie culturelle de l'école et du renforcement de ses relations avec la communauté. À cette fin, elle (le secrétariat de l'état) renforce et propose des lignes directrices et des

stratégies pour la formation continue des enseignants (São Paulo, 2008, p.4).

Ces différences et le fait qu'en 2015, l'état de São Paulo comptait 1 541 964 jeunes inscrits au lycée (São Paulo, 2015), dont environ 67% étudiaient la journée et les autres la nuit, nous a permis de considérer seulement ce groupe d'étudiants. Notre choix est dû au fait qu'ils représentent la majorité et nous permettent d'étudier les contraintes imposées au niveau de l'école, car l'horaire global annuel diffère, mais la proposition de travail est la même.

En ne considérant que les questions liées aux disciplines et aux contenus proposés, nous pouvons déjà mentionner les difficultés et les incongruités dans le cas des écoles secondaires. En effet, la proposition indique la nécessité de coordonner les actions entre les disciplines, mais les horaires de celles-ci, telles que les mathématiques et la physique par exemple, représentent déjà une contrainte, qui est encore plus évidente lorsqu'on considère que le même contenu est proposé pour les cours de jour et de nuit, en utilisant le même matériel didactique : le « cahier ».

5. Analyse du rapport institutionnel par le biais de documents officiels et de macro-évaluations

La présentation des indications nationales, dans l'introduction, au moyen de certaines lignes directrices trouvées dans les paramètres curriculaires nationaux (PCN) a permis de souligner que le lycée d'enseignement général devrait assurer un minimum de 800 heures et que : « Ce sera un objectif permanent des autorités responsables d'établir un rapport adéquat entre le nombre d'étudiants et l'enseignant, la charge de travail et les conditions matérielles de l'établissement » (Brésil, 2000, p. 30), c'est-à-dire que la régulation de l'enseignement secondaire est de la responsabilité de chaque état.

Cette orientation a été suivie par l'état de São Paulo qui a construit sa structure curriculaire selon les différents contextes et selon les besoins de ses élèves. En outre, les spécialistes du secrétariat de l'éducation de l'état ont développé des contenus minimaux (les cahiers) pour les trois années d'études secondaires régulières qui correspondent au « cahier de l'enseignant » et au « cahier de l'élève ».

Ces «cahiers» sont des manuels scolaires indiqués et distribués aux enseignants et aux élèves en tant que matériel didactique à développer en classe. Nous notons que la différence entre le cahier de l'enseignant et celui de l'élève réside dans les lignes directrices données à l'enseignant sur la façon dont les activités doivent être menées. Il n'y a pas de différence entre les cahiers concernant la période (jour ou nuit). Dans ces cahiers sont indiquées des tâches que nous avons analysé comme des praxéologies à développer afin de garantir une base de connaissances commune à tous les élèves du lycée.

5.1. Exemple de praxéologies indiquées pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie analytique

Nous avons choisi de présenter à titre d'exemples les praxéologies préconisées dans le « cahier de l'enseignant », pour le domaine de la géométrie analytique de la discipline mathématique, notant qu'elles sont indiquées pour être développées au cours des deux premiers mois de la troisième année du lycée. Le choix de la géométrie analytique est associé aux difficultés présentées par les étudiants qui commencent l’enseignement supérieur dans ce domaine.

Nous soulignons que, pour le domaine considéré, les secteurs proposés sont : les points, la droite, la circonférence et les coniques, c'est-à-dire l'étude de la géométrie analytique dans le plan. En ce qui concerne ces secteurs, les thèmes indiqués sont : distance, milieu de deux points, alignement de trois points pour le secteur points, équation d’une droite et étude des coefficients, droites parallèles et perpendiculaires, distance d’un point à une droite, problèmes sur la droite et leurs propriétés, équations, applications dans différents contextes pour les cercles et les coniques.

Nous mettons en évidence dans les figures 5, 6 et 7 uniquement les praxéologies et les ostensifs préconisés dans le cahier de l'enseignant pour l'étude des secteurs : points, droites, cercles et ellipses avec de centre à l'origine.

types de tâches (T)	technique (s) (τ)	technologie (θ)	théorie (s) (Θ)	Ostensif (s)
T1. Représenter paires ordonnées dans le système cartésien orthogonal (dans la séquence SI – système cartésien orthogonal).	Reconnaître l'abscisse et l'ordonnée pour représenter le point dans le SI.	Notions de : paire ordonnée, système cartésien orthogonal, abscisse et ordonnée.	La géométrie euclidienne plane et la géométrie analytique dans le plan.	Ostensif algébrique point (x, y). Ostensif graphique point. Ostensif intrinsèque point : A,B, ...
T2. Déterminer la distance entre deux points.	Déduire la formule et l'appliquer. ou Appliquer la formule directement.	Notions de : représentation de paires ordonnées dans le SI, segment de droite, théorème de Pythagore, racine nième et son inverse.	La géométrie euclidienne plane et la géométrie analytique dans le plan.	Ostensif algébrique point (x, y). Ostensif graphique point. Ostensif formule de distance.
T3. Déterminer la pente d'une droite étant données deux points.	Déterminer la tangente d'un angle d'un triangle rectangle et associer à la pente d'une droite.	Notions de : tangente dans le triangle rectangle, segment horizontal et vertical.	La trigonométrie dans le triangle rectangle.	Ostensif algébrique point. Ostensif graphique droite. Ostensif formule de la tangente.
T4. Ecrire l'équation fonctionnelle d'une droite passant par deux points donnés.	Utiliser la notion de fonction affine et la pente d'une droite pour écrire son équation fonctionnelle.	Notions de : pente d'une droite, fonction affine, graphique d'une fonction affine et ses propriétés.	Fonction affine et ses propriétés.	Ostensif algébrique point. Ostensif graphique droite. Ostensif formule de la fonction affine.
T5. Déterminer la position relative entre deux droites données au moyen de leurs équations cartésiennes réduites (y = ax + b)	Construire le graphique pour visualiser si les droites sont confondues, parallèles ou concurrentes. Comparer les pentes pour conclure si les droites sont confondues, parallèles ou concurrentes.	Notions de : droites confondues, parallèles et concurrentes, fonction affine, graphique d'une fonction affine, pente d'une droite, rapport entre les pentes et les propriétés des droites.	La géométrie euclidienne plane et fonction affine et ses propriétés.	Ostensif formule fonction affine. Ostensif graphique droite. Ostensif formule fonction affine.

Figure 5. Les praxéologies et les ostensifs préconisés dans le cahier de l'enseignant pour les secteurs point, droite, cercle et ellipse avec centre à l'origine.

T6. Déterminer la distance entre un point et une droite.	Représenter un point et une droite dans le SI et déterminer la distance entre eux au moyen de la similitude des triangles rectangles.	Notions de : similitude des triangles rectangles, fonction affine, graphique d'une fonction affine, pente d'une droite.	La géométrie euclidienne plane et fonction affine et ses propriétés.	Ostensif formule fonction affine. Ostensif graphique droite. Ostensif formule inclinaison d'une droite.
T7. Déterminer si deux droites données par leurs équations cartésiennes réduitessont perpendiculaires.	Utiliser la propriété : deux droites sont perpendiculaires si leurs pentes $m_1$et m_2 ont des signes opposés et sont inverses, c'est-à-dire $m_1.m_2 = -1$.	Les notions de : perpendicularité, pente d'une droite et congruence de triangles pour déterminer la formule $m_1.m_2 = -1$.	La géométrie euclidienne plane et fonction affine et ses propriétés.	Ostensif formule fonction affine. Ostensif graphique droite. Ostensif formule inclinaison d'une droite.
T8. Résoudre des tâches intra et extra mathématiques en utilisant les notions de points et de droites.	Techniques associées aux tâches T1 à T7.	Technologies associées aux tâches T1 à T7.	La géométrie euclidienne plane et fonction affine et ses propriétés.	Ostensifs associés aux tâches T1 à T7.
T9. Déduire l'équation réduite d'un cercle étant donné son centre et l'un de ses points.	Appliquer la notion de distance entre deux points pour déterminer l'équation réduite.	Les notions de : cercle, distance entre deux points.	La géométrie euclidienne plane et la géométrie analytique.	Ostensif algébrique point. Ostensif formule de distance.
T10. Déterminer le centre et le rayon d'une circonférence donné par son équation réduite.	Comparez l'équation donnée avec l'équation réduite $(x-a)^2 + (y-b)^2=r^2$ déterminer (a, b) le centre et le rayon r.	Notions de: équation réduite d'un cercle, notion de point.	Géométrie analytique.	Ostensif équation réduite d'un cercle. Ostensif algébrique point.

Figure 6. Les praxéologies et les ostensifs préconisés dans le cahier de l'enseignant pour les secteurs point, droite, cercleet ellipse avec centre à l'origine.

T11. Représenter un cercle dans le SI.	τ1 : Si le rayon et le centre sont donnés, représenter le centre et tracer le cercle. τ2 : Si l'équation réduite du cercle est donnée, déterminer le centre, le rayon et un point et tracer le cercle.	θ1 : les notions de: point, cercle et représentation de point dans le SI. θ2 : les notions de: point, cercle et son équation réduite et représentation de point dans le SI.	La géométrie euclidienne plane et la géométrie analytique.	Ostensif équation réduite d'un cercle. Ostensif algébrique point. Ostensif graphique point. Ostensif graphique cercle.
T12. Déterminer l'intersection d'une droite donnée au moyen de de l'ostensif formule de la fonction affine et d'un cercledonné au moyen de son équation réduite.	La droite étant donnée par l'ostensif formule de la fonction affine et le cercle par l'ostensif équation réduite, nous substituons y à l'équation du cercle et nous trouvons les points d'intersection.	Les notions de: droite, cercle et ses représentations, équations, systèmes d'équations et résolution d'équations et systèmes d'équations, points et leurs représentations dans le SI.	La géométrie euclidienne plane, la géométrie analytique et la fonction affine et ses représentations.	Ostensif formule de la fonction affine. Ostensif équation réduite d'un cercle. Ostensif algébrique point.
T13. Déterminer les axes de symétrie d'une ellipse avec centre à l'origine étant donnée par son équation réduite.	Comparer l'équation donnée avec l'équation réduite d'une ellipse avec centre à l'origine.	La notion de: équation réduite d'une ellipse avec centre à l'origine.	Géométrie euclidienne plane, la géométrie analytique.	Ostensif équation réduite d'une ellipse avec centre à l'origine.
T14. Déduire le rapport entre les demi-axes et les foyers d'une ellipse centrée à l'origine (déterminer l'excentricité).	Représenter graphiquement une ellipse, pour visualiser les semi-axes et les foyers, appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle trouvé.	Les notions de: ellipse avec centre à l'origine, foyers et semi-axes, triangle rectangle et théorème de Pythagore, représentation des points dans le SI.	Géométrie euclidienne plane, la géométrie analytique.	Ostensif graphique d'une ellipse avec centre à l'origine. Ostensif algébrique théorème de Pythagore.
T15. Déterminer l'ordonnée ou l'abscisse des points qui appartiennent à une ellipse avec centre à l'origine donnée au moyen de son équation réduite.	Remplacer les coordonnées de point donné dans l'équation réduite d'une ellipse avec centre à l'origine et résoudre une équation quadratique.	Les notions de: points, ellipse avec centre à l'origine et équation quadratique.	Géométrie analytique et algèbre des équations.	Ostensif équation réduite d'une ellipse avec centre à l'origine. Ostensif algébrique point. Ostensif équation quadratique.

Figure 7. Les praxéologies et les ostensifs préconisés dans le cahier de l'enseignant pour les secteurs point, droite, cercle et ellipse avec centre à l'origine.

Dans l'annexe 1, nous présentons l'analyse du type de tâche T11 e T12 avec un exemple de tâche typique.

5.2. Étude des praxéologies sur géométrie analytique privilégiées dans la macro-évaluation ENEM et le concours d'entrée FUVEST

L'analyse des tâches de la FUVEST sur la géométrie analytique ont permis d'identifier certaines caractéristiques typiques de la section mathématique de cette évaluation. Les notions de géométrie analytique impliquées sont : les points, les droites et leurs propriétés, le cercle et ses propriétés, la position relative des droites et des cercles. Les élèves sont invités à dessiner une représentation graphique des points ou à déterminer une équation cartésienne de la courbe donnée, à utiliser des propriétés et à déterminer les intersections, mais les exigences techniques en termes de travail algébrique ne sont pas évidentes. En annexe 2 nous présentons un exemple qui montre la différence entre le travail algébrique développé dans le cours et ce qui est demandé dans le concours d'entrée FUVEST.

L'analyse de l'évaluation ENEM et le « cahier de l'enseignant » montrent que les notions de point, de droite, de cercle et de coniques sont traitées de manière à ne pas poser de difficultés par rapport aux techniques algébriques nécessaires au développement des tâches proposées. En général, on demande la représentation graphique des points, de la droite, du cercle et de la conique, compte tenu de leurs équations. Les intersections sont peu explorées et les ostensifs utilisés sont: l'ostensif fonctionnel pour la notion d'équation de droite et l'ostensif « équation réduite » pour le cercle et les coniques.

6. En guise de conclusion

Dans ce rapport de recherche, nous essayons de montrer comment la TAD peut être utilisée dans une perspective de compréhension des difficultés rencontrées par les enseignants et, plus particulièrement, par les élèves qui, selon leurs besoins, étudient dans différents contextes.

Dans le but de résoudre ce problème, le secrétariat de l'éducation de l'état de São Paulo a créé un matériel de base commune qui, comme on le voit, ne répond pas aux besoins des étudiants qui souhaitent poursuivre leurs études. La proposition commune requiert beaucoup de travail aux enseignants et aux élèves lorsque nous nous référons aux types de tâches trouvées dans le concours d'entrée FUVEST.

Ainsi, lors de l'étude des similitudes et des différences entre les caractéristiques contextuelles du même état, lorsque l'on considère les besoins des élèves, il est possible de vérifier qu'ils se situent dans différents niveaux de codétermination.

Un exemple c'est le cas du « cahier » développé par des experts du secrétariat de l'état de São Paulo, qui souvent ne connaissent pas les spécificités des écoles. En outre, en général, les directives sont mises en œuvre par les coordinateurs scolaires, qui n'ont pas toujours une formation mathématique, ce qui confère à l'enseignant l'entière responsabilité du travail recommandé, ce qui contribue à accentuer les difficultés rencontrées.

Il convient d'avoir à l'espritces influences contextuelles qui tendent à être rendues invisibles à ceux qui se trouvent dans un système d'enseignement particulier et qui semblent cruciales pour l'application d'un travail collaboratif entre les enseignants et coopératif entre le professeur et les élèves de façon àêtre productif et qui puisse également envisager les évolutions au sein de ce système.

Références

Brésil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais : matemática.* Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental. – Brasília : MEC, SEF.

Brésil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais : matemática terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. – Brasília : MEC, SEF.

Brésil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o EnsinoMédio*. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. – Brasília : MEC, SEF,

Brésil. (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais EnsinoMédio + : Ciências da Natureza e suastecnologias*. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Brésil (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio (vol. 2). Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC.

Chevallard, Y. (1998).*Organisations didactiques 1 : les cadres généraux*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_1_1998_.pdf

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiquesenseignantes en théorieanthropologiquedu didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorieanthropologiquedu didactique. Actes du congrès international sur la théorie anthropologique du didactique: L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. *Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Universidad de Jaén, pp. 705-746.

Chevallard, Y. (2009). *La TAD face au professeur de mathématiques*, Communication au Séminaire DiDiST de Toulouse. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Chevallard, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapportau savoir. *Dialogue 155 – Réussir, du collège au lycée : quelle approche des savoirs ?* http://www.gfen.asso.fr/fr/dial155

São Paulo (2008). *Currículo do estado de São Paulo : matemática e suas tecnologias.* http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf

São Paulo (2015). *Censo Escolar, 2015*. http://www.educacao.sp.gov.br/cima/consultas/censo-escolar/

Annexe 1 :

Type de tâche : Représenter un cercle dans le SI et déterminer l'intersection d'une droite et du cercle (tâche qui correspond au moment de travail avec les techniques élaborées en T11 et T12).

Exemple : En sachant qu'un cercle de centre $C(x_0; y_0)$ et rayon a une équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, considérez le cercle de centre (4 ; 4) et rayon 4.

a) Représenter ce cercle dans le plan cartésien et déterminer son équation ;
b) Déterminer l'équation de la droite qui passe par l'origine et par le centre du cercle.
c) Calculer les coordonnées des points P1 e P2, l'intersection de la droite *s* avec le cercle donné.

techniques:

question a) τ1 : Construire le plan cartésien et représenter le point (4 ; 4), ensuite représenter le cercle. Pour déterminer l'équation il suffit de substituer le point et le rayon dans l'équation donnée.

question b) τ2 : Étant donné les deux points, il suffit de considérer l'ostensif formule de la fonction affine (y=ax+b) substituer les points (0 ; 0) et (4 ; 4) pour déterminer l'équation cartésienne réduite de la droite.

question c) τ3 : Remplacer y dans l'équation réduite du cercle et résoudre une équation quadratique.

Technologies :

question a) θ1 : Représentation des points et du cercle dans le plan cartésien, l'équation cartésienne réduite du cercle.

question b) θ2 : l'équation cartésienne réduite d'une droite.

question c) θ3 : l'équation cartésienne réduite d'une droite, l'équation cartésienne réduite du cercle et méthode de résolution d'une équation quadratique.

Théorie : Pour les trois questions, la théorie qui justifie les techniques et les technologies est l'algèbre élémentaire.

Ostensif (s) : l'ostensif équation réduite d'un cercle, l'ostensif algébrique point, l'ostensif graphique point, l'ostensif graphique cercle, l'ostensif formule de la fonction affine.

Non ostensif (s) : les règles et les lois du calcul algébrique, les notions et les représentations algébrique et graphique de point, de droite et de cercle. La notion de fonction affine et sa représentation algébrique et la notion d'équation quadratique avec une méthode de résolution.

Annexe 2 :

Type de tâche : Déterminer l'intersection de deux cercles donnés au moyen de certaines conditions et calculer la valeur numérique d'une expression algébrique.

Exemple : Deux cercles avec des rayons 1 et 2 ont des centres dans le premier quadrant du plan cartésien et les deux tangentient les deux axes de coordonnées. Ces cercles se croisent dans deux points de coordonnées distincts $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2)$. La valeur de $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$ est égale à :

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{13}{2}$

Technique:

Pour visualiser que le centre du cercle est (R; R) on peut le représenter dans le plan cartésien en considérant que celui-ci est tangent aux axes coordonnés.

Ensuite, il faut écrire l'équation cartésienne réduite du cercle et la développer. Puis, il faut substituer les valeurs des rayons donnés dans l'équation trouvée. Puisque les points d'intersection appartiennent aux deux cercles, ces deux points satisfont les deux équations. Il faut égaler les équations, pour trouver (x + y). Comme $(x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) = (x + y)$, il suffit de les remplacer dans l'expression donnée pour déterminer sa valeur numérique.

Technologie :

Représentation des points et du cercle dans le plan cartésien, l'équation cartésienne réduite du cercle et l'équation développée. L'intersection de deux cercles et la notion de valeur numérique d'une expression algébrique.

Théorie : l'algèbre élémentaire.

Ostensif (s) : l'ostensif équation réduite d'un cercle, l'ostensif algébrique point, l'ostensif graphique point, l'ostensif graphique cercle.

Non ostensif (s) : les règles et les lois du calcul algébrique, les notions et les représentations algébrique et graphique de : point, droite et cercle. La notion de fonction affine et sa représentation algébrique et la notion d'équation quadratique avec une méthode de résolution.

Mathematics and Physics Study and Research Paths within two groups of pre-service teacher education

María Rita Otero,

Viviana Carolina Llanos, Marcelo Arlego

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina

Abstract. In this paper, we present results of an inquiry based teaching implementation carried out on a teacher training course in the University. The framework of the Anthropological Theory of Didactics (ATD) is adopted, and a co-disciplinary Study and Research Path (SRP) whose generative question requires studying physics and mathematics together is carried out by N=25 training teachers of Mathematics at University. Some conclusions concerning the conditions, restrictions and relevance of introducing the RSC in teachers training courses at the university are performed.

Resumen. En este trabajo presentamos algunos resultados de una enseñanza por investigación desarrollada en un curso de formación de profesores de matemática en la Universidad. Se adopta el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y se desarrolla con N=25 profesores de Matemática en formación en la universidad un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) cuya pregunta generatriz requiere estudiar matemática física conjuntamente. Se delinean algunas conclusiones sobre las condiciones, restricciones y la relevancia de los REI en la formación de profesores en la universidad.

Résumé Dans ce travail nous présentons des résultats d'un enseignement développé dans un cours de formation d’enseignants de mathématiques à l'Université. On adopte le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) pour développer un Parcours d'Étude et Recherche (PER) avec N=25 enseignants de Mathématiques en formation à l'université. La question génératrice demande l’étude conjointe des mathématiques et de la physique. Nous faisons quelques remarques liées aux conditions, restrictions et à l'importance des PER dans la formation des enseignants à l’université.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d’enseignant*

Editorial, año

1. Introduction

The training of mathematics teachers has been the subject of numerous investigations in the field of Mathematical Education (Cirade, 2006; Chevallard & Cirade, 2009; Gómez, 2007; Llinares, Valls & Roig, 2008; Godino, 2009; Ribeiro, Carrillo & Monteiro, 2010; Font, 2011; Ruiz-Olarría, Sierra, Bosch & Gascón, 2014). These authors emphasize the importance that the training of the mathematics teacher includes knowledge that exceeds the mathematical contents that the teacher should teach. In this line, the notion of Pedagogical Content Knowledge (PCK) developed by Shulman (1987), which specifically in mathematics, originates Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), as an essential mathematical knowledge in teacher training (Ball, 2000, Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008).

According to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), that is the framework of this work, the training of mathematics teachers requires professional knowledge whose construction and development is the responsibility of the community of researchers in didactics of Mathematics, in close collaboration with the teaching profession (Chevallard & Cirade, 2009). The didactic phenomenon called monumentalism is characteristic of the paradigm of the "visit of the works" and has been described by Chevallard (2001, 2013). This paradigm focuses on the teaching of answers rather than questions, ignoring the fact that knowledge always arises as a response to a question, which if hidden, leads to the presentation of scholastic knowledge that lack motives and reasons for being. Knowledge is signalled as if it were an historical monument, which at most is seen and venerated. To overcome the monumentalism prevailing in educational systems, the ATD has proposed the Paradigm of Research and Questioning the World (Chevallard, 2013) advocating an epistemological and didactic revolution of the teaching of mathematics and school disciplines (Chevallard, 2013), where knowledge should be taught by its usefulness or potential uses in life.

However, to opt for such paradigm, it is necessary to train future teachers in a different way, to provide them with the necessary equipment to develop a teaching based on questions. It is very difficult to put into practice a teaching based on questioning and inquiry, since it requires systems of teacher training that are appropriate, and are not generally available. In this paper, we describe the results obtained in two courses of mathematics teachers in training at the university, when addressing a question that places future teachers in an investigation and questioning situation.

To learn what an SRP is, and which kind of teaching is involved in, the trainee teachers (TT) must deeply experience a genuine SRP. The starting point of the SRP is the question **Q_0: Why did the Movediza stone in Tandil fall?** Which, to be answered – in a provisional and unfinished way- needs the study of Physics and Mathematics jointly.

The rationale of the paper is to describe the trainee teachers' activities and their difficulties when they must experience an SRP and to face a strong question.

2. Questions

Which was the role of the students and the teacher during the SRP?

Which mathematical and physical contents were studied along the SRP?

Which mathematical and physical models were developed by the students during the SRP?

Which were the most relevant constraints to develop the SRP in this level?

3. Methodology

This work involves a qualitative and exploratory research that aims to carry out a research and study course as it is proposed by the ATD, in a mathematics teacher training course at the University. The SRP was implemented in a state university, in the city of Tandil, Argentina, in a discipline which is part of the didactic studies within the Mathematics Teaching Training Course, in which two of the researchers are also teachers. There were two implementations, where N=12 and N=13 students from the last year (4^{th}), aged 21-33 took part in it.

It is important to notice that these students had not studied physics before at the university, but had a relatively strong mathematical formation. In addition, the students had studied the ATD in two previous Didactics courses; however, they report difficulties to understand what an SRP is, and how it works? In this respect, we propose to design, implement and analyse a physics and mathematics co-disciplinary SRP, adapted to the institution in which it is developed.

The SRP was carried out in a total of 7 weekly hours provided in two lessons per week. In both implementations, which we will identify as I1 and I2, respectively, three work groups were organized with approximately 4 members each.

In a SRP, the generative question Q_0 has to be pointed out by the teacher, and this was made in the first lesson. Then, the students started their research in the library, by selecting some texts, documents etc. as possible $R^{\Diamond}_i$. In every class, each group presented and discussed with the teacher and the other groups their findings and possible ways to face Q_0. In the second class, many derived questions Q_i were made explicit by the students, and the community of study selected the questions Q_i to be studied as well as their related knowledge O_k. The regular dynamic during the SRP was characterized by the roles of the teacher and students described in the previous section of this text.

Recordings of each class were obtained and the student productions were digitalized and returned in the subsequent class. The teacher wrote a class diary writing down the tasks performed by the study group. The remaining researchers of the team performed non-participant observation during classes. The data analysis was performed by using the categories provided by the Developed Herbartian model (Chevallard, 2013).

4. The Epistemological model of reference (EMR) and the SRP

As we mentioned, the starting question Q_0 is: Why did the Movediza Stone in Tandil fall down? This enormous basalt stone has remained the city's landmark, providing it with a distinctive feature. Many local people and national celebrities visited the place to closely observe the natural monument. It was a 248-ton rock, sitting on the top of a 300-meter-high hill (above sea level), which presented very small oscillations when disturbed in a specific spot, (Figure 1). Unexpectedly, on February 28, 1912, the stone fell down the cliff and fractured into three pieces, filling the town with dismay by the loss of their symbol. For over 100 years, the event produced all kinds of conjectures and legends for the causes of the fall. Within the two groups where the SRP was performed, there existed a certain curiosity and interest in finding a scientific answer to this question. Once in contact with the available information, the question evolved into: What are the conjectures about the causes the Movediza Stone fall, and which is the most likely from a scientific viewpoint? Assuming that the fall can be explained by means of the Mechanical Resonance phenomenon, several questions Q_i emerged which are linked to the physical and mathematical knowledge necessary to answer Q_0.

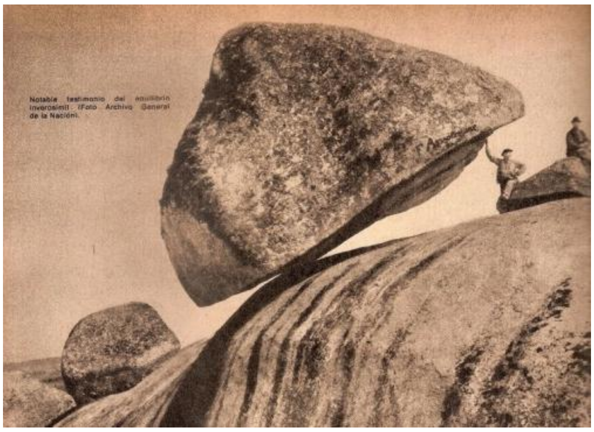


Figure 1: Photography of the Movediza Stone (Photo Archivo General de la Nación Argentin), available in: http://bibliocicop.blogspot.com.ar/2012/02/piedra-movediza-100-anos-de-su-caida.html

If we consider that the stone was an oscillating system, the study can be carried out within the Mechanic Oscillations topic, starting from the ideal spring or the pendulum. In this case, frictionless systems are used, in which the only force in action is the restoring force depending (for small amplitude oscillations) in a linear way on the deviation respect to the equilibrium position. This model is known as simple harmonic oscillator whose motion, via Newton equations, is described by a second-order linear differential equation.

Progressively, the system becomes more complex. If friction-produced damping is considered, it provides a new term to the differential equation connected to the first derivative of the position (speed). Finally, it is possible to study systems that apart from being damped, are under the influence of an external force, and therefore called driven systems. In the case that the external force is periodic and its frequency is approximately equal (the order of the approximation will be clarified later) to the natural (free of external forces) frequency of the oscillating system, a maximum in the oscillation amplitude is produced, generating the phenomenon known as mechanical resonance.

By increasing the complexity of the model, it is possible to consider a suspended rotating body, instead of a punctual mass. This leads to the study of the torque and the moment of inertia of an oscillating body. Here again, the linear system is for small amplitude oscillations and the damped and driven cases can be also considered, corresponding to the same mathematical model, but in which the parameters have a different physical interpretation.

However, as it refers to a suspended oscillating body, this is not a suitable physical model for the Movediza stone system. Since that, the base of the Stone was not flat, it is necessary to consider more precise models of the real situation. This leads to the mechanics of supported (and not hanging) oscillating rigid solids. In this case, we consider a rocker-like model in which the Movediza stone base is curved and it lies on a flat surface, where the oscillation is related to a combined translational and rotational motion (Otero et al. 2016).

The application of Newton laws to the rocker model of the stone leads to a differential equation where the parameters are specific of the Movediza system: mass, geometry, inertia moments, friction at the base, external torque, etc., which is given by the following *effective* Harmonic oscillator mathematical model of the Movediza physical system:

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + w_0^2\varphi = (M_0 / I)\cos(wt) \qquad (1)$$

The stationary solution to equation (1) is

$$\varphi(t) = \varphi_M \cos(wt - \psi)$$

being the amplitude φ_M and the phase ψ

$$\varphi_M = \frac{M_0/I}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\gamma^2}} \qquad \psi = tg^{-1}\left(\frac{\gamma w}{w_0^2 - w^2}\right) \qquad (2)$$

The maximum of φ_M is for $w_m = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$. The parameters: M_0 (external torque), I (inertia moment), w_0 (natural oscillation system frequency) and γ (damping coefficient), must be estimated. Detailed data about the shape, dimensions and center of mass position of the Movediza stone are available (Peralta et al. 2008) after a replica construction and its relocation in 2007 on the original place (although fixed to the surface and without possibility to oscillate). These data bring us the possibility to estimate some parameters in our model, as e.g. mass, inertia moment, and the distance of 7.1 m, from which the external torque could be exerted efficiently by up to five people (according to historical chronicles) to start the small oscillation. By using these values, it is possible to study the behaviour of the $\varphi_M(w)$ function for w_0 in a range of frequencies between 0,7 Hz and 1 Hz, historically recognized (Rojas, 1912) as the natural oscillation frequencies in the Movediza stone system and calculate for each case the maximum amplitude $\varphi_M(w_m)$.

The Stone would fall if $\varphi_c \leq \varphi_M(w_m)$, being $\varphi_M(w_m) = M_0 / w_0 I\gamma$. Note that if γ is very small (as is expected to be in this case) we can neglect it from $w_m = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$,leading to $w_m \approx w_0$, which is the approximation that we mentioned in the previous section and we will use hereafter. By using this approximation in equation (2) (left) the falling condition becomes $\varphi_c \leq (M_0 / w_0 I\gamma)$.

The value of φ_c can be determined by an elementary stability analysis, which per the dimensions of the base of the stone and the center of mass position is estimated to be approximately of 6.

Note that in the present model γ is a free parameter, for which we set "ad doc" a magnitude order $\gamma \geq 10^{-2}$. This is justified in the frame of a more sophisticated model that we will comment briefly below. With this constraint, we find several situations, comprising different torques within the mentioned frequencies interval, supporting the overcoming of the critical angle, i.e., predicting the fall.

Finally, in search of a more appropriate approximation of the physics model for the damping that is clearly not due to air, we consider a more sophisticated model of the stone as a deformable solid, where the contact in the support is not a point but a finite extension, along which the normal force is distributed, being larger in the motion direction and generating a rolling resistance, manifested through a torque contrary to the motion. The rolling resistance depends on the speed stone, giving a physical interpretation to the damping term. Therefore, the physics behind the damping is the same that makes a tire wheel rolling horizontally on the road come to a stop, but in the case of the stone, the deformation is much smaller. Although the deformable rocker model has extra free parameters, tabulated values of rolling resistance coefficient for stone on stone, which are available in the specialized literature, allowed us to estimate and justify the damping values that we incorporate otherwise ad-hoc in the rigid rocket Movediza model.

5. Conclusions

Which was the role of the students and the teacher during the SRP? Independently of the difficulties presented, as mentioned before, the TTs experienced a genuine SRP within its means. However, at the beginning there was a visible initial reluctant attitude on the part of the TTs: Why physics should be studied if we are teachers of mathematics? Later, it was gradually understood that the idea was to experience a genuinely co-disciplinary SRP, analyse it and comprehend the teaching model supporting an SRP. In an SRP, the students and the teacher integrate the study community facing together situations of study and research. In both implementations, the TT's studied physics and mathematics thoroughly and showed a good disposition to deal with questions they had never considered before. It is important to highlight the role of the teacher in the SRP. For the teacher, the question Q_0 was also an open question, for which, especially in the first implementation, did not have any a priori closed answer. In this sense both, the students and the teacher took a genuinely active part in the SRP.

Which mathematical and physical contents were studied along the SRP?

In both groups, interdisciplinary education is alien to the students, due in part to the imperative of traditional pedagogy. In this sense, the SRP device is very appropriate to foster interdisciplinary study, because it allows studying only the necessary mathematics or physics to answer a question, returning to the original problem. However, it is not only important to decide what content to study, but how to use them, and so the physical and mathematical models and their rationale emerge.

In this work, the question Q_0 triggers, on the side of the physics, the study of oscillating systems, which leads to the study of resonance, motivated by the most plausible conjecture about the fall of the stone. In turn, this physics calls for the study of the equations of motion of these systems, which through Newton's laws give rise to second order differential equations.

Which mathematical and physical models were developed by the students during the SRP?

The construction of a possible answer to the question Q_0, driven the study and the analysis of several physical models related to oscillating systems like springs, single pendulum and physical pendulum, including damped and driven oscillators. However, none of these physical models are adequate to the stone. By reanalysing the real system in more detail, students realized that previous models do not describe some essential aspects of the stone, the most important being the fact that the real system is an object supported on a surface and that is not hanging, like the previous physical models. Then, in the search for a reason to make a supported physical stone model oscillate, the hypothesis that the contact surface between the stone and the base is not flat, but some of the two or both have a certain curvature, emerge, something that in fact had some historical evidence. In this way, the physical model of the rocker arises as the most appropriate to describe the oscillations of a supported object.

Although the students understood that the physical model of the rocker is able to oscillate and could somehow describe the oscillations of the stone, the dynamic analysis of its motion is not within reach of the students, so the mathematical model of the rocker was introduced by the teacher. At this point the students recognized the mathematical similarity with the equations of motion of the pendulum, although the physics is completely different.

Here, it is important to notice that the most relevant obstacles there were not only in the physics knowledge, insofar as the physical model was sophisticated and the physical knowledge necessary to treat it was expanded, but in the difficulties of the TT’s to use functional modelling involved in the solution of the differential equations. We can say that some aspects of the modelling processes in the sense of the ATD (Barquero, Bosch and Gascón, 2011), were accomplished, and because the SRP evidence the inadequate of the available already made answers to treat the motion of the stone, and the increasing complexity proposed by the SRP.

Which are the most relevant constraints to develop the SRP in this level?

Even though the TTs had studied the ATD and other didactic theories, they did it in a traditional way comparable to the traditional training they got. This is reflected in the difficulties they had to understand and to use both physical and mathematical models. It was not expected that the TTs developed the models by themselves, but it was expected that they used the mathematical results presented in the physics textbooks in a pertinent and exoteric manner. This fact did not occur in the first group and improved in the second one from the didactic decision to make a previous incursion into mono-disciplinary SRP, particularly suitable for evidencing the role of the functional modelling. Moreover, this allowed teachers to discuss the relationship between the mathematical model and the physical model and the meaning and role of the parameters.

The TT’s behaviour is interpreted from the fact that although they have experienced four years of “hard” university studies, the utility of the science they aim at teaching had never been visible. The epistemological conception about the mathematics produced by the traditional paradigm is so ingrained, that it is complex to reverse it. This would be, in our view, the most relevant drawback to permit the TT’s at least understand what an SRP is and how the modelling activity works. However, it is important to notice that the sporadic incursions in the modelling activity do not seem enough to allow the TTs to develop such school practices. Although the predominant teaching is mainly traditional, the TTs will face increasing demands for a change to a mathematics teaching based on research, questioning and modeling. It is unlikely that a teacher whose training has been answers-based teaching can teach by means of questions. Therefore, our final message is that the training of teachers must change profoundly.

Références

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51 (3)*, pp. 241-247.

Ball, D. L.; Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: Richardson, V. *Handbook of Research on Teaching*. Washington, DC: American Educational Research Association, pp. 433- 456.

Barquero, B.; Bosch, M.; Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, Revista de investigación y experiencias didácticas, 29 (3*), pp. 339-352.

Cirade, G. (2006) Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel. 453 f. Tesis (Doctorat en Didactique des Mathématiques) – École doctorale de mathématiques et informatique de Marseille. Université de Provence.

Chevallard, Y.; Cirade, G. (2009) Pour une formation professionnelle d'université: éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation*, 60, p. 51-62.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, XVI Jornadas del SI-IDM, Huesca. Organizadas por el grupo DMDC del SEIEM. Obtained in http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm. Accessed 20 July 2016.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2 (2),* 161-182.

Font, V. (2011) Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, San Cristóbal de La Laguna,* 26, p. 9-25.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. PhD Thesis. Universidad de Granada.

Hill, H. C. Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 4, p. 372-400.

Llinares, S.; Valls, G. & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática, 20 (3),* 31-54.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Gazzola, M., Arlego, M. (2016) Co-disciplinary Physics and Mathematics Research and Study Course (RSC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers. *Science, Mathematics and ICT Education*, 10 *(2)* 55-78. Patras, Greece.

Peralta, M. H.; Ercoli, N. L.; Godoy, M. L.; Rivas, I.; Montanaro, M. I. & Bacchiarello, R. (2008). Proyecto estructural de la réplica de la piedra movediza: comportamiento estático y dinámico. *XX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*.

Ribeiro, M., Monteiro, R., Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática, 22 (2),* 123- 138.

Rojas, R. (1912). La Piedra muerta. Martín García, Editor, Buenos Aires, Argentina.

Ruiz Olarría, A.; Sierra, T. Á.; Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática-Mathematics Education Bulletin*, 28 (48). pp. 319-340.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. Harvard Educational Review, 57 (1), pp. 1-22.

Une proposition pour l’analyse de manuels

Marilena Bittar
Université Fédérale du Mato Grosso do Sul, PPGEdumat, Campo Grande - MS
Brésil

Résumé
Dans les dernières années l’importance des manuels scolaires est mise en évidence dans différents pays, débouchant sur la création, en 2015, de l’International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT). Dans ce texte, je présente une proposition pour l’analyse de manuels, constituée des étapes suivantes, non linéaires : choix des manuels ; séparation des parties cours et parties activités proposées ; élaboration/modélisation des praxéologies mathématiques ; élaboration/modélisation des praxéologies didactiques ; croisement des donnés.

Abstract
In recent years, the importance of textbooks has been highlighted in various countries, leading to the creation in 2015 of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT). In this text, I present a proposal for the analysis of textbooks, consisting of the following non-linear steps: the choice of the textbooks to be analyzed; a separation of the course and proposed activities sections; the modelling of mathematical praxeology; the modelling of didactical praxeology and the cross-checking the data.

Resumen
En los últimos años, se ha destacado la importancia de los libros de texto en varios países, lo que condujo a la creación en 2015 de la Conferencia Internacional sobre Investigación y Desarrollo de Libros de Texto de Matemáticas (ICMT). En este texto, presento una propuesta para el análisis de libros de texto, que consta de los siguientes pasos no lineales: la elección de los libros de texto a analizar; una separación entre las secciones curso y actividades propuestas; el modelado de la praxeología matemática; el modelado de la praxeología didáctica y el cruzamiento de los datos.

1. Introduction

Depuis environ dix ans je mène des recherches au sein du DDMat1 sur les choix mathématiques et didactiques des auteurs de manuels brésiliens destinés à des élèves de l´école publique de l’enseignement obligatoire (6 à 17 ans). Pour cela, le principal outil théorique et méthodologique utilisé est la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1998), qui nous permet de mieux décrire et comprendre les choix mathématiques et didactiques des auteurs des manuels. L’analyse des manuels nous permet, d’une part, d’avoir accès à la praxéologie dominante dans cet institution et, d’autre part, d’approcher de la réalité de la classe, deux aspects importants de à connaître si l’on veut changer le rapport du sujet à un savoir en jeu. Ceci dans le cas où la praxéologie dominante n’est pas conforme à la praxéologie épistémologique de référence. De plus, l’accès à la praxéologie dominante donne des éléments pour comprendre des possibles difficultés d’apprentissage des élèves.

[1] Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques, dirigé par l’auteur de ce texte.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

Les raisons pour faire une analyse de manuels peuvent être diverses et dépendent des objectifs de la recherche. De même la méthode d'analyse dépend, elle aussi, des questions de recherche. Ainsi, j'ai choisi trois recherches[2] dirigées par moi au Brésil pour, présenter et illustrer la méthode d'analyse proposée.

La question de recherche de Rosane Nogueira (2008) est née après avoir constaté l'échec d'une grande partie de 2400 élèves de classes de troisième (13-14 ans) des écoles d'une ville au Brésil, ayant participé à une recherche sur les équations du premier degré (Nicaud at al, 2006). Ainsi, R. Nogueira voulait étudier l'origine des difficultés des élèves au début de l'étude de l'algèbre élémentaire. Pour cela, il n'y a pas seulement une entrée ; on pourrait penser à une étude cognitive ou à une étude épistémologique. Ou encore on pouvait chercher au plus près de l'institution pour comprendre l'algèbre qui est proposée aux élèves. Ce qui a conduit Nogueira à modéliser la praxéologie dominante en classe de quatrième autour des premiers concepts d'algèbre à travers l'analyse des manuels.

La question de recherche d'Adriana Oliveira (2010) a eu pour origine son mémoire de licence, où elle a étudié la pratique professionnelle de trois enseignants débutants sur le thème des fonctions, en lien avec le concept vu pendant la formation initiale. Pour cela l'auteur a utilisé la théorie de la base de connaissances développée par Lee Shulman, (1986, 2001). A la fin de cette étude A. Oliveira s'est rendue compte que pour mieux comprendre sa question il lui fallait un outil théorique et méthodologique pour analyser les savoirs mis en place par l'enseignant et étudier les rapports entre ceux-ci et ceux qu'il a vu pendant sa formation initiale autour du concept de fonction. C'est à ce moment que l'analyse du manuel adopté par l'enseignant s'est montrée incontournable : il lui fallait vérifier ce qui était proposé dans le manuel pour identifier les changements faits par l'enseignant pour, ensuite, chercher à comprendre les raisons de ses changements.

Contrairement aux deux exemples précédents, la question de recherche de Danielly Kaspary (2014) est née déjà imbriquée à son objet d'étude : le manuel. Ce qui l'intéressait était de comprendre comment un certain savoir apparait et se développe au cours de quelques années dans les manuels, plus particulièrement les opérations d'addition et soustraction à l'école primaire.

On voit, ainsi, que l'analyse de manuels prend des fonctions différentes au sein de la recherche, selon la question à laquelle le chercheur veut répondre. Il faut, pourtant, observer que les questions auxquelles nous cherchons à répondre, dans ces différentes recherches, ont un point en commun : l'activité mathématique. Voilà la pertinence de l'usage de la TAD puisque l'étude de l'activité mathématique est l'une de ses sensibilités (Artigue, 2011).

Avant de passer à la proposition pour l'analyse des manuels, je présente très rapidement le Programa National do Livro Didático (PNLD), car il s'agit d'un contexte brésilien très important et qui sera cité dans les exemples.

Programa National do Livro Didatico (PNLD)

Le Ministère de l'Éducation brésilien a mis en place, depuis plus de 20 ans, un programme d'évaluation des manuels pouvant être acquis par les établissements publiques, dès l'école primaire jusqu'au lycée : il s'agit du Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Cette évaluation a comme objectif de fournir, aux élèves, des manuels scolaires répondant à certains critères de qualité, tels que l'absence dans les manuels d'erreurs conceptuelles et/ou de préjugés. Pour cela, le Ministère a fait un appel aux maisons d'éditions pour la soumission de manuels ainsi qu'à des universités pour la coordination du processus

[2] Il s'agit de recherches de master, qui, au Brésil, ont une durée de deux ans et sont faites après la licence qui a une durée d'environ de 4 ans.

d'évaluation. Il s'agit d'un processus long, mené par une grande équipe où chaque collection est examinée, de façon aveugle, par deux évaluateurs, qui doivent fournir un rapport à l'équipe responsable de l'évaluation. Après cette phase, la coordination du processus doit produire un guide qui servira d'aide à l'enseignant au moment de réaliser son choix de manuel. Ce guide contient, entre autres, des synthèses de l'évaluation de chaque collection approuvée dans le processus, ainsi que la fiche d'évaluation utilisée par les examinateurs. Le processus d'évaluation des manuels se répète tous les trois ans.

2. Des étapes pour analyser des manuels

2.1. Les choix des manuels

Lorsque la question de recherche a amené à l'analyse de manuels, deux variables, au moins, doivent être prises en compte au moment du choix des manuels : l'objectif de la recherche et le temps disponible pour la réaliser, quand il s'agit d'un master ou un doctorat.

Pour caractériser la praxéologie dominante relative à l'algèbre en classe de quatrième, R. Nogueira (2008) voulait, au départ, analyser tous les manuels approuvés pour l'achat par les écoles publiques à l'époque. Mais ceci n'était pas faisable dans le temps disponible (deux ans), car cette année il y a eu 16 collections approuvées au PNLD 2008. En revanche, le contenu mathématique analysé était réduit, ce qui rendait possible d'analyser plusieurs manuels. Se pose alors la question du choix. D'après le guide du PNLD 2008, il y a eu, cette année-là, six types d'approches entre les 16 collections. Alors R. Nogueira a choisi deux collections parmi celles les plus représentées et une qui différait de toutes les autres, par sa proposition pédagogique et qui était écrite par un chercheur en éducation mathématique. Avec ce choix Nogueira allait pouvoir avoir un portrait très proche de ce qui se passait en classe non seulement au niveau mathématique mais aussi didactique.

Pour étudier les liens entre l'objet *fonction* vu en formation initiale et celui enseigné en classe de troisième A. Oliveira (2010) a dû analyser le manuel adopté par l'enseignant et suivre son cours pour identifier et analyser des changements entre ce qui était à enseigner (présent dans le manuel) et ce qui a était enseigné (mis en place dans le cours)[3]. Il ne s'agissait pas, alors, d'aller voir d'autres manuels car son intérêt était centré sur la pratique d'un enseignant en particulier.

D. Kaspary (2014) voulait étudier l'évolution d'une praxéologie dominante tout au long de l'école primaire et pour cela elle a choisi le champ additif. Comme l'école primaire se déroule en cinq années, il s'agissait alors d'analyser cinq volumes, ce qui rendait impossible d'analyser plus d'une collection en raison de la variable *temps pour la recherche*. Ainsi, D. Kaspary a choisi la collection la plus vendue au PNLD 2013 et de plus il s'agit d'une collection présente dans le paysage des écoles publiques depuis plus de 20 ans, étant toujours approuvée par l'évaluation faite par le PNLD.

2.2. Séparation entre parties cours et parties activités proposées

Le *cours* comprend les définitions, propriétés, exercices résolus, ainsi que les informations fournies dans des petits encadrés, enfin tout ce qui n'est pas *activité proposée*. Un manuel a plusieurs parties *cours* et plusieurs parties *activités proposées* et cela change d'un manuel à un autre par rapport aux choix de présentation de l'auteur et au niveau scolaire. On démarre l'analyse par les parties cours en cherchant à

[3] Il n'était pas objectif de sa recherche étudier l'écart entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné.

identifier les tâches que l'institution veut que l'élève sache résoudre ainsi que les techniques attendues pour les résoudre. En plus, est dans la partie cours que le bloc technologico-théorique peut être rencontré.

Je prends un exemple issu de la recherche de R. Nogueira (2008) à propos d'une façon de résoudre l'équation 3x = 2x + 100 + 50 (figure 1). La technique proposée est justifiée par analogie avec une balance en équilibre, sans une discussion (ni même dans le manuel de l'enseignant) sur la portée de cette analogie.

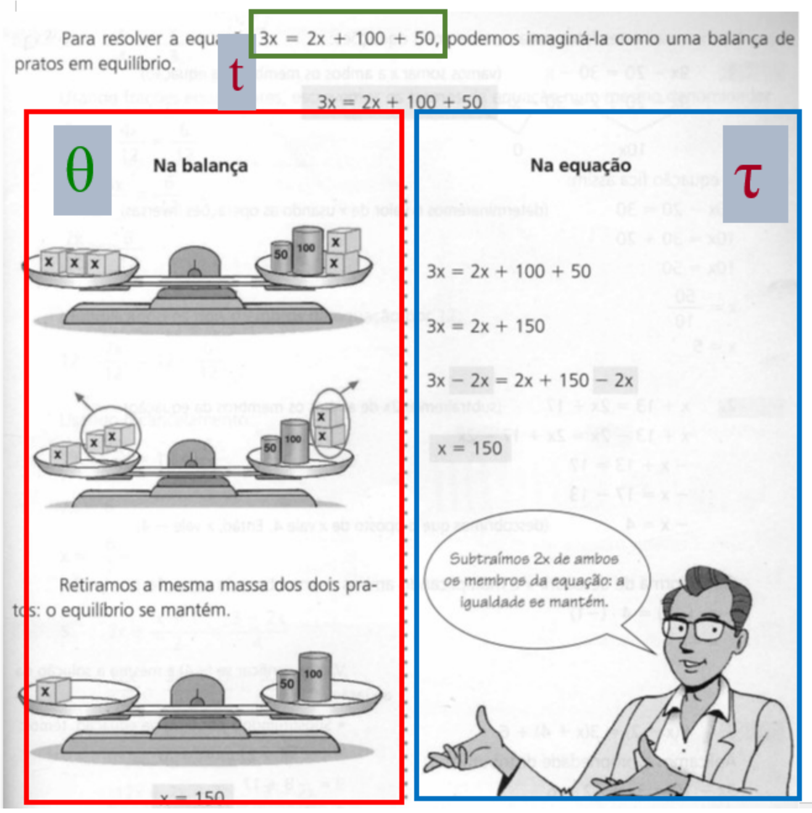


Figure 1. Résoudre une équation du 1er degré du type ax+b=cx+d (Nogueira, 2008, p.85

La tâche est donnée dans la première ligne de l'activité – résoudre l'équation 3x = 2x + 100 + 50 – suivie par l'idée à mobiliser, « l'analogie avec une balance en équilibre ». En dessous, à droite, il y a la technique qui est justifiée, à gauche, par la balance en équilibre (technologie). Cette tâche peut être rattaché au type de tâche T: Résoudre l'équation du premier degré du type ax+b=cx+d.

Dans le manuel analysé par A. Oliveira (2010) le cours sur les fonctions démarre, sur la toute première page dédiée à ce thème, avec une activité résolue (figure 2). Il y a un carré ACBD, dont le coté mesure 8 cm, deux points M et N, sur les côtés [BC] et [AD], respectivement, de sorte que AN = BM = x. Le rectangle ANMB se déforme et son aire change en fonction de x.

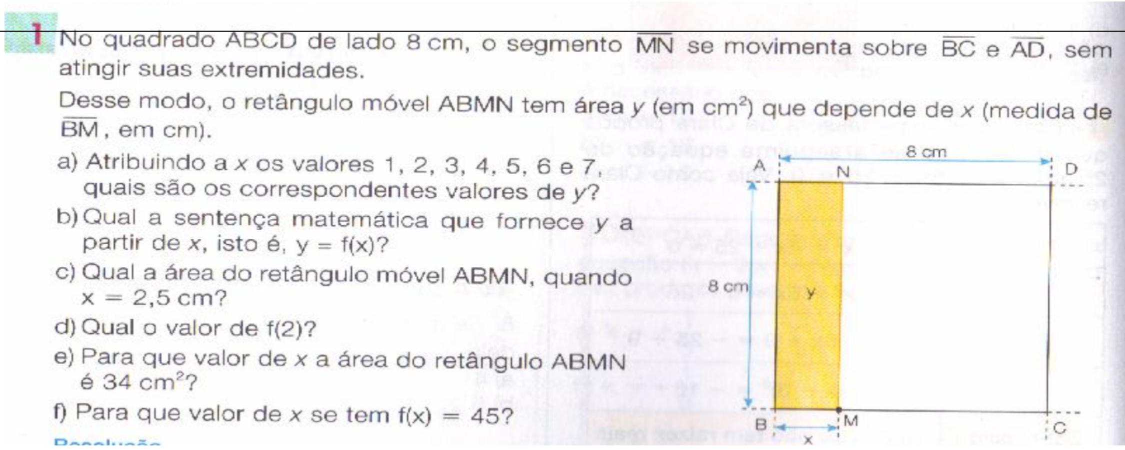


Figure 2 : Première rencontre avec l'idée de fonction (Oliveira, 2010, p.69)

L'item (a) demande d'attribuer des valeurs entières à x et retrouver y ; dans (b) il faut trouver y = f(x). D'après la résolution présentée dans le manuel, la technique pour (a) amène à trouver une réponse pour (b), et Oliveira (2010) l'a décrite comme suit : Calculer la valeur de y pour différentes valeurs de x, construire un tableau en mettant en relation les deux grandeurs et généraliser les données.

Au début de l'école primaire il n'y a pas vraiment une distinction entre *cours* et *activités proposées*, ce qui est normal et souhaitable. Prenons l'exemple de la recherche de D. Kaspary (2014) sur le champ additif. En première approche il ne s'agit pas de présenter les algorithmes, au contraire ; il s'agit de proposer des situations a partir desquelles les élèves vont, petit à petit, construire leur connaissance. Prenons un exemple extrait de D. Kaspary (2014, p. 55) :

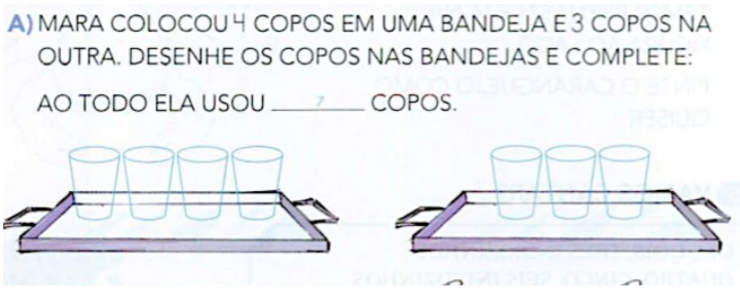


Figure 3 : composition de mesures

L'énoncé – *Maria a mis 4 verres sur un plateau et 3 verres dans l'autre. Dessine les verres dans les plateaux et complète : au total elle a utilisé____verres* – est fourni par deux ostensifs, langue naturelle et schéma, et pour résoudre cette tâche l'élève doit dessiner les verres et dire combien il y en a au total. Pour ce faire la technique sera le comptage des verres de un en un.

Les activités proposées peuvent être des exercices d'application immédiate d'une technique, ou non. Chaque activité est analysée en cherchant à identifier la tâche (pour l'élève) et la technique attendue. Pour cela on cherche des pistes dans la partie cours. Mais on peut aussi se faire aider par le manuel de l'enseignant – complément pédagogique obligatoire pour les manuels brésiliens –, qui peut contenir les résolutions de certaines activités ainsi que des commentaires d'aide à l'enseignant. Deux éléments importants à considérer lors de l'analyse des activités proposées sont : la quantité de chaque type de tâches modélisée et l'absence (resp. l'apparition) de tâche (resp. non) identifiée dans la partie cours. Des exemples seront données plus loin dans le texte.

2.3. Elaboration de l'organisation mathématique

La modélisation[4] de l'organisation mathématique débute dans la partie *cours* et continue dans la partie *activités proposées*. Les types de tâches et les techniques correspondantes pour les résoudre, rencontrées dans le *cours* servent de grille pour les activités à résoudre. Mais cela ne veut pas dire que d'autres types de tâche ne peuvent pas apparaitre pour la première fois comme une activité pour l'élève.

Une forme de modélisation de la praxéologie dominante est de commencer par une praxéologie *a priori* qui servirait de grille d'analyse pour le(s) manuel(s) et qui pourrait être enrichie avec celle-ci. Mais pour cela il avoir un peu plus de temps que 2 ans (temps du master) ou satisfaire a d'autres conditions, comme cela a été le cas de D. Kaspary (2014). Cette auteure a construit une telle praxéologie, à l'aide des situations du champ additif développées par Gérard Vergnaud (1990). D. Kaspary a, tout d'abord, fait une relecture des situations décrites dans la théorie des champs conceptuels (TCC) afin de construire une praxéologie *a priori*, constituée de types de tâches modélisés. Il s'agit, ainsi, de types de tâches a priori qui fonctionnent aussi comme une grille pour l'analyse mais qui va au-delà de cela. Tous les types de tâches *a priori* ne seront pas forcément rencontrés dans les manuels. De plus, d'autres (types de) tâches peuvent vivre dans l'institution, comme D. Kaspary a pu le constater lors de son analyse. Par exemple, la tâche « Calculer 25+13 » ne fait pas partie des catégories de situations de la TCC mais elle est présente à l'école élémentaire. Alors, une fois réalisé l'analyse des 5 volumes de la collection, l'auteur a modélisé la praxéologie dominante enrichissant la praxéologie *a priori* des tâches (et techniques absentes) et aussi en supprimant celles qui ne sont pas rencontrées dans les manuels. Une praxéologie *a priori* fonctionne pour l'analyse selon la théorie anthropologique du didactique, comme une analyse *a priori* pour la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986).

Le bloc technologique-théorique est relatif à des institutions bien définies ; ce que l'on peut attendre comme justification mathématique à un niveau scolaire peut ne pas être accepté à un autre niveau. Ainsi, on peut observer dans la figure 1, de l'extrait de la recherche de R. Nogueira (2008), que l'analogie avec une balance en équilibre va servir pour aider à construire la justification pour une propriété mathématique. A ce niveau de la scolarité cette forme de justification est acceptée, même si elle a des limites, au moins au moment de démarrer l'étude.

Dans le cas de l'étude de fonctions, dans le manuel analysé par A. Oliveira (2010), les techniques utilisées lors des premières activités résolues (comme celle de la figure 2) s'appuient sur la résolution des équations du premier degré. Cet exemple nous permet de voir que les éléments du quadruplet [T, τ, θ, Θ] peuvent changer de position.

Pour terminer cette partie, nous examinons un exemple apparemment plus informel. La justification de l'algorithme de l'addition s'appuie sur les propriétés du système de numération et, en CE2, cette explication est donnée dans des bulles simulant une conversation entre élèves (figure 4), ce qui révèle un choix didactique de l'auteur du manuel.

[4] J'utilise aussi le mot modélisation car il s'agit d'une élaboration faite par le chercheur qui vas dépendre de celui-ci, de l'institution, de l'objectif de la recherche et de tant d'autres variables. Ainsi, comme les mots ont sa propre force, j'utilise modélisation pour être plus fidèle au travail du chercheur.

Figure 4 : identification du bloc technologique-théorique (Kaspary, 2014, p.107)

2.4. Elaboration de l'organisation didactique

Pour répondre à la question « Comment enseigner cette œuvre ? » la praxéologie didactique peut être modélisée à partir des 6 moments d'études (Chevallard, 1998) : première rencontre avec l'organisation O enjeu d'étude ; exploration du type de tâches Ti et de l'élaboration d'une technique τi ; constitution de l'environnement technologique-théorique [θ/Θ] relatif à τi ; travail de la technique ; institutionnalisation ; évaluation. L'analyse de ces moments permettra, entre autres, d'identifier l'approche didactique proposée par les auteurs des manuels, comme l'a montré D. Kaspary (2014). Après avoir identifié les moments d'étude tout au long des 5 volumes analysés, D. Kaspary, inspiré du modèle proposé par Gascon, a construit un graphe de dispersion avec les données (figure 5), ce que lui a permis d'identifier l'option méthodologique de l'auteur de la collection.

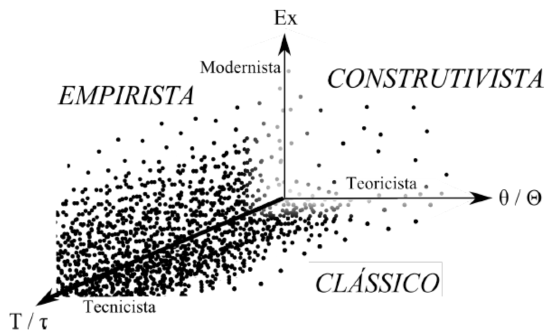


Figure 5 : graphe de dispersion des moments d'études (Kaspary, 2014, p. 136)

L'observation du graphe permet de conclure que le choix pédagogique de l'auteur du manuel retombe surtout sur une approche plutôt techniciste, mais il y a aussi des moments avec des caractéristiques plus exploratoires ou classiques. Ceci peut être dû à une attente de la noosphère, à un désir de l'auteur, ou d'autres facteurs. Ensuite, une des questions du chercheur est de comprendre les raisons des choix fait par le(s) auteur(s) du manuel.

Compte tenu de la caractéristique de sa question de recherche A. Oliveira (2010) n'a pas fait une étude systématique de l'organisation didactique dans le manuel, comme l'a fait D. Kaspary, mais elle a identifié les choix des auteurs pour les comparer avec ceux de l'enseignant. Elle a identifié que, comme dans le manuel, l'enseignant a commencé l'étude de fonction (première rencontre avec la praxéologie) par un exemple, mais il n'a pas utilisé celui du manuel ; il a produit une situation semblable, mais avec un contexte plus proche de la réalité de ses étudiants.

L'analyse didactique des manuels choisis par R. Nogueira (2008) lui a permis de confirmer son hypothèse lors du choix des manuels : un manuel a une tendance plus techniciste, l'autre présente le cours entremêlé par des dialogues avec les étudiantes et le troisième a une tendance plutôt constructiviste.

2.5. Croisement de données

Après avoir modélisé des praxéologies (mathématiques et didactiques), il faut procéder au croisement des données pour chercher des éléments de réponses aux questions de recherches.

R. Nogueira (2008) a identifié trois praxéologies mathématiques autour de résolution d'une équation du premier degré de type ax+b=cx+d, à savoir : $\tau1$ - opérations inverses (utilisation de techniques arithmétiques) ; $\tau2$ - algébrique (analogie avec la balance en équilibre) ; $\tau3$ - transposition (rhétorique de $\tau2$). L'objectif de l'enseignement est d'arriver à [T , $\tau3$], mais les auteurs peuvent, et font, différents choix pour y arriver. Nogueira a constaté une évolution des praxéologies dans les collections, de [T , $\tau1$] vers [T , $\tau2$] et, finalement, vers [T , $\tau3$], mais cette évolution n'est pas toujours équilibrée. Une des collections analysées aborde à peine la dernière praxéologie, ce qui montre un choix de le faire l'année suivante. Une autre collection ne travaille pas le passage de l'arithmétique à l'algèbre car la praxéologie [T , $\tau1$], qui favorise ce passage, n'y est pas présente.

Lors du croisement des données l'analyse quantitative est très importante car permet de mieux comprendre la place accordée à une praxéologie. Par exemple, le tableau suivant montre qu'il y a deux types de tâches largement privilégiés par rapport à quatre autres travaillé dans un même volume d'une collection.

	$T1_1$	**$T1_2$**	**$T2_2$**	**$T2_3$**	**$T3_1$**	**$T3_2$**	**Total**
Total	21	5	18	2	2	2	50

Tableau 1 : comptage de types de tâches, volume 1 (Kaspary, 2010, p.65)

Alors, le chercheur doit analyser ces données pour en conclure sur les choix d'auteur et les retombées de ce choix sur l'apprentissage de l'élève.

3. En guise de conclusion

Le modèle d'analyse esquissé dans ce texte est en construction ; il y a des éléments cruciaux qui n'ont pas été discutés mais qui font partie des préoccupations lorsqu'on essaye de modéliser une praxéologie mathématique, comme les ostensifs. Ce point est à approfondir dans le modèle : comment prendre en compte les ostensifs dans la méthode, c'est-à-dire, comment les intégrer dans les praxéologies ? Le modèle T4TEL développé par Hamid Chaachoua semble apporter des réponses.

De plus, les analyses des manuels déjà menées ont permis de mettre en évidence certains points qui peuvent apparaître dans l'analyse et qui sont des résultats importants pour comprendre la praxéologie dominante. Par la suite j'en cite deux.

Parfois le bloc technologique-théorique « mathématique », ne peut pas vivre dans l'institution car il n'y a pas les conditions écologiques. Prenons l'exemple de la recherche de Kleber Gonçalves (2016) sur les nombres relatifs au collège. Pour justifier les propriétés des signes autour de la multiplication les

~~auteurs des manuels qu'il a analysés font des choix didactiques tels que l'utilisation de concepts~~ de température ou du niveau de l'eau de la mer parmi d'autres. Ainsi, il y a bien un bloc technologique-théorique, mais qui n'est pas celui qui est à l'origine de ces propriétés. Il s'agit de créations didactiques (Chevallard, 1991).

Il peut exister des praxéologies de vie très courte, ce qui conduit à réfléchir sur les causes possibles de leur présence et de leur disparition rapide. Deux explications peuvent être avancées : faire vivre une autre praxéologie (la praxéologie envisagée) et répondre aux demandes de la noosphère.

L'analyse de manuels est un champ de recherche que se développe de plus en plus et depuis 2015 a été créé l'International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT). Alors il y a du pain sur la planche…

Références

Artigue M. (2011) *La théorie anthropologique du didactique : rapports et articulations possibles avec d'autres approches.* In A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage (Eds.), Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs comme outils de connaissance et d'action. Actes du Second Congrès de la Théorie Anthropologique du Didactique, Uzès, octobre 2007, IUFM de Montpellier

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (1998) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble: La pensée Sauvage.

Gonçalves, K. R. (2016). *A teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Kaspary, D. (2014). *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

Nicaud, J-F. ; Bittar, M ; Chaachoua, H ; Inamdar, P. ; Maffel, L.(2006) . *Experiments of Aplusix in Four Countries*. The International Journal for Technology in Mathematics Education, v. 13, p. 15-30.

Nogueira. R. C. S. (2008). *A Álgebra nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: uma análise praxeológica*. Dissertação de Mestrado em Educação. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Oliveira, A. B. de. (2010). *Prática pedagógica e conhecimentos específicos: um estudo com um professor de matemática em início de docência*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*, Educational Researcher.

Shulman, L. (2001) *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. Harvard Educational Review. Tradução: Alberto Ide. 57(1), 163-196.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie de champs conceptuels*. Recherches en Didactique de Mathématiques, 10(2.3), 133-170.

Tensions entre projet didactique et injonctions pédagogiques : analyses praxéologiques en Éducation au développement durable

Caroline Ladage & Cécile Redondo
ADEF EA4671, Aix-Marseille Université, France

Résumé. L'intégration dans les programmes scolaires français d'enseignements visant une éducation au développement durable (ÉDD) à tous les niveaux et dans toutes les disciplines constitue un défi important pour le système scolaire. Cette intégration est en effet officiellement associée à une double injonction de mise en question des didactiques disciplinaires traditionnelles et de renouveau pédagogique. Les projets didactiques et les modes pédagogiques qui ont émergé depuis maintenant dix ans dans le cadre d'une telle ÉDD engendrent des difficultés aussi bien didactiques que pédagogiques auxquelles les enseignants doivent faire face. De telles difficultés sont une source de tensions entre ces deux niveaux de l'échelle des niveaux de codétermination didactique. On constate en particulier que, sous la pression d'injonctions pédagogiques fortes, le didactique tend à s'effacer derrière le pédagogique.
Notre recherche met au jour cette tension entre projet didactique et injonctions pédagogiques par l'analyse praxéologique d'un corpus de 501 exposés présentant des situations d'éducation au développement durable. L'étude des organisations didactiques, des techniques pédagogiques et de leurs discours justificatifs met en évidence une focalisation significative sur le niveau de la pédagogie en même temps que la faiblesse du questionnement du niveau proprement didactique.

Abstract. The integration into French school curricula of education for sustainable development (ESD) at all levels and in all disciplines, is a major challenge for the school system. This integration is officially associated with a dual injunction questioning traditional disciplinary didactics and pedagogical renewal. The didactic projects and pedagogical modes that have emerged for the last ten years in the context of such an ESD create both didactic and pedagogical difficulties that teachers must face. Such difficulties are a source of tension between these two levels of didactic co-determination. We note that, under the pressure of strong pedagogical injunctions, didactics tends to fade behind pedagogical issues. Our research brings to light this tension between didactic project and pedagogical injunctions by the praxeological analysis of a corpus of 501 presentations related to ESD. The study of didactic organizations, pedagogical techniques and their justifying discourses highlights a significant focus on the level of pedagogy as well as the weakness of the questioning of the strictly didactic level.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Introduction

L'intégration dans les programmes scolaires français d'enseignements visant une éducation au développement durable (ÉDD) à tous les niveaux et dans toutes les disciplines constitue un défi important pour le système scolaire. Cette intégration est en effet officiellement associée à une double injonction de mise en question des didactiques disciplinaires traditionnelles et de renouveau pédagogique. Les projets didactiques et les modes pédagogiques qui ont émergé depuis maintenant dix ans dans le cadre d'une telle ÉDD engendrent des difficultés aussi bien didactiques que pédagogiques auxquelles les enseignants doivent faire face. De telles difficultés sont une source de tensions entre ces deux niveaux. On constate en particulier que, sous la pression d'injonctions pédagogiques fortes, le didactique tend à s'effacer derrière le pédagogique.

Notre recherche met au jour cette tension entre projet didactique et injonctions pédagogiques par l'analyse praxéologique d'un corpus de 501 exposés présentant des situations d'éducation au développement durable. L'étude des organisations didactiques, des techniques pédagogiques et de leurs discours justificatifs met en évidence une focalisation significative sur le niveau de la pédagogie en même temps que la faiblesse du questionnement du niveau proprement didactique. Devant la difficulté de mettre en œuvre une transposition didactique adéquate de certaines thématiques proposées en matière de développement durable dans le système scolaire français, le recours à une pédagogie de l'enquête appuyée sur le paradigme du questionnement du monde apparaît comme une réponse à privilégier.

2. Le curriculum scolaire questionné par les questions de DD

Depuis la fin des années 1990 et à la suite des grands sommets internationaux sur les questions de développement durable[1], la France s'est engagée dans la mise en œuvre de différentes stratégies gouvernementales déclinées en une suite de programmes d'actions s'adressant à de larges proportions des secteurs économiques. Outre les

[1] Citons, dans le cadre de l'ONU, le Sommet de la Terre de Rio en 1992 et celui de Johannesburg en 2002.

mesures pratiques, l'objectif est de rendre le développement durable compréhensible par tous les acteurs de la société et de sensibiliser les citoyens à ses différentes dimensions. Le rôle que peut jouer l'éducation scolaire est apparu comme indispensable à la réussite des stratégies visant un développement durable dans ses aspects aussi bien économiques et sociaux qu'environnementaux.

L'éducation à l'environnement et au développement durable est ainsi intégrée officiellement dans les programmes scolaires français depuis plus de dix ans. Cette intégration est allée de pair avec l'idée que « l'apprentissage de la durabilité » devait avant tout passer « par la pratique », les textes officiels affirmant très tôt que :

> L'éducation à l'environnement pour un développement durable ne constitue pas une nouvelle discipline. Elle se construit de façon cohérente et progressive tant à l'intérieur de chaque discipline ou champ disciplinaire (entre les différents niveaux d'enseignement) qu'entre les différentes disciplines (à chaque niveau). (MÉN, 2004)

Elle appelle donc un changement d'approche didactique et pédagogique qui n'est pas sans poser des questions quant à la capacité du corps enseignant d'adapter ses pratiques. La littérature scientifique émergente (Fortin-Debart & Girault, 2006 ; Boyer & Pommier, 2005 ; Girault & Sauvé, 2008 ; Diemer & Marquat, 2014), confirme les difficultés rencontrées par la profession face à la double injonction d'un renouveau pédagogique – avec recours à des techniques et outils pédagogiques spécifiques (enquête, travail de groupe, jardinage, débat, etc.), – et d'une mise en question des didactiques disciplinaires traditionnelles.

Concernant ce dernier point, il n'en est pas moins vrai que bien des dimensions du développement durable sont intégrées dans les curriculums disciplinaires (on pense notamment aux sciences de la vie et de la Terre, à l'histoire-géographie, aux sciences économiques et sociales ou encore à la philosophie), ce qui crée une condition favorable à l'effacement d'un abord potentiellement pluridisciplinaire des questions étudiées. Regardée dans une perspective pluridisciplinaire, l'ÉDD est davantage considérée comme relevant de l'éducation informelle ou non formelle, du périscolaire, voire des dispositifs des « éducations à » assurés le plus souvent par des intervenants extérieurs au système scolaire. Il va de soi que les systèmes didactiques qui se forment dans de telles conditions intègrent plus aisément l'exigence de modes pédagogiques spécifiques ou du moins autres que ceux caractéristiques de l'enseignement traditionnel. Cette propension à une répartition disciplinaire dans la prise en charge des projets didactiques de l'ÉDD dans ou en dehors du système scolaire ne met-elle pas en péril le questionnement didactique ? Ce phénomène d'assimilation disciplinaire, d'une part, et de focalisation sur le niveau de la pédagogie, d'autre part, ne risquent-ils pas de provoquer une perte de sens du problème du développement durable auquel l'on peinerait alors à rattacher une totalité concrète ?

Nous proposons d'étudier cette situation à la lumière d'une approche anthropologique du didactique qui encourage l'étude du didactique en toute situation sociale et l'analyse des conditions et contraintes qui pèsent sur la diffusion des connaissances dans la société. Ce cadre de référence nous amène à observer des tensions entre le niveau des projets didactiques et les injonctions pédagogiques « ambiantes ». La focalisation sur le niveau de la pédagogie interpelle et invite à se demander à quelle intelligibilité des enjeux didactiques en DD l'on peut arriver par le biais de ces « formats » pédagogiques différents ou innovants, où la clarté et la vigueur de l'intention didactique risque de s'affaiblir. Solidaire de cette question est la question de l'adéquation du mode pédagogique à l'enjeu didactique. De plus, observant que le niveau de maîtrise de ces techniques pédagogiques par les enseignants n'est pas toujours assuré, on peut se demander ce que les élèves peuvent raisonnablement apprendre. En d'autres termes, à quelles conditions développer des modes pédagogiques différents des modes traditionnels permet-il de faire mieux étudier les questions de DD ? Comment éviter que, devant la difficulté de leur mise en œuvre, l'enseignant ne soit encouragé à revenir sur ses pratiques habituelles (et selon le niveau d'enseignement, disciplinaires), abandonnant ainsi au périscolaire la tâche de leur mise en œuvre et reléguant au second plan les enjeux didactiques pluri- et codisciplinaires ?

3. Interroger les situations didactiques en ÉDD

Pour mettre au jour cette tension entre projet didactique et injonctions pédagogiques, ainsi que la répartition institutionnelle qu'elle semble provoquer, nous étudions l'articulation entre types de pédagogie utilisés et enjeux didactiques visés dans une diversité de situations éducatives, en nous appuyant sur un corpus de près de 500 exposés (pages Internet, extraits de manuels scolaires, brochures, etc.) présentant des situations didactiques en ÉDD[2]. Pour la constitution de notre corpus d'exposés nous avons sollicité les 110 étudiants d'un enseignement optionnel sur l'ÉDD proposé en troisième année de licence de sciences de l'éducation, en leur demandant de rechercher, sur quelque support que ce soit, des exposés présentant une situation didactique en lien avec l'ÉDD. Notre objectif était non seulement de nous assurer ainsi d'une certaine neutralité quant au choix des exposés, mais aussi de considérer ce corpus comme témoin (Ladage, 2008) de ce qu'un personne – en l'occurrence potentiellement un enseignant aux prises avec une question d'ÉDD – est susceptible de rencontrer quand elle cherche à se documenter sur la question. La consigne donnée aux étudiants était volontairement très large, permettant de retenir un large éventail de types de ressources. Alors que pour valider leur épreuve de contrôle continu les étudiants devaient ensuite proposer une analyse didactique et praxéologique des situations didactiques présentées dans les ressources retenues, nous avons nous-mêmes réalisé l'analyse à l'échelle de l'ensemble des exposés. Cette recherche vise à contribuer à l'étude des exposés relatant des situations didactiques – ici relatives à l'ÉDD –, d'une part pour y repérer la place accordée respectivement au projet didactique et aux injonctions pédagogiques, et d'autre part pour comprendre les éléments de codétermination entre ces deux niveaux.

3.1. Des projets didactiques d'envergure ou disproportionnés ?

Le corpus que nous avons ainsi obtenu se compose d'exposés de nature très hétérogène tant au plan des *institutions*, qu'au plan des

[2] Notre recherche comporte également une enquête par questionnaire et par entretiens auprès d'enseignants du système scolaire français. Les résultats en seront diffusés dans la thèse de Cécile Redondo, dont la soutenance est prévue en 2018.

personnes et des *objets* considérés. Nous en proposons ci-après un bref aperçu.

La majorité des exposés peut être considérée comme la trace de situations didactiques qui ont eu lieu et se présentent souvent sous la forme d’une vidéo de quelques minutes présentant une activité en ÉDD, comme par exemple un jeu (*Stop déchets*), une séance de cours (*Les énergies renouvelables expliquées aux enfants*), un débat (*Débats – mouvants – dans les lycées pour lancer des projets éco-citoyens*), une activité manuelle (*Comment sensibiliser les enfants au développement durable ?*), etc.

La situation didactique est souvent accompagnée du témoignage (interview) d’un ou plusieurs acteurs impliqués – d’une manière ou d’une autre – dans la situation. Souvent, il s’agit de l’acteur le plus proche, c’est-à-dire de la personne qui est intervenue en posture d’enseignant durant l’activité, d’élèves ou de toute autre catégorie de personne dans la position de qui apprend. Le cercle des acteurs impliqués peut s’élargir au chef d’établissement, au responsable de mission chargé de la formation des agents d’une collectivité, ou encore à l’élu politique en charge du programme. C’est là l’occasion pour les personnes associées (ou directement impliquées) de commenter l’activité d’ÉDD réalisée, d’argumenter en faveur de sa pertinence, de son intérêt, de justifier du ou des choix (pédagogiques) qui ont été faits, ou encore d’évaluer sa réussite, etc. Ces discours justificatifs intéressent plus particulièrement les analyses didactiques et praxéologiques que nous avons menées afin de comprendre le rapport qu’entretiennent ces témoins à l’enjeu didactique et aux techniques pédagogiques visés.

L’exposé peut également prendre la forme d’un article de presse d’une édition locale, régionale ou nationale rendu disponible au format papier (*Environnement – Initiative – Des jardins potagers sur l’île de Porquerolles*) ou accessible en ligne (*Au lycée des Nerviens, on participe au programme Biodiver’lycées*). On trouve d’autres formes de publications écrites (en version papier ou numérique) qui peuvent être rendues disponibles par les organismes qui sont eux-mêmes à l’initiative des activités. Parmi elles, citons les associations comme *Teragir*[3] (*Fini le gaspillage d'eau*), les établissements publics comme l'ADEME (*Bon pied, bon air : Une opération de sensibilisation-action santé environnement*), les collectivités territoriales comme les municipalités (*La citoyenneté, une nouvelle délégation confiée à Aurélie Munoz*), les associations environnementales, comme *Graine Paca*, qui proposent des publications dont certains extraits relatent des situations éducatives en matière d'ÉDD.

Les pages Web et sites internet d'institutions constituent une grande part des supports par lesquels il est possible d'accéder aux descriptions de situations d'ÉDD. Pour donner encore quelques exemples, citons les sites du Ministère de l'Éducation nationale et du Ministère de la transition écologique et solidaire (*Jardin pédagogique partagé*), ainsi que les sites académiques, tel celui de l'académie de Rouen qui consacre un chapitre spécial aux « Politiques éducatives de développement durable », témoignage de la richesse et la diversité des initiatives des établissements et des écoles de cette académie, au nombre de 293 le 9 novembre 2015[4] ! Les sites spécialisés en éducation comme celui de *La main à la pâte* constituent aussi des lieux d'hébergement de plusieurs types de situations (*Le réchauffement climatique – Des origines aux solutions – École de Cluhat 2015/2016*, ou encore *Le recyclage des déchets organiques : les bio-déchets*). Citons aussi les blogs ou sites d'établissement scolaires (*Une mini-entreprise équitable au lycée* ; *Sortie scolaire : Éducation à l'environnement en CE1 B2*) et les sites d'organisations internationales comme *Plan international* (*Du foot pour réinsérer les filles au Brésil*) et d'associations comme la *LPO de l'Isère* (*Plantation d'un arbre pour le climat à Seyssins*), ou encore un réseau d'enseignants comme *Les Clionautes*[5] (*Halte aux catastrophes – Géographie, 5ème*) ou *Edumoov*[6]

---

[3] L'association *Teragir*, anciennement *Of-FÉEE* (Office français de la Fondation pour l'Éducation à l'Environnement en Europe) est à l'origine du label *Éco-École*.

[4] Voir : http://www.ac-rouen.fr/academie/politiques-educatives/developpement-durable-26729.kjsp?RH=DOSSIERS

[5] *Les Clionautes* est un réseau coopératif de professeurs d'histoire-géographie constitué en association et désirant agir pour promouvoir les usages pédagogiques des technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement de l'histoire et de la géographie.

(*Le développement durable en milieu urbain – Étude de cas un écoquartier toulousain*), une association comme l'ASPAS[7] *(« J'aime les loups ! » : l'action de l'ASPAS pour sensibiliser les enfants*), etc.

Notons que le système scolaire propose également une documentation fouillée constituée, outre les traditionnels guides du maître et les fiches techniques ou pédagogiques, de dossiers de projets pédagogiques (par exemple la Fondation Lamap) ou encore de projets d'animation. Au niveau international, enfin, on note l'existence de dossiers pédagogiques produits par différentes institutions : des organisations internationales comme l'UNESCO (Partie 4 – Apprendre aux enfants et aux jeunes à promouvoir le Respect pour tous), l'UNICEF (Changement climatique) ou le Conseil de l'Europe (Rejeté sur la rive – Les élèves analysent de façon critique leur île natale).

Ce survol rapide d'une sélection d'exposés permet d'apercevoir la diversité et le nombre important d'acteurs impliqués et témoigne aussi du fait que l'école et les structures éducatives sont loin d'être les seules à s'emparer des sujets de DD pour proposer des pratiques éducatives en la matière.

Si on observe de plus près les enjeux didactiques annoncés dans l'ensemble des 501 exposés recueillis, nous pouvons repérer la distribution suivante des thématiques annoncées (en nous limitant à celles présentes dans au moins 10 exposés) :

- Environnement (98)
- Déchets (82)
- Ressources naturelles (59)
- Développement durable (54)
- Biodiversité (43)
- Alimentation (31)
- Changement climatique (25)
- Valeur solidarité (18)
- Citoyenneté (12)
- Transport (12)

[6] *Edumoov* est un site internet destiné aux professeurs des écoles à l'initiative d'un collectif d'enseignants constitué en start-up.
[7] Association pour la protection des animaux sauvages.

– Inégalités (11)
– Agriculture (10)

Il va de soi que la nature des exposés est le plus souvent peu propice à la présentation détaillée du contenu des situations. Mais nous pouvons noter néanmoins que les enjeux didactiques sont souvent exprimés à un niveau praxéologique très général, dépassant rarement – si on se réfère à l'échelle de niveaux de codétermination didactique – le niveau du *domaine* d'une discipline donnée, alors même que la centration sur des activités concrètes invite plutôt à penser l'enjeu didactique à un niveau plus poussé de l'analytique didactique des œuvres à étudier.

À l'inverse, l'analyse praxéologique des exposés révèle que le niveau du pédagogique bénéficie proportionnellement de bien plus d'explicitations techniques et d'explications technologico-théoriques. Elle permet ainsi de mettre en lumière que les discours justificatifs des situations éducatives qui y sont présentées portent davantage sur les techniques pédagogiques que sur les praxéologies au cœur de l'enjeu didactique à proprement parler. Pour expliquer cette observation regardons d'abord de plus près la diversité de techniques pédagogiques présentées dans les 501 exposés, pour ensuite revenir sur ce que ces exposés recèlent comme discours justificatifs : sont-ils centrés sur le niveau de la pédagogie ou sur les contenus, ou les deux ? Est-ce que l'exigence pédagogique laisse la place au projet didactique, ou devient-elle un enjeu didactique à part entière, pour l'enseignant qui aurait encore beaucoup à apprendre sur les techniques pédagogiques et leurs influences sur le didactique ? Il n'est pas évident que notre corpus d'exposés soit en mesure de donner suffisamment de matériaux pour répondre à cette dernière question. Voyons cependant jusqu'où nous pouvons raisonnablement pousser l'analyse.

3.2. Des injonctions pédagogiques démesurés ?

Rappelons tout d'abord la teneur des textes officiels avec la citation suivante :

> Compte tenu de sa spécificité, l'environnement pour un développement durable doit reposer sur des démarches pédagogiques diversifiées privilégiant des situations concrètes qui développeront chez les élèves la

> sensibilité, l'initiative, la créativité, le sens des responsabilités et de l'action. (MÉN, 2004)

La capacité à imaginer et à innover est présentée comme un incontournable de l'ÉDD par une auteure comme Francine Pellaud (2011, p. 137) :

> des problématiques qui, souvent, ne peuvent se référer à un antécédent. […] Ce domaine ne bénéficie d'aucune « histoire » permettant d'y ancrer un savoir, quel qu'il soit. Tout est en perpétuelle mouvance, en recherche incessante de régulations et d'optimums, dépendants d'un contexte spatial et temporel. […] Cette approche dépasse la perspective d'une réutilisation de savoirs reconnus comme opérationnels, en faveur d'une créativité permettant un réajustement perpétuel dans les domaines en évolution.

Cette auteure illustre bien notre questionnement central, car elle estime qu'« il ne faut pas oublier que, dans l'ÉDD, le choix des thèmes et des connaissances est certes important, mais que la pédagogie l'est tout autant pour permettre de développer des modes de raisonnement adéquats. » (Pellaud, 2011, p. 178)

Que pouvons-nous dire de cette « imagination pédagogique » à partir de notre corpus des 501 exposés ? En catégorisant les types pédagogiques qui y sont présentés et en ne gardant que les 10 valeurs les plus importantes, voici la distribution que nous observons :

Types pédagogiques	Effectifs
Une sortie	68
Un cours	62
Une réalisation	44
Un travail de terrain – jardinage	42
Un échange, une rencontre	28
Une reproduction de gestes	26
Un jeu	21
Un travail de terrain – nettoyage	18
Un programme d'actions	17
Un échange, une invitation	16
Autres	159
Total général	501

Tableau 1. Les 10 principaux types pédagogiques identifiés dans le corpus.

Il ressort en premier lieu la proximité entre d'une part les sorties (de natures très différentes, mais principalement des expositions, des films, des excursions) et d'autre part le cours (sur les déchets, les ressources énergétiques, la citoyenneté…). Mais les lignes suivantes attestent d'une présence massive de pédagogies dites « actives », centrées sur des activités. Dans la catégorie « autres » on trouve dans une moindre mesure les activités manuelles de type bricolage ou de cuisine, l'exposition, le film ou le spectacle, le jeu de rôle, le débat, l'enquête, le jeu numérique, la dégustation, la vente ou le don…

Si l'on confronte ce résultat avec les types pédagogiques préconisés par les textes émanant des instances gouvernementales et internationales[8], nous constatons que nous trouvons bien les principaux modes pédagogiques préconisés, mais qu'il est difficile d'estimer par exemple la part effective de participation, d'interaction, de débat, voire d'enquête… mise en œuvre, qui sont pourtant des techniques pédagogiques génériques porteuses d'une topogenèse adéquate à l'enjeu didactique. N'oublions pas non plus que, le plus souvent, les modes et techniques pédagogiques ne s'excluent pas et peuvent coexister au sein d'une même situation d'apprentissage.

Devant la complexité du phénomène et la profusion des types de situations didactiques que l'on peut rencontrer, nous devons conclure à ce stade que nous ne pouvons pas nous en tenir au simple repérage de types pédagogiques. Une analyse plus approfondie est nécessaire pour comprendre la tension entre le niveau de la pédagogie et les projets didactiques à l'étude et, partant de là, pour mettre en lumière le risque de refoulement du didactique dans l'ÉDD. Nous nous proposons à ce stade de porter les analyses praxéologiques des exposés sur les discours ou fragments de discours justificatifs traduisant cette tension en portant notre regard sur la présence ou l'absence de discours justificatifs des techniques pédagogiques.

[8] On peut citer à cet égard l'exemple du rapport de l'UNESCO « Façonner l'avenir que nous voulons, Décennie des Nations Unies pour l'éducation au service du développement durable (2005-2014) ».

3.3. L'analyse praxéologique comme révélateur

Rappelons tout d'abord ce que Yves Chevallard (2011) souligne concernant la recherche des discours justificatifs de techniques exposées dans d'un récit oral : ils apparaissent le plus souvent sous une forme fragmentaire et lacunaire. Il peut y avoir à cela plusieurs raisons : la technologie peut être insuffisante ; l'explication peut se faire allusive et s'évanouir comme derrière une évidence transcendante ; elle peut renvoyer explicitement à des éléments explicatifs absents. C'est bien ce type de phénomènes que nous avons rencontré dans notre corpus, dont nous présenterons brièvement quelques exemples ci-après.

Lorsque le discours technologique est absent

Il est d'abord remarquable que dans 146 des exposés, soit près de 30 % d'entre eux, aucun discours justificatif du mode pédagogique n'est décelable. Les praxéologies des enjeux didactiques y sont explicitées – avec plus ou moins de précision – sans que les auteurs éprouvent le besoin d'expliquer le choix des techniques pédagogiques. Notons toutefois que, dans 39 % de cette sous-population d'exposés, les situations de référence prennent place en un contexte scolaire, majoritairement lors d'un cours traditionnel. Nous observons toutefois quelques occurrences (de 2 à 7) de sorties, de réalisations, de travaux de jardin, de jeux de rôle, d'enquêtes, etc.

Dans les autres cas d'absence de discours technologique, il s'agit majoritairement d'exposés décrivant des partenariats, des opérations ou des projets (sur les enjeux liés aux modes de vie, à l'alimentation, au cadre de vie, etc.) et faisant le plus souvent intervenir des personnes extérieures au cadre scolaire strict.

Lorsque le discours technologique est présent

Nous avons repéré des fragments de discours justificatif de techniques pédagogiques dans près de 70 % des exposés. Nous nous limiterons ici à la sous-population des exposés proposés dans un cadre scolaire, là où nous pouvons supposer que c'est l'enseignant lui-même qui est censé mettre en œuvre les techniques pédagogiques évoquées. Les 59 exposés ainsi extraits – tous niveaux scolaires confondus – décrivent par ordre décroissant de fréquence le recours à la sortie (9), l'abord du DD en cours traditionnel (9), les réalisations de type valorisation de déchets (7), le jeu (5), le débat (5), le jeu numérique (4), le travail de terrain, jardin ou bassin (3), le programme d'actions (3), l'immersion (3), l'enquête (3), l'exposition, le film, le spectacle (2), le jeu de rôle (2), la lecture d'un conte (2) et enfin la reproduction de gestes (1) ou encore une rencontre (1). En prenant l'exemple du débat voici le verbatim de ce que nous avons pu repérer :

1) « Le temps était trop court pour envisager d'autres solutions. »
2) « 1) les connaissances "prennent du relief" à travers l'exercice du débat 2) pour échanger entre groupes, pour se décharger de l'expression de l'opinion personnelle, pour s'en servir plus tard dans sa vie d'adulte. »
3) « Mettre les participants en position active de réflexion et d'interrogation critique. »
4) « C'est facile et interactif » ; « permettre aux timides de ne pas s'exprimer, limiter les bavardages ».
5) « C'est une pratique qui donne de la confiance en soi », « C'est une pratique qui permet d'argumenter ses opinions. »

De façon plus générale les registres dominants sont l'activité, le ludique, le concret, la participation active des enfants, l'attractivité. Ainsi le jeu « permettait à l'enseignant d'être en retrait, d'observer, de guider les enfants, de leur laisser la parole ». La sortie sert à « voir de quelle manière la question s'actualise dans différents domaines et à différentes échelles (monde du travail, vie politique, médias, ville) et à « sortir du huis-clos de la classe ». Si, en outre, on recourt à l'enquête, c'est « pour mieux comprendre ».

Sans pouvoir présenter le détail de l'analyse qualitative plus avant ici, notons que les fragments de discours justificatifs repérés rejoignent ceux que l'on trouve à propos de ces techniques pédagogiques de façon générale, sans considération particulière de l'enjeu didactique, ici le développement durable. Il resterait à s'interroger sur la possiblilité d'argumenter plus avant l'emploi de telle ou telle technique pédagogique en vue de la réussite d'un projet didactique donné. N'est-ce pas là justement ce que la didactique propose d'étudier et qui plaide pour des recherches (et des enseignements) prenant davantage en compte la codétermination entre les niveaux de la pédagogie et des praxéologies à enseigner ?

Conclusion

L'exemple de l'ÉDD nous intéresse à plusieurs titres. Au plan du didactique, il nous permet d'explorer un cas d'enseignement aux prises avec des exigences de codisciplinarité qui questionne les frontières disciplinaires traditionnelles. Il fait clairement apparaître l'utilité d'introduire le *modèle du questionnement du monde* qui encourage une délimitation des enjeux didactiques non pas en référence à une analytique didactique disciplinaire, mais à des questions dont l'étude conduit à traverser les frontières disciplinaires et dont la réalisation reste raisonnable au regard des conditions et contraintes qui pèsent sur les systèmes didactiques appelés à mettre en œuvre l'ÉDD. Au plan de la pédagogie, le cas de l'ÉDD est instructif car le paradigme de questionnement du monde qu'une telle éducation requiert conduit réciproquement à questionner les modes pédagogiques présentés comme idoines et à interroger les formes didactiques qu'ils favorisent ou, au contraire, tendent à exclure.

Références

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques* (pp. 107-122), Grenoble, La Pensée sauvage.

Boyer, R. & Pommier, M. (2005). *La généralisation de l'éducation à l'environnement pour un développement durable vue par les enseignants du secondaire*. Lyon : INRP

Chevallard, Y. (2011). *Didactique fondamentale. Module 1 : Leçons de didactique*. Master de sciences de l'éducation 1re année. Université de Provence. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=169

Diemer, A. & Marquat, C. (Dir) (2014). *Éducation au développement durable. Enjeux et controverses. Pédagogies en développement.* Bruxelles : de Boeck.

Fortin-Debart, C. & Girault, Y. (2006). *État des lieux et des perspectives en matière d'éducation relative à l'environnement à l'échelle nationale*. Paris : Muséum National d'Histoire Naturelle (MNHN). En ligne : http://www.yvesgirault.com/pages/doc-pdf/rapport_ere_edd.pdf

Girault, Y. & Sauvé, L. (2008). L'éducation scientifique, l'éducation à l'environnement et l'éducation pour le développement durable. Croisements, enjeux et mouvances. *Aster*, (46), 7-30.

MÉN. (2004). Circulaire n°2004-110 du 8 juillet 2004. *Généralisation de l'éducation à l'environnement pour un développement durable (ÉEDD)*, BO n°28 du 15 juillet 2004. http://www.education.gouv.fr/bo/2004/28/MENE0400752C.htm

Pellaud, F. (2011). *L'éducation au développement durable*. Versailles : Éditions Quae.

Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico

Josep Gascón

Dep. de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona, Spain

Pedro Nicolás

Dep. de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales, Universidad de Murcia, Spain

Abstract. We characterize a didactic paradigm according to three concurrent elements: the phenomena to which this paradigm reacts; the proposed ends, which determine the direction of the pursued change; and the means offered to reach these ends. As means to overcome some consequences of the global phenomenon called “monumentalism”, the Anthropological Theory of the Didactic offers certain didactic organisations (living at the level of the discipline, area or sector of the scholar mathematics) compatible with inquiry based paradigms. This strategy is a way to advance towards the paradigm of questioning the world and it sets out a curriculum shift.

Resumen. Caracterizamos un paradigma didáctico mediante tres elementos concurrentes: los fenómenos a los que responde; los fines que propugna, que son los que determinan la dirección del cambio que persigue; y los medios que propone para alcanzar dichos fines. Como medios para evitar las consecuencias del fenómeno global del «monumentalismo», la teoría antropológica de lo didáctico propone ciertas organizaciones didácticas (tanto a nivel disciplinar como en las diferentes áreas y sectores de la matemática escolar) compatibles con los paradigmas fundados en la indagación. Esta estrategia constituye una forma de avanzar hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo y plantea una propuesta de cambio curricular.

Lista de los editores (Eds.)

Métodos de investigación en la TAD (pp. xx-yy)

VI congreso internacional de la TAD (Autrans, 22-26 de enero de 2018)

Eje 2. *El paradigma del cuestionamiento del mundo y la cuestión curricular*

Editorial, año

1. Cuestionamiento del currículo y cambio de paradigma

En la terminología pedagógica tradicional la noción de ‘*currículo*’ es muy controvertida. Una de las definiciones más amplias aparece en el artículo *Currículo* (educación) en la versión española de Wikipedia:

> El término currículo (del latín: sing. curriculum; pl. curricula) refiere el proyecto en donde se concretan las concepciones ideológicas, socio-antropológicas, epistemológicas, pedagógicas y psicológicas, para determinar los objetivos de la educación escolar, es decir, los aspectos del desarrollo y de la incorporación de la cultura que la escuela trata de promover para lo cual propone un plan de acción adecuado para la consecución de estos objetivos. También abarca la dinámica de su realización: ¿qué enseñar?, ¿cómo enseñar?, ¿cuándo enseñar? y ¿qué, cómo y cuándo evaluar?

Esta definición pone de manifiesto la enorme complejidad de la problemática curricular pero si, como proponemos en este trabajo, asumimos una noción restringida del término *currículo* que abarque únicamente las obras y, en particular, las cuestiones que se proponen para ser estudiadas, junto con los medios didácticos presuntamente útiles para alcanzar dichos fines, entonces el *problema del currículo* se acota en gran medida.

Pero, incluso con esta noción limitada de currículo, cualquier propuesta de reforma del mismo que no sea meramente superficial presupone la asunción de un conjunto de *fenómenos didácticos* frente a los que el nuevo currículo pretende reaccionar (ver sección 4). Dado que la interpretación e incluso la «construcción» de estos fenómenos depende en gran medida de ciertos *principios* asumidos por la instancia que plantea la reforma y, en particular, de la asunción de un *modelo epistemológico* específico de los conocimientos que están en juego, podemos afirmar que al cuestionar el currículo vigente en una institución se está poniendo en tela de juicio, aunque sea implícitamente, el modelo docente en su conjunto, esto es, el que denominaremos *paradigma didáctico* imperante en dicha institución.

Caracterizamos un *paradigma didáctico* mediante tres elementos concurrentes: los *fenómenos didácticos* a los que responde, cuya interpretación está condicionada por una forma particular de conceptualizar los conocimientos y la educación escolar; los *fines u objetivos educativos* que propugna, que determinan la dirección del cambio que propone para superar algunas consecuencias de los fenómenos en cuestión; y los *medios* que se consideran como racionalmente necesarios para alcanzar dichos fines y que se concretan en determinadas *organizaciones didácticas*. Esta noción de *paradigma didáctico* sirve tanto para describir el estado de cosas en un determinado sistema educativo, el paradigma vigente, como para describir las propuestas de cambio del mismo por parte de teorías didácticas o de instituciones que forman parte de la noosfera. En Marianna Bosch, Josep Gascón y Pedro Nicolás (en prensa) se propone una caracterización de los procesos de estudio prototípicos de ciertos paradigmas didácticos a través de la descripción de los tipos de praxeologías (tanto didácticas como disciplinares, por ejemplo, matemáticas) en las que dichos paradigmas se sustancian. Obsérvese que todos los elementos de una praxeología vienen condicionados por ciertos *principios* o *asunciones básicas* contenidos en el componente «teórico» de la misma (Gascón & Nicolás, 2017). Así pues, un paradigma didáctico depende de los principios, tanto didácticos como disciplinares, de las correspondientes praxeologías en las que se encarna y, en particular, de un modelo específico de los conocimientos en juego[1].

2. Paradigmas pedagógicos y paradigmas disciplinares

Utilizaremos la *escala de niveles de codeterminación didáctica* (Chevallard, 2002), que estructura el ámbito empírico que la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) toma en consideración, para distinguir diferentes tipos de *paradigmas didácticos* en función del nivel de codeterminación didáctica en el que se sitúan.

Diremos que un paradigma didáctico se sitúa en el nivel de la *Pedagogía* (ver figura 1), y lo denominaremos *paradigma pedagógico*, si

[1] En Josep Gascón (1994, 2001) y en Marianna Bosch y Josep Gascón (2002) se definían diferentes *modelos docentes* o *paradigmas* y se caracterizaban mediante el modelo epistemológico asumido en cada caso y, consiguientemente, por los objetivos de la educación matemática y los medios didácticos que proponían para alcanzar dichos objetivos (ambos fuertemente condicionados por dicho modelo). En Yves Chevallard (2013) se llama *paradigma didáctico* a un conjunto de reglas que prescriben, aunque sea implícitamente, qué obras se estudian y qué formas de estudiarlas puede haber.

tanto los objetivos educativos que propugna como los medios que considera útiles y los fenómenos a los que reacciona son genéricos, independientes de las disciplinas escolares específicas. Si los elementos que caracterizan a un paradigma didáctico dependen de una disciplina escolar concreta y de una manera de organizar su proceso de estudio, diremos que se trata de un *paradigma disciplinar* (situado en el nivel de la *Disciplina*). Si se trata de las matemáticas, lo denominaremos paradigma disciplinar *didáctico-matemático*.

Humanidad
↓↑
Civilización
↓↑
Sociedad
↓↑
Escuela
↓↑
Pedagogía
↓↑
Disciplina ↔Área ↔ Sector ↔ Tema ↔ Cuestión

Figura 1. Niveles de codeterminación didáctica

Un paradigma pedagógico presupone una forma de interpretar la *educación escolar* globalmente considerada y responde a determinados fenómenos que afectan al proceso de estudio escolar en su conjunto. Por su parte, un paradigma disciplinar didáctico-matemático asume una forma específica de interpretar la *educación matemática*, responde a fenómenos disciplinares y propone fines y medios más operativos.

3. Transición del paradigma pedagógico de la visita de las obras al del cuestionamiento del mundo

De acuerdo con Émile Durkheim (1924/1991) *la educación es un hecho social* puesto que los sistemas educativos dependen de la religión imperante, de la organización política, del desarrollo de las ciencias y del estado de la industria, entre otros muchos factores sociales. En consecuencia, la transición entre el paradigma didáctico vigente en una institución y un paradigma alternativo no puede cambiarse de manera meramente voluntarista, debe plasmarse en un proceso de *reforma* progresiva que requiere analizar previamente el paradigma vigente que se pretende modificar.

Para llevar a cabo dicho análisis e impulsar la reforma del paradigma dominante en una dirección determinada, la TAD ha construido teóricamente dos paradigmas pedagógicos (Chevallard, 2006, 2013): el *paradigma de la visita de las obras* (PVO), que pretende modelizar algunos rasgos de la organización didáctica clásica todavía dominante en los sistemas escolares; y el *paradigma del cuestionamiento del mundo* (PCM), que constituye la propuesta de la TAD como meta del cambio educativo hacia el que se quiere avanzar. Pueden considerarse como casos extremos de un continuo de paradigmas posibles aunque, como veremos en lo que sigue, el PCM contiene al PVO y constituye una fuerte ampliación o generalización del mismo.

El PVO se caracteriza, en primer lugar, por considerar las obras que se proponen para ser estudiadas como *obras acabadas* y *cerradas* de las que ha desaparecido la situación problemática que les ha dado origen así como toda posibilidad de cuestionamiento de las mismas. Presenta las obras a estudiar como si fuesen *monumentos* que tienen valor por sí mismos. En consecuencia, el objetivo educativo de este paradigma consiste, en primera instancia, en que los estudiantes admiren ciertas obras, aunque desconozcan sus posibles *razones de ser*, y lleguen por este camino a conocerlas y aprenderlas.

En coherencia con esta forma de interpretar el conocimiento, la estrategia didáctica que propone este paradigma se materializa en una presentación *autoritaria* de las obras que tiende a silenciar todo tipo de preguntas de los estudiantes sobre las mismas con la consiguiente reducción de su papel al de meros espectadores[2].

Para responder al fenómeno del *monumentalismo* –considerado como un *fenómeno pedagógico* provocado por el PVO– y para dar razón de

[2] En el caso de las matemáticas, Lakatos asociaba el autoritarismo de la educación matemática al euclideanismo (considerado como un modelo epistemológico general de las matemáticas) e indicaba que, de acuerdo con el ideal euclídeo, el estudiante se ve obligado a asistir a una especie de ceremonia sin hacer preguntas sobre el trasfondo problemático que está tras los argumentos: «Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente» (Lakatos, 1978, p. 166).

algunas de sus consecuencias y sus concomitancias con otros fenómenos, la TAD propone el PCM que tiene como objetivo educativo crear un nuevo *ethos cognitivo* caracterizado por la actitud *problematizante*, asociada al carácter *herbartiano*, *procognitivo* y *exotérico* (Chevallard, 2013), lo que pone de manifiesto algunos de los principios o asunciones básicas de la TAD (Gascón & Nicolás, 2017).

Para describir la estructura de los procesos de estudio característicos de los diferentes paradigmas y la relación entre ellos se utiliza el *esquema herbartiano* (Chevallard, 2004) que constituye el *modelo didáctico general* de referencia que utiliza la TAD.

En el caso límite del PVO, un proceso de estudio típico puede describirse como sigue: el profesor y ha estudiado una obra O y la presenta a la clase mediante un discurso. Como toda obra, O es el fruto intencional de un trabajo humano y, por tanto, es una respuesta R a determinadas cuestiones Q_y que, sin embargo, no aparecen como tales en el discurso en cuestión. El profesor construye el *medio didáctico* M_y que utiliza para elaborar R. En consecuencia, el esquema herbartiano describe la estructura de este proceso de estudio mediante:

$$[S(X, y, O) \curvearrowright M_y] \hookrightarrow R$$

En el caso del PCM, las obras O que se proponen para ser estudiadas en un proceso de estudio se presentan típicamente en forma de cuestiones Q. El *medio didáctico* $M = \{R_i^\lozenge, O_j, Q_k, R_k\}$ es más rico, está construido por la comunidad de estudio $[X, Y]$ y contiene todas las «herramientas» necesarias para que esta construya una respuesta $R^\heartsuit$ a las cuestiones Q. El esquema herbartiano reducido expresa el proceso de estudio mediante:

$$[S(X, Y, Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^\heartsuit$$

La construcción de $R^\heartsuit$ se lleva a cabo mediante un *recorrido de estudio e investigación* (REI) (Chevallard, 2006) a lo largo del cual se deberá evaluar la relevancia de las respuestas $R_i^\lozenge$ que la cultura ha proporcionado a cuestiones próximas o relacionadas con Q. Se estudiarán obras de todo tipo O_j potencialmente útiles para deconstruir y reconstruir dichas respuestas $R_i^\lozenge$, para proporcionar respuestas provisionales R_k a diversas cuestiones Q_k derivadas de Q y se utilizarán todos estos medios para construir, validar y difundir $R^\heartsuit$.

Es importante señalar que el esquema herbartiano describe únicamente los elementos que constituyen la *estructura* de los procesos de estudio, mientras que la *dinámica* de dichos procesos –esencial para caracterizar los diferentes paradigmas– se describe en términos de las *dialécticas* o *gestos del estudio* (Chevallard, 2007) que no trataremos aquí.

Si la cuestión Q se ha planteado sin ningún vínculo, a priori, con las obras O_j que se necesitarán posteriormente para construir la respuesta, se dice que se trata de un REI *abierto* o un REI *sin finalidad praxeológica* que, en principio, no privilegia ninguna disciplina.

4. El paradigma disciplinar de la modelización matemática

En el nivel disciplinar, la TAD propone el *paradigma de la modelización matemática* que es compatible con el PCM. En particular, los fenómenos a los que responde pueden interpretarse como manifestaciones particulares, en el caso de las matemáticas, de fenómenos relacionados con el monumentalismo. Tanto los fines como los medios que plantea son coherentes con los correspondientes fines y medios genéricos que propone el PCM.

4.1. Interpretación de la actividad matemática como una actividad de modelización

En múltiples trabajos se han descrito algunas de las características del paradigma disciplinar *didáctico-matemático* vigente en las instituciones docentes actuales y se han sacado a la luz determinados fenómenos didácticos que se ponen de manifiesto en la actividad matemática escolar globalmente considerada y que son compatibles con el monumentalismo todavía imperante. A este respecto, podemos citar: el *carácter puntual* de las praxeologías matemáticas escolares; la *rigidez* e *incompletitud relativa* de las mismas; la tendencia a la *algoritmización* de las tareas matemáticas; la escasa incidencia del *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas y, en general, del bloque tecnológico-teórico, sobre la práctica matemática; la *desarticulación* entre las diferentes áreas y sectores de la matemática escolar; el *autismo temático* que comporta el olvido de las posibles *razones de ser* de una obra cuando estas dependen de su conexión con los niveles superiores de codeterminación didáctica; y la autosuficiencia de la matemática escolar que aparece *encerrada en sí misma* y cuya relación con el resto de disciplinas se reduce a un mero *aplicacionismo* (Fonseca, 2004; Rodríguez, 2005; Barquero, 2009; Serrano, 2013; Lucas, 2015).

Estos fenómenos conforman un macro-fenómeno didáctico disciplinar que se manifiesta en las enormes restricciones institucionales que dificultan la vida normal y el desarrollo de la *modelización matemática* (MM) en las instituciones responsables de la educación matemática. Para interpretar adecuadamente este fenómeno, hay que tener en cuenta la forma como se conceptualiza la MM en la TAD (Gascón, 1994; García et al., 2006; Barquero, Bosch & Gascón, 2013. Partiendo de una concepción institucional de la actividad matemática, la TAD postula que la MM puede describirse en términos del juego entre sistemas y modelos con estructura praxeológica. En concreto, la TAD propone tres caracteres diferenciales de la MM:

(a) *Incluye la modelización intramatemática como un tipo particular muy importante de modelización matemática.*

La TAD considera la MM de sistemas matemáticos como una parte esencial de la actividad de MM que es inseparable de la modelización de sistemas extramatemáticos. Esta ampliación de la noción clásica de MM es coherente con el desarrollo histórico de las matemáticas y permite considerar la MM como un proceso de matematización progresiva de un sistema en el cual el primer modelo pasa a jugar el papel de sistema (matemático) de un nuevo proceso de MM y así sucesivamente, lo que conduce a trabajar con modelos de modelos del sistema inicial. Aparece así claramente el carácter *recursivo* de la actividad de MM y, también, su carácter *reflexivo*, puesto que en la modelización intramatemática el sistema puede hacer el papel de modelo de su modelo. Un ejemplo histórico de este proceso, nos lo proporciona el carácter reflexivo de la modelización mutua entre las geometrías euclidiana y cartesiana.

(b) *Se postula que toda MM presupone la modelización de una praxeología en su totalidad y no sólo de algunos elementos aislados de la misma.*

En cuanto a la relación del modelo con el sistema modelizado, Chevallard (1992) propone sustituir la metáfora del modelo como *representación* figurativa del sistema por la del modelo como *máquina* cuyo funcionamiento permite producir conocimientos relativos al sistema modelizado. Digamos por último, que la problemática de la *adecuación del modelo al sistema* comporta la tarea de comparación de diferentes modelos de un mismo sistema.

(c) *Se interpreta la MM como un instrumento de articulación y completación progresiva de la matemática escolar.*

La TAD describe los procesos de MM como procesos de reconstrucción y articulación de praxeologías matemáticas de complejidad creciente (puntuales, locales, regionales y globales) que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio.

Esta forma de conceptualizar la MM es la que justifica identificar la actividad matemática con una actividad de modelización y, por tanto, tomar la actividad de MM como el *modelo epistemológico general de la actividad matemática*.

En base a esta interpretación, la TAD propone el *paradigma disciplinar de la modelización matemática*[3] cuyo objetivo es el de transformar la actividad matemática escolar en una *actividad de estudio e investigación* materializada en procesos de MM para dar respuesta a las cuestiones que surgen en cualquier tipo de sistemas. Se supone implícitamente que alcanzar este objetivo traerá consigo la superación de los hechos didácticos descritos anteriormente (como, por ejemplo, el *encierro disciplinar* de la matemática escolar, gracias a que la MM de todo tipo de sistemas promueve la *investigación codisciplinar*) y, en última instancia, contribuirá a superar el monumentalismo escolar.

Así, después de proponer la transición hacia el PCM y la consiguiente *reforma de la educación escolar* globalmente considerada, la TAD plantea un importante cambio curricular *disciplinar* compatible con el PCM que se materializará en cambios curriculares *locales*.

Los medios o estrategias didácticas que plantea el paradigma de la MM para vehicular la propuesta curricular que prescribe, se sustentan en

[3] En Gascón (1994, 2001) se describe una versión primitiva del *paradigma de la MM*, caracterizando *cuatro estadios* de la actividad de MM e identificando su objetivo con la obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado.

los REI como *dispositivos didácticos* muy flexibles y especialmente adecuados para superar las restricciones que inciden sobre la vida institucional de la MM. En efecto, los REI instauran explícitamente una posible *razón de ser* de las obras, su trasfondo problemático, en el corazón del proceso de estudio y potencian las *dialécticas* o *gestos del estudio* (especialmente las denominadas *cuestiones-respuestas*, *medios-media* e *individuo-colectivo*) como metodología que está en el origen de la actividad de MM y, en general, de la construcción de todo conocimiento científico.

En síntesis, esta estrategia didáctica está basada en REI sustentados en el modelo epistemológico general de la MM y constituye un medio para acercarse a los objetivos del PCM. En este nivel disciplinar, si las cuestiones generatrices se eligen con la intención de que su indagación conduzca a «cubrir cierto programa de estudio» (Rodríguez, 2005; Barquero, 2009; Serrano, 2013), entonces los REI no son completamente *abiertos*. Pero esta importante restricción institucional queda relativizada porque las obras O_j que se estudian para responder a dichas cuestiones, así como las relaciones que mantienen entre sí y con el resto de obras, lejos de estar completamente determinadas a priori, *son reconstruidas y pueden ser transformadas completamente* como resultado de los procesos de MM.

4.2. Fines, medios y fenómenos didácticos específicos

La propuesta curricular que aporta el paradigma didáctico-matemático que propone la TAD no se agota en el nivel disciplinar. Este paradigma, también puede responder a fenómenos que emergen en los niveles de codeterminación que se corresponden con las diferentes *áreas* y *sectores* de la matemática escolar como, por ejemplo: el aislamiento de la *proporcionalidad* (García, 2005); la identificación del *álgebra elemental* con la aritmética generalizada (Bolea, 2002); la desarticulación entre el álgebra elemental y la *modelización funcional* (Ruiz-Munzón, 2010); la reducción de la razón de ser de los *sistemas de numeración* a la mera designación de los números (Sierra, 2006); la ausencia escolar de una razón de ser del *cálculo diferencial elemental* que sea coherente con el papel que desempeña en la actividad científica (Lucas, 2015); o la desarticulación entre los *números y la medida de magnitudes* (Licera, 2017). Estos fenómenos, aunque en cierto sentido pueden considerarse como «ejemplares» de fenómenos emergentes a nivel disciplinar, no pueden ser descritos ni, mucho menos, explicados utilizando únicamente un modelo epistemológico *general* de las matemáticas.

De hecho, en múltiples trabajos desarrollados en el marco de la TAD se ha constatado que para profundizar en el estudio de estos y otros fenómenos se requiere construir modelos epistemológicos específicos, relativos al área o sector correspondiente de la matemática escolar. Se trata de los denominados *modelos epistemológicos de referencia* (MER) que permiten sacar a la luz los citados fenómenos y formular y abordar los problemas correspondientes.

En estos trabajos, la cuestión Q que genera el REI y las obras O_j que se necesitan para analizar la relevancia de las respuestas establecidas $R_i^{\lozenge}$, para aportar respuestas a las cuestiones derivadas Q_k que van surgiendo a lo largo del REI y, en última instancia, para construir una respuesta $R^{\heartsuit}$ a la cuestión Q, no son en absoluto independientes. Pero, de nuevo, esta dependencia no puede describirse simplemente diciendo que Q se ha elegido para que la comunidad de estudio se encuentre con determinadas obras O_j *designadas de antemano*. En realidad Q se ha elegido para generar un REI con dos objetivos simultáneos e inseparables: *reconstruir* en una dirección determinada las obras O_j y las relaciones entre ellas (asignándoles en muchos casos una razón de ser alternativa), lo que puede interpretarse como una *propuesta de cambio curricular local*; e instaurar las condiciones que permitan diseñar y gestionar un proceso de estudio que no esté limitado por determinadas restricciones didácticas que aparecen cuando se lleva a cabo el estudio escolar habitual de las obras O_j, lo que puede interpretarse como «responder a un fenómeno didáctico», sacarlo a la luz y empezar a analizarlo.

Las estrategias didácticas que se utilizan en estos niveles más específicos se derivan de las propias del paradigma de la MM que, a su vez, constituyen una aplicación particular de las que se proponen en el PCM.

5. ¿Es posible evaluar una propuesta curricular?

En síntesis, la TAD, al propugnar la transición del paradigma de la visita de las obras al PCM, apunta hacia un importante cambio curricular global –tanto de los fines educativos como de los medios– sin hacer distinción entre disciplinas ni privilegiar ninguna de ellas. Obviamente, la elección del PCM se sustenta en la forma como la TAD interpreta las funciones que «deberían desempeñar» el conocimiento y la educación escolar en nuestra sociedad, en coherencia con ciertos principios que se asumen.

A nivel disciplinar, se propone una reforma curricular de las matemáticas basada en el paradigma de la MM y, en los niveles más específicos, la TAD plantea importantes cambios curriculares locales como consecuencia de la reconstrucción (o redefinición) de ciertas obras y de las nuevas relaciones que se establecen entre ellas. Obviamente esta propuesta curricular está guiada por la forma como la TAD interpreta las matemáticas y la educación matemática en coherencia con el PCM y con múltiples resultados de investigaciones anteriores.

En consecuencia, la evaluación de esta propuesta curricular deberá hacerse a la luz de la praxis científica de la TAD y *en el ámbito del paradigma didáctico del que surge*, por lo que se formulará mediante criterios de *coherencia interna* más que con *juicios de valor*, lo que compromete la hipotética comparación entre dos propuestas curriculares rivales provenientes de teorías didácticas diferentes.

En este punto parece lógico plantearse si sería posible, al menos teóricamente, abordar la *evaluación de la eficacia* de los medios que propugna una propuesta curricular concreta relativa a cierto dominio del conocimiento. Para que esto fuese posible, deberían cumplirse tres condiciones: (1) explicitar un *fin* u *objetivo educativo* así como indicadores empíricos que revelen en qué grado se ha alcanzado; (2) llevar a cabo una estrategia para diseñar y construir determinados *medios* u organizaciones didácticas potencialmente útiles para alcanzar dicho objetivo; (3) plantear un *procedimiento metodológico* para intentar probar hasta qué punto dichos *medios* son efectivamente adecuados para alcanzar el *fin* propuesto de antemano.

Se trata, sin duda, de un objetivo ambicioso que deberíamos considerar como el primer paso para evaluar científicamente una propuesta curricular.

Referencias

Barquero, B. (2009). Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. (Tesis de doctorado). Universitat Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática, Educação Matemática-Pesquisa, 15(1), 1-28.

Bolea, P. (2002). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. (Tesis de doctorado). Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories et empiries, En J.L. Dorier (Ed.): Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques (pp. 23-40). Grenoble : Éditions la Pensée Sauvage.

Bosch, M., Gascón, J. & Nicolás, P. (en prensa). Questioning mathematical knowledge in different didactic paradigms: the case of Group Theory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach, in R. Douady and A. Mercier (eds.), Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 131-167.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. En J.L. Dorier (Ed.), Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. http://yves.chevallard.free.fr.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4). (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, 2007 (pp. 705-746). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2013). Una aproximación a la teoría antropológica de lo didáctico. Apuntes para una escuela venidera. Curso impartido en las I Jornadas de Estudio en Educación Matemática. Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba (Argentina).

Durkheim, E. (1924/1991). Educació i Sociologia. Barcelona: Eumo Editorial.

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad. (Tesis de doctorado). Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. (Tesis de doctorado). Universidad de Jaén.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. and Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. ZDM International Journal on Mathematics Education, 38(3), 226-246.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. Educación Matemática, 6(3), 37-51.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4(2), 129-159.

Gascón, J. & Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. For the Learning of Mathematics, 37 (3), 26-30.

Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Editorial.

Licera, R.M. (2017). Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado (Tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).

Lucas, C. (2015). Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional. (Tesis de doctorado). Universidad de Vigo.

Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. (Tesis de doctorado). Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz-Munzón, N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. (Tesis de doctorado). Universitat Autònoma de Barcelona.

Serrano, L. (2013). La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica. (Tesis de doctorado). Universitat Ramon Llull. Barcelona.

Sierra, T. A. (2006). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. (Tesis de doctorado). Universidad Complutense de Madrid.

Ostensifs et calcul soustractif à l'école élémentaire

Anne-Marie Rinaldi
LABORATOIRE ANDRE REVUZ , Université Paris Diderot, France

Abstract. My thesis work within the framework of the Anthropological Theory of Didactics allowed me to build a mathematical organization of reference around the subtractive calculation and to elaborate an engineering for the CE2, trying to remain rather close to the practices of the teaching ordinary. The evolution of students 'productions and teachers' speeches on a set of sequences makes it possible to question the use of ostensives such as arithmetic writings and diagrams with the number line in order to describe, validate and evaluate a set of techniques of mental calculation.

Resumo. Mi trabajo de tesis en el marco de la Teoría Antropológica de la Didáctica me permitió construir una organización matemática de referencia alrededor del cálculo sustractiv o y. las escrituras elaborar una ingeniería para la CE2, tratando de estar bastante cerca de las prácticas de la educación ordinaria. La evolución de las producciones estudiantiles y de los discursos de los profesores sobre un conjunto de secuencias permite cuestionar el uso de ostensivos como aritméticas y los diagramas numéricos para describir, validar y evaluar un conjunto de técnicas cálculo mental.

Résumé. Mon travail de thèse dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique m'a permis de construire une organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif et d'élaborer une ingénierie pour le CE2, en cherchant à rester assez proche des pratiques de l'enseignement ordinaire. L'évolution des productions des élèves et des discours des enseignants sur un ensemble de séquences permet de questionner l'usage d'ostensifs tels que les écritures arithmétiques et les schémas avec la droite numérique dans le but de décrire, valider et évaluer un ensemble de techniques de calcul mental.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

1. Introduction

Notre contribution relève de l'axe 3 dans le sens où nous revenons sur des questions relatives à l'enseignement du calcul soustractif, en réponse à un problème professionnel repéré à partir d'observations de pratiques de classe.

Le calcul soustractif mental et posé est un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques au vu des difficultés d'apprentissages persistantes des élèves notament en début de cycle 3 (pour des élèves ayant de 8 à 10 ans). En effet si on se réfère aux résultats des évaluations TIMS (2016), aux travaux de Maurel & Sackur (2010), les calculs soustractifs posés ne sont pas maîtrisés par tous les élèves : *« Ils font la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas. »* C'est ainsi que pour effectuer $53 - 27$, ils vont effectuer $7 - 3$ et trouver 34 à la place de 26. Par ailleurs, en calcul mental, pour Butlen & Charles-Pézard (2007), les élèves à qui on n'a pas appris à faire autrement *: « privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête, en second lieu des procédures mobilisant des décompositions canoniques des nombres. »* Cela est sans conséquence pour effectuer par exemple $53 - 21 = 50 - 20 + 3 - 1$ mais problématique pour effectuer le calcul proposé ci-dessus $53 - 27$.

Dans ce contexte, nos travaux de thèse (Rinaldi, 2106) nous ont amené à identifier la nature des savoirs à enseigner pour développer la valence pragmatique et épistémique du calcul (Artigues, 2005) et à analyser comment ces savoirs - les désignations des nombres, les techniques et justifications de techniques - étaient mobilisés dans des séances de calcul (mental et posé) « ordinaires » conduites dans trois classes de CE2. L'analyse des praxéologies observées nous a alors conduit à concevoir une ingénierie - basée sur certains ostensifs et certains types de tâches- et à la mettre en œuvre dans deux des classes observées. Les résultats obtenus permettent de mesurer l'impact sur les apprentissages des élèves, d'un travail régulier et progressif sur les écritures arithmétiques. Ils montrent également la nécessité d'accompagner les enseignants dans un changement de pratique. En ce sens, la recherche étudie l'évolution des praxéologies des professeurs mettant en œuvre une ingénierie didactique favorisant les discours technologiques.

2. Cadre théorique et méthodologie

Pour conduire la recherche, nous nous sommes placés principalement dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique. Nous avons intégré le concept d'organisation mathématique qui permet selon Chevallard (Chevallard, 1999) de caractériser l'activité mathématique et le concept d'organisation didactique qui renvoie aux différents moments de l'étude. Nous avons également utilisé le concept d'organisation mathématique de référence. L'organisation mathématique de référence selon Bosch et Gascon (Bosch & Gascon, 2005) permet au chercheur (pour un sujet donné : ici le calcul soustractif sur les entiers naturels) d'identifier à partir d'une étude épistémologique et didactique l'ensemble des savoirs à enseigner. Dans la recherche, cette organisation mathématique de référence a servi pour construire une organisation mathématique conforme à la référence et comme outil d'analyse.

Nous avons également utilisé les concepts de contrat, d'habitude et de régularité des pratiques empruntés à Aline Robert (Robert, 2013) pour connaitre les pratiques de trois enseignants de CE2 et le concept de zone proximale de développement des pratiques pour concevoir l'organisation de l'étude sans trop nous éloigner des pratiques de l'enseignement ordinaire.

Un autre concept, celui d'ingénierie (Artigue, 2011) nous a servi à définir une méthodologie générale de mise à l'épreuve et d'analyse.

Cette présentation générale étant faite, il nous semble important de revenir précisément sur la composition de l'organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif car celle-ci est la clef de voute de notre recherche.

2.1. Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

✓ La première organisation OM1 regroupe les tâches propres à la production de calculs. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990). Exemple : j'avais 132€ avant de dépenser 58€, combien me reste-t-il ?

✓ La seconde organisation OM2 regroupe les tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3. Exemple : traduire *la différence entre cent-trente-deux et cinquante-huit* par une écriture arithmétique.

✓ La troisième organisation OM3 regroupe les tâches qui vont consister à effectuer un calcul. Exemple : calculer $132 - 58$.

✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisées donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005). Exemple : réécrire $137 - 58$ en décomposant le nombre 58.

Le schéma ci-dessous met en avant les liens entre les différentes organisations mathématiques locales :

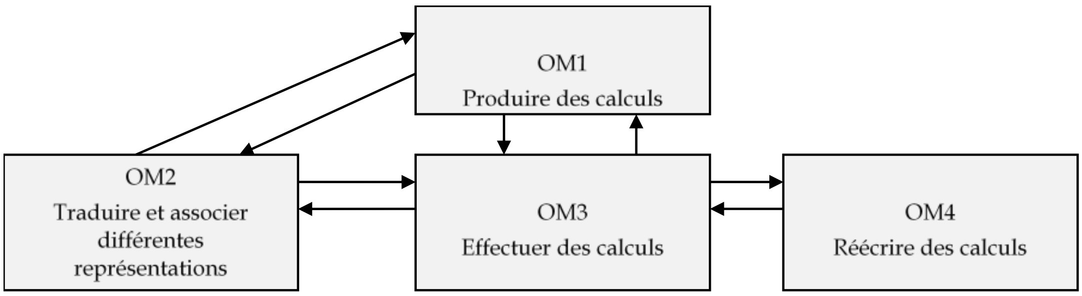


Figure 1. Liens entre les organisations locales propres au calcul soustractif

En rapport avec la recherche, nous avons particulièrement développé l'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs (OM3). Nous avons identifié différents types de tâches. Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre (Ta−□), soustraire un multiple de dix (Ta−□0), soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□) puis soustraire un nombre à trois chiffres (Ta−□□□).

Pour chaque type de tâches, nous avons ensuite recensé les techniques potentielles en nous appuyant sur les travaux de Fuson et al. (1997), Carpenter et al. (1998), Klein et al. (1998) et Thompson (1999). Nous avons regroupé les techniques citées autour de quatre technologies savantes.

La première technologie Θ_{DD} s'appuie sur la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, le principe décimal et le principe de position de la numération décimale, les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010} et $(\tau_{1010})'$. τ_{1010} est une technique par décomposition canonique des deux nombres qui consiste à calculer des différences partielles sur des multiples de 100, de 10, de 1 et à les ajouter. Exemple : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3) = (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$. $(\tau_{1010})'$ est une technique par décomposition du premier nombre et décomposition canonique du nombre à soustraire qui se rapproche de τ_{1010}. Exemple : $165 - 27 = (100 + 50 + 15) - (20 + 7) = (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$.

La seconde technologie Θ_D s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle nécessite de décomposer un seul des deux nombres (le plus petit). Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}. τ_{N10} est une technique séquentielle qui consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire. Exemple : $125 - 23 = 125 - (20 + 3) = (125 - 20) - 3$. τ_{A10} est une technique séquentielle où on décompose le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer. Exemples : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ ou $123 - 70 = 123 - (20 + 50) = (123 - 20) - 50$.
τ_{N10C} est également une technique séquentielle où on remplace le nombre à soustraire b par un multiple de dix ou de cent supérieur à b et où on compense le surplus. Exemple : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$.

La troisième technologie $\Theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$. $\tau_{SOU/ADD}$ est une technique par inversion qui consiste à remplacer une soustraction par une addition à trou. Exemple : pour calculer $125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125.

La dernière technologie Θ_{AN} s'appuie sur la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN} et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, un ou plusieurs multiples de dix. τ_{AN} est une technique par translation qui consiste à ajouter (respectivement soustraire) un même nombre à chaque terme du calcul soustractif de façon à transformer le plus petit en un multiple de dix ou de cent.

Parallèlement, nous avons cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts selon Bosch et Chevallard (1999) pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver) en référence à l'article de Castella et Romo Vasquez (2011).

En nous basant sur les études de Teppo & Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis & Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008) nous avons émis plusieurs hypothèses. La droite numérique vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles. La droite numérique graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure. Les écritures chiffrées (EC) et les arbres permettant eux de valider toutes les techniques.

Le cadre théorique fixé, nous avons opté pour une méthodologie dont nous énonçons les grands axes dans le paragraphe suivant.

2.2. Méthodologie

Après avoir construit l'organisation mathématique de référence, nous avons utilisé et mis à l'épreuve cet outil théorique pour analyser les manuels et les pratiques spécifiques de trois enseignants. Ainsi, nous avons pu nous appuyer sur cette étude et sur une connaissance des contrats et habitudes des trois enseignants « observés » pour nourrir l'organisation didactique de l'ingénierie. L'organisation mathématique étant elle fondée sur l'organisation mathématique de référence. Pour finir, deux des trois enseignants ont accepté d'expérimenter l'ingénierie dans leurs classes respectives.

3. Présentation de l'ingénierie

L'ingénierie vise l'explicitation des éléments théoriques en jeu dans l'effectuation de calculs et à agréger les organisations mathématiques locales (confère figure1) pour permettre aux élèves de développer la valence pragmatique et épistémique du calcul. Etant donné qu'elle s'appuie sur une meilleure connaissance des pratiques enseignantes, et vise indirectement à faire évoluer leurs pratiques, nous allons donner quelques éléments prélevés suite à l'observation conduite dans trois classes de CE2 avant de présenter les premières séquences de l'ingénierie, celles qui introduisent les écritures arithmétiques.

3.1. Eléments prélevés suite aux observations de classe

La valence pragmatique du calcul est prédominante dans le sens où les enseignants cherchent avant tout à ce que les élèves calculent vite et bien. Les corrections étant là surtout pour valider les résultats. Peu de synthèses autour des techniques sont mises en place. Par ailleurs, dans les séances de calcul mental que nous avons observées, les enseignants proposaient des séries de calcul pour s'entrainer à soustraire sept, soustraire des multiples de dix, soustraire un nombre à deux chiffres, donc des tâches non isolées et toutes d'un même type. Le travail en calcul mental était conduit essentiellement à l'oral, et par la même ne facilitait pas la réécriture de calcul. Sur l'ensemble des techniques enseignées, on ne retrouvait pas de technique s'appuyant sur la propriété de conservation des écarts. Un dernier point : les enseignants alors qu'ils n'étaient pas demandeurs initialement d'un autre projet d'enseignement ont accepté dans un premier temps de mettre en œuvre des *scénarii* que nous leur avions proposé (entre autres sur la propriété de conservation des écarts) et dans un second temps d'expérimenter l'ingénierie dont nous présentons ci-dessous les deux premières séquences.

3.2. Introduction des écritures arithmétiques

Le premier bloc d'enseignement correspond à l'étude de deux types de tâches : soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−□) et soustraire un multiple de dix (Ta−□0). Les moments correspondants à cette étude sont des moments de reprise au sens de Larguier (2009) car les élèves ont déjà rencontré ces types de tâches. Il s'agit alors de « ne pas reprendre totalement l'étude du thème et de s'efforcer de faire apparaitre le « nouveau à étudier » par rapport à « l'ancien ». La mise en scène choisie est directement inspirée d'une pratique d'un enseignant (pratique observée). Trois séries de quatre calculs sont donnés à chercher individuellement. Entre deux séries, un temps de restitution face au groupe classe est effectué.

En revanche, la consigne donnée aux élèves est modifiée. L'élève ne doit pas se contenter d'écrire le résultat. L'élève doit écrire le résultat et décrire la technique mise en œuvre pour effectuer le calcul. La nature des quatre calculs de chaque série est un début d'assortiment (Genestoux, 2002). En effet sur les quatre calculs, j'ai fait en sortes d'assortir les trois premiers. C'est ainsi, que dans la première série composée des quatre calculs suivants $48-5$; $59-2$; $328-6$ et $70-6$, pour les trois premiers calculs, le nombre à soustraire est volontairement inférieur au chiffre des unités du nombre auquel on soustrait. τ_{1010} est donc applicable. En revanche, pour le dernier, cette technique n'est pas applicable. La présence de ce calcul doit ainsi amener l'élève à évaluer la technique τ_{1010} et à prendre en compte la portée de cette technique.

Les productions et leurs évolutions sur plusieurs séquences vont permettre alors d'analyser la nature des techniques, des ostensifs et des éléments théoriques utilisés par les élèves et parallèlement les éléments institutionnalisés par les enseignants.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons des éléments d'analyse suite aux expérimentations conduites dans les classes A et B.

4. Analyse de l'ingénierie

Les expérimentations ont commencé alors que les enseignants des classes A et B n'avaient pas encore abordé le calcul soustractif. Ils avaient travaillé sur le calcul additif et la numération (lecture, écriture et décomposition des nombres). Les séquences de l'ingénierie se sont enchainées, sept séquences de deux voire trois séances de 45 minutes chacune. Les données dont nous disposons sont toutes les productions écrites des élèves et les enregistrements vidéo d'une à deux séances par semaine dans chaque classe. Elles nous amènent à questionner l'usage des écritures arithmétiques à différents moments de l'étude.

4.1. Analyse relative à l'étude de Ta−□

Le type de tâches qui consiste à soustraire un nombre inférieur à dix (Ta−□) a été abordé lors de la première séquence. Dans la classe A, pour effectuer le calcul 48− 55 (premier calcul de la première séance), comme l'enseignant n'avait pas précisé aux élèves qu'ils ne devaient pas poser d'opérations en colonne, presque les trois quarts des élèves (3/17) vont s'emparer de l'algorithme. A l'inverse, dans la classe B, seulement 2 élèves sur 29 posent leur calcul en colonne.

Par ailleurs, sur beaucoup de productions la technique n'est pas identifiée car les élèves se contentent d'indiquer qu'ils « enlèvent cinq à quarante-huit » pour obtenir quarante-trois. On observe également que la technique attendue, basée sur la décomposition est présente dans les deux classes. En effet, nous nous sommes basées sur les discours des élèves pour l'affirmer. Deux types de discours sont présents. Un type de discours où les nombres sont pris chiffre à chiffre. Un autre type où le nombre de départ 48 est décomposé additivement. Pour illustrer ce propos, nous avons sélectionné les productions suivantes :

Nombres considérés chiffres à chiffres	Nombres décomposés additivement
dans l'unittée de 8 j'ai enlever 5 et j'ai trouver 3 donc 43 8-5=3, 48-5=43 48-5 $\boxed{3}$	Je ~~vais~~ ses que ~~3-3=~~ ~~3+7~~ 3-5=3 et aprés je rajoute 40. C'est 43 car 8 c'est 3+~~8~~-5 alor on enlève le 5 et on garde le 40 on rajoute le trois au 40 et ça fait 43

Figure 2 : exemples de discours associés au calcul de 48 − 5.

Associé à ces productions, il est intéressant d'analyser les échanges entre enseignant et élève pour montrer les éléments théoriques mis en avant.

Premier échange :

L'enseignant a écrit le calcul à effectuer en ligne 48−5 au tableau.

Elève : 8 moins 5 ça fait 3 du coup ça fait 43. L'enseignant écrit la réponse 43 et relie le 8 au 5.

Enseignant : 8 moins 5, ça fait 3 dans les unités. Tu ne changes pas le 4.

Elève : Parce qu'il n'y a pas de changement de dizaine.

Enseignant : Là il n'y a pas de dizaines. L'enseignant montre l'espace devant le 5. Donc rien ne change au niveau des dizaines. Il montre le « 4 » de 48 et le « 4 » de 43.

Second échange :

Elève : Moi j'ai fait quarante plus huit après j'ai fait moins cinq et ça fait quarante-trois.

Enseignant : Vous avez compris ce qu'il a fait. Il sait que quarante-huit, c'est quarante plus huit, ensuite il a juste fait huit moins cinq. Tu as fait huit moins cinq. Tu as trouvé trois, tu as ajouté quarante. Tu trouves quarante-trois.

En considérant le premier échange, notons que le fait de relier les chiffres 8 et 5 permet de « montrer » comment la technique s'applique sans pour autant justifier celle-ci.

A contrario, dans le second échange, le fait d'indiquer que quarante-huit est égal à quarante plus huit est un début de justification. Cependant cette justification n'est pas menée jusqu'au bout car il n'y a pas de tâche propre à la réécriture de proposée. $48-5=40+8-5$ n'est pas une égalité numérique notée au tableau.

4.2. Analyse relative à l'étude de Ta−□0

En nous basant sur l'ensemble des analyses relatives à l'étude du type de tâches soustraire un multiple de dix, nous constatons que la majorité des élèves de chaque classe utilise une décomposition du nombre à soustraire. Cela peut s'expliquer par le fait qu'ils ont travaillé au préalable sur des techniques séquentielles privilégiant le passage à la dizaine entière inférieure pour effectuer des calculs tels que 42–7. Les difficultés rencontrées quand elles existent sont liées au choix du nombre pivot. C'est ainsi que pour calculer 437–50, certains élèves vont commencer par soustraire 37 pour « arriver » à une centaine entière et être bloqués pour calculer le complément de 37 à 50 ou pour soustraire une fois effectué ce calcul, 13 au nombre 400. Par ailleurs, l'utilisation de la droite numérique n'est pas forcément d'une aide majeure. Elle permet à l'élève de s'engager dans un calcul, de le commencer sans lui permettre de le mener jusqu'au bout. En ce sens elle fait illusion, écran.

4.3. Analyse relative à l'étude de Ta−□□

En nous basant sur les productions écrites des élèves et sur les moments de restitution filmés à l'occasion de la sixième séquence, nous constatons que le fait d’introduire puis d’utiliser régulièrement un nouveau type de tâches qui consistait à décrire la technique utilisée pour effectuer un calcul en utilisant les écritures arithmétiques ou des schémas avec appui sur la droite numérique a permis à l’élève d’être mieux outillé pour expliquer aux autres les différents calculs qu’il a été amené à enchainer. L’enseignant, pour sa part, peut amener le groupe d’élèves à évaluer la technique et décider de l’instituer ou non. C’est ainsi que les enseignants des classes A et B qui jusqu’alors reprenaient uniquement à l’oral les propositions des élèves sans rien noter au tableau, s’engagent davantage dans un travail de réécriture. Ce travail de réécriture permet de mettre en avant les décompositions des nombres et les propriétés des opérations utilisées. Il permet d’engager un travail sur la validation des techniques mises en œuvre.

De surcroit, on constate que les techniques exposées sont variées. Pour illustrer ce dernier point, voici des éléments de discours recueillis dans la classe B au sujet du calcul de $52-16$. Ces éléments sont retranscrits dans l’ordre chronologiques et révèlent :

- ✓ L’utilisation de τ_{AN}

Elève : « J’ai rajouté quatre aux deux nombres »
Enseignant : « Pourquoi as-tu ajouté quatre ? Quel nombre dois-tu regarder pour savoir combien ajouter ? »
Elève : « Seize »
Enseignant : « Oui, elle s’est dit seize c’est près de vingt. Soixante-deux plus quatre égal soixante-six moins vingt, quarante-six »
Le nouveau calcul est noté au tableau : 66–20=46.

- ✓ L’utilisation de τ_{A10}

Elève : « J’ai fait un schéma ». L’enseignant trace un trait horizontal.
Enseignant : « Je ne sais pas combien d’étapes tu as fait. »
Elève : « J’en ai fait trois. J’ai fait soixante-deux moins deux. J’arrive à soixante. L’enseignant marque un premier bond sur le schéma.
Elève : « J’ai fait moins quatorze ».
Enseignant : « Tu arrives à le faire d’un coup ?
Elève : « J’ai fait moins dix. J’arrive à cinquante. Cinquante moins quatre, quarante-six. »

- ✓ L’utilisation de τ_{N01C}

Elève : « Moi j’ai fait soixante-deux plus vingt moins quatre ». Ce à quoi l’enseignant réplique qu’il peut le noter.

Nous présentons ci-dessous la photographie du tableau suite à cette série d’échanges.

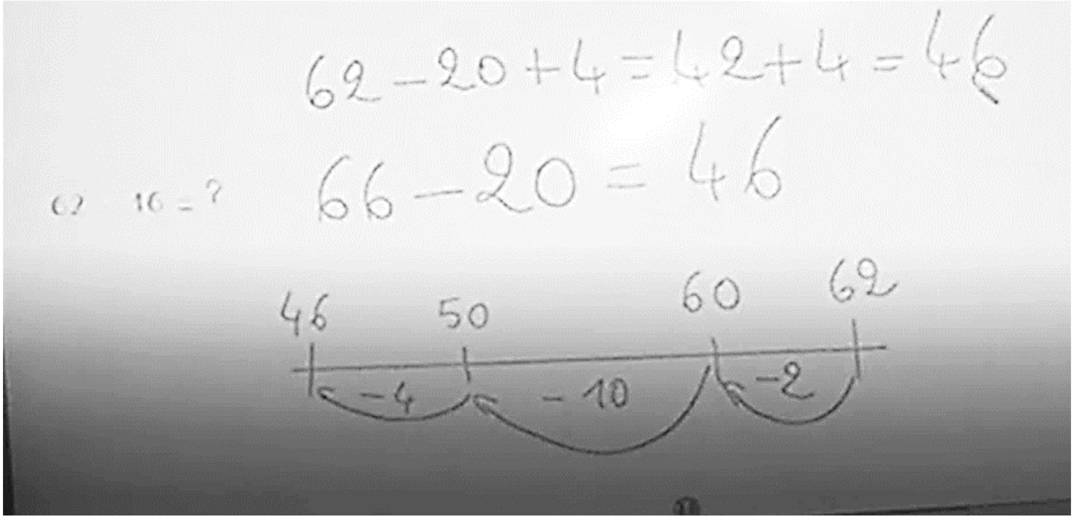


Figure 3 : utilisations des écritures chiffrées et de la droite numérique pour calculer $62-16$

Cette trace écrite permet d’expliciter avec d’autres ostensifs que les mots de la langue française les différentes étapes qui ont conduit à trouver le résultat d’un calcul. Les ostensifs que sont les écritures arithmétiques ont l’avantage d’être très économiques, et par la même, voués à être de plus en plus utilisés dans la suite de la scolarité.

5. Conclusion

La confrontation entre les résultats obtenus à l’évaluation diagnostique et à l’évaluation finale permet de mesurer les effets positifs d’un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages des élèves. En effet, plus des trois quarts des élèves, les deux classes confondues arrivent à indiquer avec précision la technique qu’ils choisissent de mettre en œuvre. Ce n’était pas le cas avant d’avoir entamé l’étude. Ils se contentaient alors, de noter le résultat et utilisaient bien souvent le comptage pour le trouver. Ce n’était pas non plus le cas au tout début de l’étude car les enseignants des classes A et B pratiquaient beaucoup d’échanges oraux et n’engageaient pas un travail de réécriture. Le contrat didactique a évolué car la volonté d’expliciter les savoirs mathématiques qui se cachent derrière chaque calcul soustractif a été affirmée. Les *scenarii* proposés aux enseignants - par le chercheur- s’appuyaient sur l’utilisation des écritures arithmétiques, d’arbres à calculs et de la droite numérique pour décrire, mettre en œuvre et éventuellement valider les techniques attendues pour chaque calcul. Ces *scenarii* qui ont servi d'appui aux enseignants pour conduire les séances de calcul soustractif méritent d'être questionnés davantage et retravaillés. La mise en relation par exemple des ostensifs n'est pas assez explicite et leur valence instrumentale et sémiotique peu discutées. En ce sens, le travail d'accompagnement des changements de pratique de l'enseignement du calcul en CE2 amorcé par le chercheur- dans son travail de thèse- est à poursuivre et à enrichir avec d'autres travaux qui s'intéressent à la théorie anthropologique du didactique et à la professionnalisation du métier d'enseignant.

Références

Artigue, M.(2005). L'intelligence du calcul. In conférence à l'Université d'été de mathématiques, Saint Flour. Disponible en ligne : http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Texte_02.doc (consulté le 11/07/15).

Artigue, M.(2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P., Vandebrouck F. & Wozniak F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p.15-25). Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bobis, J., Bobis, E. (2005). *The empty number line : Making children's thinking visible . Disponible en ligne: file:///C:/Users/camille/AppData/Local/Microsoft/Windows/INetCache/IE/CFI21X57/Bobis%20J%20and%20E%202005.pdf (consulté le 01/08/ 2015).*

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.

Bosch, M., Gascon, J(2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12ième Ecole d'été* *de didactique des mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 aout 2003* (p. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Butlen, D., Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N,* 79, 7-32.

Carpenter, T.-P., Franke, M.- L., Jacobs, V.-R., Fennema, E., Empson, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), 3-20.

Castela, C., Romo Vazquez, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 31(1), 79-130.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16.* 411- 424.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T.-P., Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, Journal for Research in Mathematics Education, 25, 443-471.

Genestoux, F. (2002). Les assortiments didactiques. TD2 du thème 2. *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 177-186). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Klein, A.-S., Beishuizen, M., Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443-464.

Larguier, M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Université de Montpellier II. Sciences et Techniques du Languedoc.

Maurel, M.,Sackur, C.(2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N*, *85*, 43-59.

Rinaldi, A.-M.(2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne :https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01470473/ (consulté le 21/06/ 2016).

Robert, A., Penninckx, J., Lattuati, M. (2013). Présentation d'un ouvrage. Une ressource en formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire. Petit x, 92, 49-56.

Teppo, A., Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis : the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education,* 46(1), 45-58.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Learning from ''didactikids'': an impetus for revisiting the empty number line.* Mathematics Education Research Journal, 20(3), 6–31.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. *Mathematics in School November*, 2-4.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2(3), 133-170.

Training in-service teachers: study of questions and the organization of teaching

María Rita Otero,

Viviana Carolina Llanos and Verónica Parra

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina

Abstract. We analyse the study and research carried out by N = 31 teachers in service during an on-line course in Didactics of Mathematics, about a question that could generate a Study and research path (SRP). The teachers studied the question individually and in groups. Then, they had to organize a possible teaching, adapted to an institution well known to them .The written texts produced by the teachers are analysed by means of two types of techniques: one qualitative and one based on lexicometric statistical methods. In the long term, the aim of this research is to understand the potential and difficulties of in-service teachers to organize teaching based on questions.

Resumen. Se analiza el estudio y la investigación realizadas por N = 31 profesores en servicio durante un curso on-line de Didáctica de las Matemáticas, acerca de una cuestión que podría engendrar un REI. La pregunta se estudia de manera individual y grupal, y luego se propone organizar una posible enseñanza adaptada a una institución conocida por los profesores, a partir de la cuestión estudiada. Los textos escritos producidos por los profesores se analizan empleando dos tipos de técnicas: una cualitativa y otra basada en métodos estadísticos lexicométricos. A largo plazo, el objetivo de esta investigación es comprender las potencialidades y dificultades de los profesores en servicio para organizar una enseñanza basada en preguntas.

Résumé Nous analysons l'étude et la recherche menées par N = 31 enseignants en service lors d'un cours en ligne sur la didactique des mathématiques, autour d'une question qui pourrait générer un PER. Les enseignants étudient la question individuellement et en groupe, puis il est proposé d'organiser un possible enseignement adapté à une institution bien connue par les enseignants, sur la base de la question étudiée. Les textes écrits produits par les enseignants sont analysés en utilisant deux types de techniques: une qualitative et l'autre basée sur des méthodes statistiques lexico métriques. Dans le long terme, cette recherche essaie de comprendre le potentiel et les difficultés des enseignants pendant l'organisation d'un enseignement basé sur des questions.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

1. Introduction

The importance that the training of the mathematics teacher includes knowledge that exceeds the mathematical contents that a teacher should teach, has been emphasized by numerous authors (Cirade, 2006; Chevallard & Cirade, 2009; Chevallard, 2013; Gómez, 2007; Llinares, Valls & Roig, 2008; Godino, 2009; Ribeiro, Monteiro & Carrillo, 2010; Font, 2011). The notion of Pedagogical Content Knowledge (PCK) developed by Shulman (1987), which specifically in mathematics, originates Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), has been recognized as an essential mathematical knowledge in teacher training (Ball, 2000; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008). In particular, Ruiz, Sierra, Bosch & Gascón (2014) have described the difficulties and the challenges to define the praxeological equipment of mathematics teachers.

In a university context of teacher training, the theoretical framework of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) is adopted while a course of Didactics of Mathematics is developed, where the fundamental notions of ATD are studied. It is expected that the course could help in-service teachers to conceive and organize mathematics teaching involving some gestures proper to the Paradigm of Questioning the World (PQW) (Chevallard, 2013). Specifically, this paper analyses the study performed by these teachers related to an issue that could generate a SRP: First, the teachers studied the question individually and in groups. Then, they should analyse and to propose a possible teaching adapted to a specific institution, based on the studied question. The work aims to describe the potential and difficulties of the teachers while they plan teaching according to certain gestures of the PQW. In the long term the research aims to propose possible aids to the study for in-service teachers training. This leads to the question: which mathematical praxeologies and which organization of teaching are proposed by these teachers concerning the studied question?

The investigations developed within the framework of the ATD (Romo, Barquero & Bosch, 2016; Ruiz, Sierra, Bosch & Gascón, 2014; Otero, Llanos, Gazzola, Arlego, 2016) have highlighted the relevance of disposing of relatively tested SRP for the teacher training. Here, we select a question developed by the IREM of Poitiers (Bellenoué et al. 2014) that is a part of a book intended for teachers at the French secondary level. The text is inspired by Chevallard's ideas about the functionality of mathematics in the education systems. Below we briefly present the generative question Q_0 and the approach adopted in this work.

2. The SRP

The question Q_0: how does a parabolic antenna work? has been proposed to the students of the first year of the French secondary level (15-16 years old). A possible praxeological model of reference refers to the problem of the construction of the tangents to a curve from the analytical geometry. In addition to re-discovering some properties of synthetic and analytical geometry, the reflection of light on different surfaces from physical and wave Optics could be studied. The explanations of how various transmission and light reception equipment being essentials for the current communications operate; and also in other uses, in domains like architecture, automobiles design, solar energy, etc, are also involved. According to the proposal of Bellenoué et al. (2014) the main mathematical know-how to deal with in secondary school would be the following:

> Déterminer une équation de cercle à partir d'éléments caractéristiques ; déterminer une équation de droite ; déterminer la position relative de deux droites ; déterminer la forme canonique d'un trinôme du second degré ; résoudre une équation de second degré ; déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de deux courbes ; démontrer qu'une droite est tangente à un cercle, à une parabole, à une hyperbole. (p.47).

Also, Q_0 allows to study about the historical analysis of the problem of the tangents to a curve, and the development of mathematical knowledge linked to this problem. The questions concerning the reflection of light in different surfaces, lead to the study of the conics, and of the tangents to those curves. Experiments of the reflection on different surfaces could be carried out, considering several kinds of mirrors: cylindrical, parabolic or hyperbolic. In the text above questions like: Why a surface could be considered a mirror? What types of antennas exist? What are antennas for? Which mathematical and extra-mathematical knowledge could be necessary to study the problem? are answered. The development of possible answers could include tools of the synthetic or analytical geometric framework in R^2 or R^3, among others. On the other hand, if the curves were unknown, the insufficiency of the geometric-analytical framework to determine the tangent would require to study differential calculus.

The question Q_0 has been selected because it allows to study an important part of the mathematic knowledge involved in the teachers training and at the same time, some relevant praxeologies of the secondary school syllabus in Argentine could be covered.

3. Sample and methodology

This work involves in-service mathematics teachers who attend the second year of the Bachelors in Mathematics Education (BME) at a National University in Argentina. This course, allows teachers of mathematics graduates of Institutes of Teacher Education, which are non-university institutions of teacher training, to complement their mathematical and didactic training. The BME curriculum consists of eight four-month courses spread over two years: three are Mathematics courses and the others corresponding to Didactics of Mathematics, Information and communications technologies (ICTs), Epistemology, Methodology and Cognitive Psychology. The instruction is provided completely online by means of Moodle platform. The in-service teachers (N = 31) are taking the Didactics of Mathematics course according to the BME curriculum. The course is in charge of three teachers (one teacher per ten students). Moodle allows that all the interactions between the teachers and the students are registered and stored.

In the mentioned course, fundamental notions of ATD are studied and some examples of various SRPs available and widely disseminated in the literature are analysed. During the interactions on the platform, some students said: *“it does not seem possible to manage a SRP in the real classrooms”; “for us it would be impossible to develop something like a SRP”; “it would not be possible to complete the program”; “developing a SRP is much more complicated than the problem solving”; “What role do praxeologies play?”; “How do the mathematical issues of the* *program intervene?",* etc. Due this the last month of the course was devoted to study a question that could originate a SRP as Q_0. The students grouped in six teams carried out the following tasks:

T1: Study Q_0 and prepare a possible individual written answer.

T2: Analyse and discuss the individual answer with the group and to propose a possible group written answer to Q_0.

T3: Propose in each group a possible organization of teaching by adapting the T1 and T2 answers to a given institution.

The research has an exploratory, descriptive and ethnographic character. Analysing the answers to T1, T2 and T3, we seek to identify and describe the difficulties and the most relevant drawbacks found by these in-service teachers studying Q_0 while they were planning teaching based on questions, and their abilities to teach in line with the PQW. It is not proposed to staging in classroom, because the teachers cannot introduce such a device in a period of one week, nor the course team could help them properly. The teachers responsible for the course interact with the students and make returns of each task.

In this paper, the analysis of the written group answers to T2 and T3 is presented. The analysis takes into account the questions pointed out by the teachers and the responses tagged. Two types of analysis techniques are used: one qualitative and another based on lexicometric statistical methods (Lebart, Morineau & Fenelon, 1985; Moscoloni, 2011) that contribute to triangulate the results. For reasons of space, only some results related to the questions formulated in the section 4 are proposed here. As an example, the questions and the answers to the tasks T2 and T3 proposed by the groups A and B are presented in the Table 1.

4. Questions

1. Which derived questions from Q_0 did the groups of teachers formulate and how these questions influenced the organization of the study?
2. Which answers did they enter into the medium? Where did these answers come from?
3. How was teaching from Q_0 organized by the teachers, especially concerning the constitution of the didactic medium?

4. Which praxeologies did the teachers study while they answered Q_0 for themselves? Which of these contents did they propose to study while they planned and organised teaching?

5. Some results and preliminary conclusions

Regarding the questions 1 and 2, in the beginning the groups (A, C and F) realised a search oriented by physics questions about: antennas and its types, electromagnetic waves, the reflection and refraction of waves, the wave model and the ray model of light. These groups mentioned the quadric surfaces and quickly focused their study on the cross sections. In addition, they questioned if the wave optics model or the geometric optics model would be appropriate to treat the reflection phenomena. Finally, they made the right decision adopting the geometric optics model without well justify. This also leaded to the questions: It would be necessary to study quadrics or conics? Should be the question answered in R^3 or R^2? The second option was selected really, but some of the groups directly considered conics, and another ones studied the quadrics surfaces to analyse their cross sections later, and make sense to conics study. Only the group A considered and resolved the problem of the existence and determination of the tangent to the parable, and they did it in the synthetic geometrical framework. They entered to the medium the demonstration of a theorem to establish if a line that cuts to the parable in a point would be or not the tangent in this point. Also, they visualised the tangents by means of the geometric view of GeoGebra® (https://www.geogebra.org/m/n6ZvMT6R). Thus, they used this theorem to justify that any incident beam of light (modelled by a straight line), being parallel to the axis of the parable *will be reflected* passing by the focus (modelled by another straight line).

The groups C and F, though they studied the physics questions, directly assumed the existence of a tangent at each point. They found on the internet the *"reflective property of the parable"* which is a didactic invention whose demonstration was entered to the medium without questioning https://www.geogebra.org/m/ktwEJK6D.

Some results of the groups A and B are synthesized in the Table 1. The two first columns summarizes the derived questions and the already made answers to T2, and the two latest summarizes the decisions made by these in-service teachers answering to T3.

Q_{iT2}	$A^{\lozenge}_{iT2}$	Q_{iT3} - Tasks	$A^{\lozenge}_{iT3}$
Group A			
Q_1=Q_0 *Q_2: What is and what does an antenna serve for?* *Q_3: What types of antennas are there?* *Q_4: What are parabolic antennas used for?* *Q_5: According physics. Which characteristics have the electromagnetic waves?* Q_6: *How do the electromagnetic waves propagate?* *Q_7: How are the electromagnetic waves reflected?* Q_8: *Why is the paraboloid the most appropriate surface to obtain the major directivity?* Q_9: *Which characteristics do the paraboloids have?* Q_{10}: *How to define a parable*	Functioning and types of antennas. Incident radiation and electromagnetic waves. Validity of geometric Optics model. Reflection and Refraction in geometric Optics. *"Directivity of the paraboloids"* The transition from 3D to 2D is justified by means of GeoGebra®. Analytic and synthetic Geometry	*Q_1=Q_0* *Q_7: How are waves reflected? If antennas are 3D objects. Why the information found refers to parables?* *Q_{10}: Given a straight line d and an external point F. How to determine the points placed at the same distance from the straight line and the point? How these points would be placed on the flat?* *Q_{11}: Demonstration that a parable having directrix d and focus F is symmetrical to the perpendicular line to d passing through F (focal axis).* *Given a parable and its directrix, to find the focus of the parable.* *Given a parable and its focus, find the straight line of the parable.* *Determine the tangent to a parable in any point.* *Proof: the incident beams of light parallels to the focal axis of the parabolic antenna will be reflected passing by the focus.*	Three stages are proposed: Reflection of rays on the flat. Study of parable as geometric locus (symmetry, focus and directrix, by means of GeoGebra ®). Applet of GeoGebra ® showing the reflection of the rays parallels to the focal axis of the parable.

and which characteristics does it have? Q_{11}: *Given the directrix and focus. How to determine the points of the parable?*	techniques to study the parable. The existence of the tangent to the parable at a point is justified in the synthetic frame. The reflected rays always pass through the focus.		
Group B			
Q_0 *Q_1: Mathematically, What is a quadric surface?* *Q_2: How are the quadrics classified?* *Q_3: Which are the quadrics equations?* *Q_4: Which are the equations of a paraboloid?* *Q_5: What does an antenna serve for?* *Q_6: What is a wave in physics?* *Q_7: Which are the characteristics of the electromagnetic waves?* *Q_8: How does a parabolic antenna function?* *Q_9: How do the*	Classification of Quadrics: parabolic, elliptical and hyperbolic. Traces and cross sections. Ellipse, Hyperbola Parable Parabolic Antennas. Waves The reflective surface accomplish the Snell's law. The “reflective property of the parable” justifies the reflection of	*Q_1: Which is the mathematic definition of a paraboloid?* *Q_2* *Q_3* *Q_4* *Write in GeoGebra® the equations* $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$ *and plot the paraboloids.* *Find the equations of the following hyperbolas, the coordinates of the vertices and the equations of the asymptotes:* *a. Focus (-8,0) y (8,0) and constant 6.* *b. Focus in (-6,0) y (6,0) and one vertice in (-1,0).* *Find the focus of the hyperbola:* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{7}=1$	Quadrics. Paraboloid. Ellipse, Hyperbola, Parable. Signal, satellite. Low Noise

parabolic shape of the antenna influence the reception of the signals emitted by the satellites? How rebounding and concentrating the waves in the universal Low Noise Block (LNB)? *Q_{10}: How to define a parable?* *Q_{11}: Which is the equation of a parable?* *Q_{12}: Which are the characteristics of a reflective surface?* *Q_{13}: How to demonstrate "the reflective property of the parable"?*	rays towards the focus. (https://www.geogebra.org/m/xxeRSH7H)	Q_5, Q_6, Q_7, Q_8 Q_9 Q_{12} *Q'_{13} Demonstrate the "reflective property of the ellipse and the hyperbola"*	Block (LNB), reflection.

Table 1: questions and answers of the groups A and B about T2 and T3

The groups B, D and E were different, because their questions and initial searches were mathematical. The most sophisticated group (B) begun with the question: "Mathematically, what is a quadric surface?" They entered to the medium the analytical classification of elliptical and hyperbolic paraboloids, establishing their traces. Thus, the cross-sections: ellipse, hyperbola and parable and their characteristics were studied. Just then, the group asked about the antenna types and the reflection of light. They modelled the "reflective surfaces" by means of the quadric surfaces, they also employed the "reflective property of the parable". The other two groups (D, E) also begun with mathematics questions but these were confined to the parabolic surfaces and its applications. For instance: solar kitchens, parables and the reflection phenomena. Synthesizing, in the written answers to Q_0 we identify that:

1) The search was guided by questions related to Physics or Mathematics, driven by two words: antenna and paraboloid.

2) The individual response of the majority of teachers, improved considerably in the collective task.

3) Most of the questions were of type essential like what is...? and less were of the type how? or Why? The former kind promoted closed answers and definitions.

4) The answers entered to the medium are mostly obtained on internet, especially in video format, without questioning, except by the group A that had proposed questions around the tangent to the parable.

5) Only the group A formulated the problem of tangents to a curve and resolved it for the parable in the synthetic geometric framework, while the rest of groups did not question about it. This would prevent out the possibility of treating the more general problem of tangents to a known curve or not, and with it, a possible praxeological extension from analytical geometry to differential calculus.

The lexicometric analysis and the factorial analysis of correspondences allows to locate the groups focused in physics and those focused in mathematics on the factorial plane in opposition. Words with the lowest contribution to the inertia refer to parables and equations.

Regarding the questions 3 and 4 concerning the organization of a hypothetical teaching from Q_0 it is identified that:

1) The organization proposed in T1 and T2, was reproduced in T3: the group that had beginning by physics or mathematics, retained this condition and the answers, not so the questions.

2) There was a successive reduction of the mathematical and physical issues during the transition from T2 to T3.

3) The questions were replaced by type of tasks like to determine, to calculate, to plot, and to demonstrate, which were directly answered in the proposal. This reduction is functional to the monumentalism phenomena.

4) The questions were transformed into: tasks, activities, stages, situations, responding to them, while questions could rest hidden.

5) The group D changed Q_0 by: how to build a solar kitchen?

6) The groups C, D, E and F proposed hands-on experiences and tasks.

7) The final reduction of the medium could be related to the curriculum proposed in the institution of destination: in the final version of the proposal, it has been decided to study only the contents relative to the parables in the geometric and functional frameworks.

8) The management of instruction was organized to avoid "losing" control of the medium.

9) The teachers assumed that the students will question, but also, that they should finally guide them. Thus they proposed tasks directed to control the medium M.

10) The groups more reticent to "loss of control" firstly "showed the works (O_k) to the students" and then, they proposed questions related these works O. Example: Let's observe all these paraboloids, could you say which of them have parables as cross sections?

In short, we conclude that teachers would have avoided losing control of the didactic medium. This strongly restricted the organization of teaching proposed, causing the loss of the research component that had survived until they had to think about how to organize teaching. This reduction could had aroused when these teachers had to organize teaching based on questioning. This could be due to the conditions emerging at the level of society rather than that of pedagogy, such as the more or less explicit opinion that teachers should control the didactic medium and be completely responsible for him. If the loss of control is considered dangerous by society, especially in institutions, is reasonable that teachers try to keep it, even for ecological reasons.

6. References

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51 (3)*, pp. 241-247.

Ball, D. L.; Lubienski, S. T.; Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: Richardson, V. *Handbook of Research on Teaching*. Washington: American Educational Research Association, pp. 433- 456.

Bellenoué, F.; Chevalarias, N.; Chauvin, P.; Dhérissard, S.; Ducos, C.; Gaud, D.; Grillet, M.; Jussiaume, L.; Kirch, C.; Mesnier, W. & Minet, N. (2014). *Enseigner les mathématiques en 1ère S : Trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique*. Poitiers: IREM de Poitiers.

Chevallard, Y.; Cirade, G. (2009) Pour une formation professionnelle d'université: éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation*, n. 60, pp. 51-62.

Cirade, G. (2006) Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel. Tesis : Doctorat en Didactique des Mathématiques. École doctorale de mathématiques et informatique de Marseille. Université de Provence.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2,* (2), pp. 161-182.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión,* San Cristóbal de La Laguna, 26, pp. 9-25.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* pp.13-31.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. PhD Thesis. Universidad de Granada.

Hill, H. C.; Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 4, pp. 372-400.

Lebart, L.; Morineau A. & Fenelon, J. P. (1985). *Statistique exploratoire multidimensionelle*. París: Dunod.

Llinares, S.; Valls, G. & Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática, 20 (3),* pp. 31-54.

Moscoloni, N (2011). *Las nubes de datos: métodos para analizar la complejidad*. Rosario: UNR Editora.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Gazzola, M., Arlego, M. (2016). Co-disciplinary Physics and Mathematics Research and Study Course (RSC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers. *Review of Science, Mathematics and ICT Education, 10 (2)*, 55-78.

Ribeiro, M., Monteiro, R., Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática,* 22 (2), 123- 138.

Romo A., Barquero, B.; Bosch, M. (2016). Study and research paths in online teacher professional development. First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Montpellier, France. <hal-01337881>HAL Id: hal-01337881 https://hal.archives-ouvertes.fr/.

Ruiz Olarría, A. Sierra, T. Á. Bosch, M. and Gascón, J. (2014). Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática-Mathematics Education Bulletin*, 28 (48). pp. 319-340.

Respuesta a las nuevas necesidades curriculares en Argentina desde la teoría antropológio de lo didáctico: un REI co-discplinar.

Marcelo Escobar
Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Federico Olivero y Laura Santori
Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Abstract. Analysis of the implementation of a co-disciplinary RSP in the professorship of mathematics as the first stage of the initial training to meet the needs of new curricular reforms for the *Nueva Escuela Secundaria de la provincia de Río Negro* (NESRN), Argentina, regarding the didactic devices available from the anthropological theory of the didactic (ATD). This analysis covers not only the description of the course, but also the ecological analysis of the conditions and restrictions that emerged from its implementation in the training of teachers during its two editions.

Resumen. Un análisis de la implementación de un REI co-disciplinar en el profesorado de matemáticas como primer etapa de formación inicial que permita dar respuesta a las necesidades de las nuevas reformas curriculares para la *Nueva Escuela Secundaria de la provincia de Río Negro* (NESRN), Argentina, atendiendo a los dispositivos didácticos disponibles desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Este análisis abarca, no solo la descripción del recorrido realizado, sino también el análisis ecológico de las condiciones y restricciones que emergieron de su implementación en la formación de profesores durante sus dos ediciones.

Résumé. Une analyse de l'implémentation d'un PER co-discipliner dans le professorat de mathématiques comme premier l'étape de formation initiale qui permet de donner la réponse aux nécessités des nouvelles réformes curriculares pour la *Nueva Escuela Secundaria de la provincia de Río Negro* (NESRN), Argentina, en faisant attention aux dispositifs didactiques disponibles depuis la théorie anthropologique du didactique (TAD). Cette analyse embrasse, non seulement la description du parcours réalisé, mais aussi l'analyse écologique des conditions et de restrictions qui sont sorties de son implémentation dans la formation de professeurs durant ses deux éditions.

Liste des editeurs (Eds)
Méthodes de recherche en TAD (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire.
Editorial, año

1. Modelización matemática y trabajo co-disciplinar en la educación.

La última reforma llevada a cabo en la provincia de Río Negro, Argentina, establece nuevos espacios y metodologías de trabajo para la escuela secundaria. En el Anexo I del Diseño Curricular de Escuela Secundaria de Río Negro (Ministerio de Educación de Río Negro, 2016) se puede leer: «El área de Educación Matemática tendrá como disciplina Matemática y un espacio de Taller de articulación de la Matemática con otros Campos de Conocimiento donde la disciplina comparte con otro campo disciplinar el espacio en la concreción de los modelos con los que los estudiantes explican la realidad». Si bien estos espacios no son totalmente nuevos, dado que la reforma anterior ya los había mencionado, ahora se pone especial atención al trabajo compartido en un mismo espacio áulico, del profesor de matemáticas con los demás profesores de otras áreas.

Con la implementación del nuevo diseño curricular, se solicita a los docentes nuevas metodologías y modalidades de trabajo a través de los documentos oficiales:

> El dispositivo taller constituye un espacio privilegiado para la construcción colectiva de conocimiento, que favorece la complejización de las representaciones individuales y grupales, involucrando a docentes y estudiantes en la elaboración y construcción de modelos científicos escolares, a partir del intercambio, el diálogo y el debate, propiciando así la circulación y construcción de saberes en el marco de un trabajo colaborativo. El taller nos invita a construir conocimiento de manera contextualizada y holística, a la integración de conceptos para resolver problemáticas, a la búsqueda de soluciones, incluyendo saberes provenientes de diferentes campos del conocimiento. (Ministerio de Educación de Río Negro, 2017).

Una de las principales dificultades que se suscita en este contexto es que los docentes argumentan que, en el mejor de los casos, no fueron formados para gestionar este tipo de espacios, que nunca han tenido experiencia con ellos y que no saben «qué hacer» allí. En muchas ocasiones en los espacios co-disciplinares se trabajan las disciplinas involucradas pero no integradas entre sí, sino de la manera tradicional, dedicando parte del tiempo a cada una. Así, si bien formalmente son espacios co-disciplinarios, en la práctica vuelven a las formas de trabajo tradicionales de enseñanza-aprendizaje. De esta manera, aunque se aborde un mismo problema, no existe una articulación genuina entre los saberes de ambas disciplinas, resultando finalmente miradas atomizadas que no dialogan entre sí.

Parte del problema se lo puede explicar por la falta de propuestas didácticas que integren diferentes disciplinas durante los trayectos de formación en las carreras de profesorado y, por otro lado, la ausencia casi total del trabajo de modelización en estas carreras.

Desde fines de los ‘70 y principios de los ‘80, el interés de los investigadores en educación matemática por los procesos de modelización y por la resolución de problemas aplicados ha ido en aumento (Blum & LeiB, 2007; Puig, 2006; Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Esteley & Villarreal, 2009; Mina, M. y otros, 2007). También desde la TAD se pueden citar numerosos trabajos que abordan el problema de la modelización matemática en la enseñanza (García, 2005; Lucas, 2015, Barquero, 2009, entre otros).

Coincidiendo con múltiples investigaciones que, desde enfoques muy diversos, asumen la necesidad de enseñar la matemática como herramienta de modelización al tiempo que se encuentran con grandes dificultades de su implementación en los sistemas educativos, creemos necesario poner en discusión la implementación de nuevos dispositivos didácticos y analizar sus potencialidades en el contexto de las diversas instituciones educativas. Para integrar la actividad de modelización en la enseñanza matemática la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se ha propuesto un dispositivo denominado *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Chevallard, 2004; Gascón, 2010; Otero & otros, 2013), estructurado esencialmente para hacer posible una enseñanza funcional de las matemáticas y para posibilitar su enseñanza como una actividad de modelización.

Por otro lado, se destaca la insuficiencia en la formación de profesores en lo didáctico y sus últimos desarrollos (Corica & Otero, 2014). No es suficiente desde la formación ocuparse de que los estudiantes conozcan un equipamiento praxeológico didáctico – matemático. Los futuros profesores nunca han sido expuestos a una enseñanza por REI. Consideramos que esto condiciona fuertemente el diseño e implementación de dispositivos con estas características.

En este contexto, nos planteamos la necesidad de instrumentar un espacio curricular dentro de la formación matemática del plan de profesorado que permita a los futuros profesores realizar una experiencia de modelización, mediante un REI co-disciplinar, y evaluar la riqueza de este dispositivo en la formación de profesores.

Para la concreción de este objetivo, en el caso particular de la carrera del profesorado universitario de matemática de la Universidad Nacional del Comahue (PUMa-UNCo), en la última reforma del plan de estudios aprobada en el año 2012, se crea el *Taller: Actividad Matemática y Resolución de Problemas* (AMRP). Este taller brinda un espacio donde los futuros profesores puedan vivenciar un recorrido de estudio con las características que plantea el DC-ESRN.

1.1. La propuesta de un nuevo espacio curricular en la carrera de profesorado.

El taller AMRP es un espacio curricular obligatorio de la carrera PUMa-UNCo y optativo para la carrera de profesorado en física de de la UNCo. Ambas son carreras de grado, donde los estudiantes ingresan a ellas luego de haber aprobado la escuela secundaria (17 o 18 años). El taller AMRP se cursa en el tercer semestre y tiene prevista una duración de 16 semanas, con un encuentro semanal de cuatro horas, con una asistencia de entre 20 y 25 alumnos por edición.

El trabajo se realiza en grupos de dos o tres estudiantes que se mantiene estable durante todo el recorrido. Cada grupo elabora en cada encuentro un informe de lo realizado durante esa jornada. En cada encuentro se designa un grupo, llamado *grupo secretario*, que se dedicará a recopilar y resumir los avances, dificultades y problemas planteados por todos los demás grupos; esta síntesis se expondrá al comienzo del siguiente encuentro de trabajo.

La evaluación se realiza de manera tanto grupal, mediante los informes presentados semanalmente, como individual, por medio de dos exámenes escritos. En todas las evaluaciones los alumnos pueden utilizar la totalidad de los recursos elaborados durante el cursado (carpeta de apuntes, informes, entre otros).

En los años 2015 y 2017 la propuesta de trabajo co-disciplinar fue con él área de biología, y estuvo basada en la modelización matemática para abordar el estudio de la dinámica de poblaciones. En la primera edición del Taller se contó con la intervención, a modo de colaborador externo, de un profesor de biología; mientras que en la segunda edición se contó con su presencia permanente durante todo el cursado como profesor adscripto honorario, permitiendo así que formara parte integrante tanto en el diseño, la implementación y la evaluación del REI.

2. Desarrollo del REI.

Tomando como punto de partida la tesis doctoral de Berta Barquero (2009), se desarrolló un REI que abordó un problema actual en nuestra región: el crecimiento de las poblaciones bacterianas en los ríos debido a la contaminación. Como disparador de la reflexión sobre esta problemática se leyeron artículos periodísticos locales; lo que generó un debate sobre el impacto humano en la ecología de los ríos y cómo esto afecta a las especies que viven allí. La discusión nos llevó a abordar la cuestión:

Q_0: ¿Cómo predecir y estimar el comportamiento de la población bacteriana?

Sin entrar en detalle del desarrollo matemático podemos decir que el recorrido comenzó suministrando a los estudiantes un conjunto de datos experimentales en el que se mostraba el estado de una población bacteriana en nueve instantes de tiempo.

El desarrollo del REI se dividió en dos partes. En la primera parte, considerando el tiempo discreto, se planteó inicialmente la hipótesis de una tasa de crecimiento relativo (TCR) constante, donde los estudiantes construyeron el conocido “modelo de Malthus”. Esta hipótesis surgió de los mismos estudiantes a partir del análisis de los datos y el planteo de indicadores que permitieran describir la dinámica del comportamiento de la población de bacterias. Posteriormente, se sometieron las predicciones del modelo a una contrastación con los datos empíricos para estudiar la bondad de ajuste.

Se realizó un estudio paramétrico del modelo y una validación del mismo que permitió afirmar que era consistente, pero no se ajustaba al comportamiento de los datos experimentales: la población crecía indefinidamente, pero los datos nos mostraban lo contrario (“paradoja de Malthus”). Esto nos llevó a pensar en la relación entre las poblaciones y los recursos necesarios para sus supervivencia: la limitada disponibilidad de recursos impide un crecimiento continuo de la población y le impone un límite máximo: la noción de *capacidad de carga*. El trabajo solo podía continuar si se reformulaba la hipótesis sobre la TCR de la población.

La nueva hipótesis de trabajo que se planteó fue que la TCR dependía linealmente de la población y era decreciente. A partir de ésta se construyó el modelo logístico discreto que, a diferencia del modelo de Malthus, no cuenta con una fórmula explicita dependiente del tiempo, lo que obligó a buscar, a través de los recursos TIC, la manera de simular el comportamiento de la población para estudiar el nuevo modelo. Algunos estudiantes recurrieron al uso de programas como Excel® y GeoGebra®; y los profesores propusieron el software específico para el estudio de dinámica de poblaciones DS-simulator®. De esta manera, se pudo dar una mejor respuesta a la cuestión inicial, es decir, lograr estimaciones que se ajusten mejor a los datos experimentales.

En la segunda parte del recorrido, la búsqueda de un modelo que tenga un mejor ajuste llevó a los estudiantes a considerar el tiempo como una variable continua. Esto permitió reconstruir el recorrido realizado, pero ahora con las herramientas del cálculo diferencial y toda su potencialidad; y explorar nuevas cuestiones que emergen propiamente del trabajo con funciones continuas.

En esta etapa, para cada una de las hipótesis sobre la TCR apareció la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales. Para la TCR la ecuación fue:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = r$$

que nos llevó al modelo:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

En el caso de la TCR lineal decreciente, se planteó la ecuación diferencial

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = -aP(t) + b$$

lo que nos llevo a la función:

$$P(t) = \frac{P_0 e^{bt}}{1 + P_0(e^{bt} - 1)}$$

Aquí hay que destacar que no todos los grupos usaron las mismas técnicas para resolver, ni llegaron a esta misma expresión. Algunos grupos usaron integración por fracciones simples y otros optaron por la ecuación de Bernoulli, pero todos arribaron a una función equivalente y pudo realizar el ajuste correspondiente.

3. Cuestiones emergentes durante el desarrollo.

3.1. La importancia del trabajo simultaneo de los profesores de ambas disciplinas.

La posibilidad de conformar el sistema didáctico con ayudantes de estudio perteneciente a dos disciplinas, como la matemática y la biología, permitió una doble mirada sobre las cuestiones y las respuestas que emergían del proceso de estudio. Así, se ponían en constante tensión los resultados matemáticos obtenidos con sus posibles interpretaciones en la dinámica de una población. La intervención de ambos profesores en momentos particulares del proceso facilitó el pasaje de una mirada disciplinar a la otra y la construcción de respuestas cada vez más satisfactorias para ambas.

En cada etapa del proceso de modelización planteado durante el REI fue necesaria la toma de decisiones, la interpretación de resultados y a validación de las conclusiones obtenidas. Para ello, el aporte del especialista en biología fue indispensable para generar las tensiones necesarias para reflexionar y enriquecer la discusión científica sobre lo pensado y realizado.

3.2. La ruptura del contrato didáctico y las dificultades de los estudiantes avanzados a aceptar esa ruptura.

El modelo herbartiano que plantea la dinámica de los REI rompe con la pedagogía monumentalista dominante. La mayoría de las materias específicas del PUMa-UNCo plantean un modelo de proceso de estudio con clases teóricas, donde el profesor realiza una clase magistral “mostrando” los saberes de la disciplina; y clases prácticas, donde se ejercitan las técnicas asociadas a las nociones expuestas en la teoría y se aplican en la resolución de algunos problemas. En esta estructura las preguntas siempre las realiza el profesor y los estudiantes se limitan a dar las respuestas preestablecidas por la teoría.

3.3. La heterogeneidad de los grupos.

En el taller convivieron estudiantes que se encontraban cursando su segundo año de universidad, con apenas unas pocas materias específicas aprobadas, junto a estudiantes avanzados de la carrera. Esta característica favoreció el trabajo ampliando el repertorio de técnicas disponibles, y enriqueciendo el momento del trabajo de la técnica y el momento tecnológico teórico a lo largo de todo el recorrido.

A pesar de los diferentes niveles de formación, los estudiantes trabajaron colaborativamente. Por las características del REI, el tener mayor conocimiento matemático no garantizaba tener mejor desempeño en la toma de decisiones ni en la resolución de los problemas.

3.4. La gestión del tiempo y las intervenciones docentes.

En la segunda implementación de este REI en el Taller se amplió el momento exploratorio, limitando las intervenciones de los docentes a un mínimo, casi exclusivamente a la observación e interrogación de lo realizado. La consecuencia de esto fue que, en un primer momento, los alumnos avanzaran lentamente, estando a la espera de la intervención docente en cada toma de decisión. Pero este obstáculo fue superado por los estudiantes, quienes lograron mayor dinamismo y libertad de trabajo, superando los logros esperados. Si bien esto constituye una experiencia única y es apresurado sacar conclusiones, en la comparación de las dos ediciones del REI pudimos observar que limitar y optimizar las intervenciones docentes devino en una mayor autonomía de trabajo de los alumnos, logrando un mayor avance en el recorrido a largo plazo.

3.5. El “pasaje” del problema estrictamente matemático al problema de la población concreta de bacterias: “Lo posiblemente matemático versus lo real”.

Se abordaron los problemas desde dos dimensiones diferentes: por un lado teniendo en cuenta lo estrictamente matemático y, por el otro, teniendo en cuenta lo que era biológicamente posible. Se debían corroborar la consistencia de los caminos matemáticos recorridos, y además constrastarlos con los datos experimentales, elaborando criterios que permitieran comparar los modelos, no sólo por consistencia, economía y fiabilidad matemática, sino también por la capacidad de explicar y predecir con mayor precisión la realidad.

4. Conclusiones y problemas abiertos.

4.1. Las apreciaciones de los estudiantes.

Los aspectos positivos:

- «La exposición de los grupos como instancia de preparación como profesores».

El hecho de tener que exponer un resumen de lo trabajado, organizando toda la información de los informes entregados y presentaros antes sus compañeros constituyo un desafío inédito para muchos de los estudiantes. También, algunos estudiantes opinaban que «Nos mostró cómo enseñar la matemática de una manera diferente», reafirmando la hipótesis de la necesidad de desarrollar durante la carrera recorridos que sean vivenciados en posición de estudiantes como paso necesario en la formación docente.

- «Sacarnos de la comodidad de responder o resolver problemas que de antemano sabemos la herramienta que hay que utilizar». «El cambio de formato de las actividades, fomentar la pregunta/incertidumbre». Los estudiantes rescataban como una de las principales fortaleza los REI que permite romper con un modelo de enseñanza-aprendizaje con preguntas adaptadas a respuestas que eran “esperadas” y en cierto sentido “pre-digeridas”. Tradicionalmente, los enunciados que se proponen en muchos espacios curriculares, minimizan la incertidumbre y la ambigüedad de interpretaciones que puedan llevar a diferentes respuestas.
- «Que cada uno pudo construir sus fórmulas”. «El trabajo es diferente al habitual, donde nosotros construimos los modelos». Acostumbrados al “modelo popular” de las matemáticas que describe William Thurston (1995), dominante en la formación matemática de la carrera de profesorado, los estudiantes resaltaron como enriquecedora una propuesta didáctica que permitió la emergencia de varios caminos para resolver un mismo problema: caminos (modelos) que no fueron delimitados por los profesores, basándose en alguna teoría que *a priori* se quería mostrar como herramienta para lograr una respuesta, sino que fueron construidos a partir de la toma de decisiones realizadas por los estudiantes.

Los aspectos negativos:

Las siguiente apreciaciones fueron propuestas como negativas por los alumnos, pero las queremos resaltar como cuestionamientos esperados debido a que la ruptura del contrato didáctico dominante no es espontáneo, y teniendo en cuenta que esta experiencia es un primer paso en la construcción de una pedagogía alternativa al monumentalismo:

- «La guía de los profesores fue escueta en cuanto al trabajo, se perdía el dinamismo»; «consignas confusas»; «no tener muy en claro lo que había que hacer en cada sesión». Ante la necesidad de tomar decisiones, los estudiantes inicialmente esperaban el aporte de los docentes. El no estar explicitados los tipos de tarea que se debían realizar demandó una ampliación del tiempo dedicado a los momentos de primer encuentro.

- «Cambios y confusión con las fórmulas dadas en el correr de las clases». Los objetos que emergen en el proceso de estudio no lo hacen de manera acabada, sino que a lo largo del recorrido evolucionan, transformándose y adaptándose a las necesidades que surgen de los cuestionamientos. El hábito de los estudiantes a concebir los objetos matemáticos acabados, atemporales y eternos se vio fuertemente cuestionado con la necesidad de modificarlos y resignificarlos a lo largo del recorrido.
- «Que no haya un programa de estudio». No existió una lista nominal de contenidos que permitiera a los estudiantes anticiparse a las nociones matemáticas que se estudiarían. El programa estaba constituido en términos de cuestiones a abordar sin establecer *a priori* las organizaciones matemáticas que se verían involucradas.
- «No llegar a resolver por completo el problema planteado»; «el no tener respuestas muy concretas (en relación a lo que estamos acostumbrados)». Esta idea puede provenir de la costumbre que tienen los estudiantes de lograr respuestas completas a los dilemas que se les plantea en la mayoría de las asignaturas, perdiendo la idea de las respuestas parciales que caracterizan a la investigación científica.
- «En muchos casos no saber si se está pensado bien el ejercicio». Esto muestra un claro ejemplo de la “irresponsabilidad matemática” de los estudiantes (Chevallard, Gascón y Bosch, 1997), que los llevaba a “necesitar” control, justificación o validación por parte de otras personas (los docentes) de los procedimientos y soluciones que ellos mismos proponían a los dilemas que emergían.

5. Cuestiones a seguir pensando. (REI-FP).

El recorrido planteado en la segunda edición del Taller se logró en menor tiempo que el requerido durante la primera edición. Esto permitió poder abordar una nueva cuestión que excedía en complejidad a la cuestión original: cómo se comportan dos poblaciones en una situación de competencia. Habría que diseñar un REI que permita abordar esta cuestión ampliando las técnicas con sistemas de ecuaciones diferenciales.

La utilización de diferentes programas informáticos llevó a los estudiantes a tener que familiarizarse con estos en poco tiempo. Los avances de actualización que ha tenido el programa GeoGebra® permitiría tomarlo como programa de referencia único a lo largo de todo el recorrido. Basta analizar las ventajas y desventajas que implicaría utilizar un único programa u optar por varios, como sucedió en la última edición del Taller.

Si bien al finalizar el recorrido se comenta los fundamentos teóricos didácticos en los que la TAD sustenta la propuesta de los REI, surge como pregunta hasta qué punto podría ser beneficioso o no explicitar con mayor detalle el esquema, los supuestos y los fundamentos de los REI durante el proceso de estudio.

El REI planteado partió de datos experimentales ya elaborados. Surge como interrogante la conveniencia de realizar un trabajo previo, articulado con otras disciplinas, para obtener los datos que serán utilizados durante el recorrido.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Blomhøj, M.; Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - Experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 163-177.

Blum, W., & LeiB, D. (2007). DEAL WITH MODELLING PROBLEMS?. *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*, 222.

Chevallard, Y. (2004), "Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire", *Journées de didactique comparée*, Lyon.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona, ICE/Horsori.

Corica, A. R., & Otero, M. R. (2014). La formación de profesores de matemática desde la teoría antropológica de lo didáctico: Un estudio de caso. *Perspectiva Educacional*, 53(2), 20-44.

Esteley, C. & Villarreal, M. (2009). Desarrollo profesional de profesores de matemática. In VI Jornadas de Investigación en Educación. *Córdoba: FFyH-UNC*. 1 CD-ROM.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Doctoral dissertation), Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2010). Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Nº 22, 9-35.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Tesis doctoral. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo. Disponible en: http://www.atd-tad.org/documentos/una-posible-razon-de-ser-del-calculo-diferencial-elemental-en-el-ambito-de-la-modelizacion-funcional/

Mina, M.; Esteley, C.; Cristante, A. & Marguet I. (2007). Innovación en el aula: desarrollo profesional y modelización. In R. Abrate & M. Pochulu (Eds.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática* (pp. 281-293). Villa María: UNVM.

Ministerio de Educación de Río Negro. (2016). *Diseño Curricular de Enseñanza Secundaria. Resolución 3991-16. Anexo I.* Río Negro. Disponible en http://www.unterseccionalroca.org.ar/imagenes/documentos/leg/Resolucion%203991-16%20(Escuelas%20secundarias).pdf

Ministerio de Educación de Río Negro. (2017). *Diseño Curricular de Enseñanza Primaria. Resolución 945-17. Anexo I.* Río Negro. Disponible en www.unterseccionalroca.org.ar/imagenes/documentos/leg/Resolucion%20945-17%20(dise%C3%B1o%20Curricular%20ESRN).pdf

Otero, M., Fanaro, M., Corica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P. & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática.* Buenos Aires: Dunken.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia. En Bolea, P.; González, M.J.; Moreno, M. (Eds.), *Actas del X Simposio SEIEM*. (pp. 107-126).

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the learning of mathematics*, 15(1), 29-37.

Esbozo de una praxeología *para la enseñanza* en torno al cálculo diferencial elemental

Catarina Lucas

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, Portugal

Alicia Ruiz-Olarría

Dpto. Didácticas específicas. Universidad Autónoma de Madrid

Josep Gascón

Dpto. Matemáticas. Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract. The redefinition of the functional modelling using a reference epistemological model assigns a new *raison d'être* to the elementary differential calculus in Secondary education. Through a systematic questioning of the criteria and principles that guide the construction of such model, we will show how an outline of a praxeology *for teaching* in the field of Teacher Education can be built.

Resumen. La redefinición de la modelización funcional mediante un modelo epistemológico de referencia, asigna una nueva razón de ser al cálculo diferencial elemental en Secundaria. Mediante el cuestionamiento sistemático de los criterios y principios que guían la construcción de dicho modelo, mostraremos en qué forma puede construirse un esbozo de una praxeología *para la enseñanza* en el ámbito de la formación del profesorado.

Métodos de investigación en la TAD (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

1. Introducción: formulación de un problema de la profesión docente como punto de partida de un proceso de formación

De acuerdo con Gisèle Cirade (2006), junto a las praxeologías matemáticas *por enseñar*, cuya versión oficial es la que marca el currículo, existen al menos otros dos tipos de praxeologías directamente relacionados con las prácticas docentes y que, por tanto, deben ser tomadas en consideración a lo largo del proceso de formación del profesorado: las praxeologías *para la enseñanza*, que incluyen a las anteriores y contienen los conocimientos, esencialmente matemáticos, necesarios para delimitar, interpretar, cuestionar y explicitar la razón de ser de las praxeologías *por enseñar*, al tiempo que proporcionan instrumentos para concebir y construir los procesos didácticos asociados; y las praxeologías *de la profesión docente*, que engloban a las anteriores y son necesarias para diseñar y gestionar los citados procesos didácticos y para proporcionar a los profesores los conocimientos que estos requieren sobre los fenómenos didácticos que inciden en su práctica docente.

En este trabajo nos centraremos en el problema de la construcción de una praxeología *para la enseñanza*, problema que está estrechamente relacionado con el de la construcción de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) de la correspondiente praxeología *por enseñar*, como argumenta Alicia Ruiz-Olarría (2015). Mostraremos, en efecto, que las cuestiones que se plantean para decidir los criterios y principios que acabarán rigiendo la construcción de dicho MER, constituyen componentes de una praxeología *para la enseñanza*. No debemos olvidar, sin embargo, que, según observa C. Cirade (2006), en la construcción de la praxeología para la enseñanza también intervienen componentes de las praxeologías *de la profesión.* Esta es la razón por la cual la elaboración de una praxeología para la enseñanza, en el ámbito de la TAD, está ligada tanto al cuestionamiento de las praxeologías escolares habituales, como al estudio de determinados fenómenos didácticos y, consiguientemente, a la reconstrucción de nuevas maneras de interpretar las praxeologías por enseñar (Ruiz-Olarría, 2015). En esta comunicación, utilizaremos la estrategia metodológica desarrollada en el citado trabajo (Ruiz-Olarría, 2015) para esbozar la construcción de una praxeología para la enseñanza en torno al *cálculo diferencial elemental* (CDE) en Secundaria.

Ante el problema de la enseñanza del CDE, el cuestionamiento del que parte la TAD no toma, como objeto de estudio *primario* los errores y dificultades que muestran los alumnos en su actividad matemática, ni los posibles recursos que puedan utilizar los profesores para mejorar su enseñanza. El primer paso para abordar dicho problema consiste en analizar los componentes de la organización matemática escolar que, en el caso que nos ocupa, es la organización en torno al CDE. Se empieza así por estudiar qué se enseña actualmente bajo la designación de «cálculo diferencial» en determinadas instituciones escolares, qué se ha enseñado en otros periodos y cómo ha evolucionado el proceso transpositivo para desembocar en la organización matemática escolar actual en torno al CDE. Se constata, entonces, que la problemática a la que responde lo que se denomina escolarmente «cálculo diferencial» no está claramente explícita ni en el currículo oficial ni en los libros de texto y, en cierto sentido, podríamos decir que la institución de la enseñanza secundaria ha «olvidado» su razón de ser.

En resumen, el modelo epistemológico vigente en Secundaria presenta el CDE disperso en un conjunto de tareas y técnicas bastante formales, desarticuladas y muy débilmente interpretadas y justificadas (Lucas, 2015). Por otra parte, Catarina Lucas, Cecilio Fonseca y Josep Gascón (2017) han verificado la ausencia de determinadas praxeologías matemáticas, que consideramos fundamentales en el currículo de Secundaria (en los sistemas educativos de Portugal, España y Francia), y que permitirían una mayor articulación del CDE con otros sectores de las matemáticas escolares. Se hacen patentes, de este modo, múltiples indicadores de un fenómeno didáctico emergente en dicho ámbito de la matemática escolar que muestra, entre otras cosas, la poca consistencia epistemológica de la razón de ser oficial del CDE en dicha institución.

Como primera respuesta a este fenómeno, Noemí Ruiz-Munzón (2010) conjeturó que la razón de ser del CDE podría situarse en el ámbito de la *modelización funcional* (MF), esto es, en el ámbito de la actividad de modelización matemática en la que los modelos se expresan mediante funciones. Nos encontramos, por tanto, ante un fenómeno didáctico, una primera conjetura para abordarlo y la constatación de un problema docente asociado que, en nuestro caso, puede formularse como sigue:

> ¿Cómo organizar la enseñanza del CDE en la última etapa de la enseñanza secundaria y qué papel asignarle en el ámbito de la MF?

Esta concurrencia de un fenómeno didáctico y un problema docente asociado no es casual, en realidad constituye una situación habitual en el inicio de muchos procesos de formación. En cuanto a la conjetura inicial, digamos que puede ser más o menos robusta, pero tiene la virtud de orientar y precisar en algún aspecto la formulación del problema de la profesión docente.

2. El proceso de construcción de praxeologías para la enseñanza en el ámbito de la formación del profesorado

Según A. Ruiz-Olarría (2015), las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* se construyen en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías matemáticas *por enseñar* y están, como estas, en evolución permanente. Así, por ejemplo, una cuestión del tipo «¿Cómo justificar en la enseñanza obligatoria la regla de los signos del producto de números enteros?», que pertenece plenamente a las matemáticas *por enseñar*, puede generar la construcción de una praxeología matemática *para la enseñanza*, relacionando la emergencia de los números negativos con las necesidades operatorias del álgebra elemental, como proponen Eva Cid y Noemí Ruiz-Munzón (2011).

Lo anterior no significa que *todas* las cuestiones que vertebran una praxeología para la enseñanza surjan y puedan plantearse a partir de las praxeologías matemáticas por enseñar. En general, una praxeología matemática para la enseñanza se estructura en torno a cuestiones que engloban y rebasan ampliamente, como hemos dicho, las que estructuran la correspondiente praxeología matemática por enseñar.

En A. Ruiz-Olarría (2015) se describe una metodología para la construcción y reconstrucción de praxeologías matemáticas para la enseñanza mediante lo que en la TAD se denomina *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP). La utilización de este dispositivo didáctico comporta que el correspondiente proceso de formación surja para dar respuesta a una cuestión problemática Q_0-FP que debe ser una cuestión crucial para la profesión docente. Para responder a esta cuestión el REI-FP se articula en cinco módulos, de los que aquí únicamente consideraremos los tres primeros, M_0, M_1 y M_2, dado que es en estos en los que se construye un primer esbozo de una praxeología para la enseñanza.

2.1. Módulo M_0: caracterización del modelo epistemológico dominante en Secundaria

Ya hemos indicado que el modelo epistemológico del CDE vigente en Secundaria le asigna una razón de ser «oficial» muy poco fundamentada epistemológicamente. En particular el CDE aparece en la actividad matemática escolar sin conexión con los procesos de MF que, por lo demás, están prácticamente ausentes en toda la enseñanza secundaria (Lucas, 2015).

En el módulo M_0, y con el objetivo de hacer patente este fenómeno a los profesores en formación, se les planteará la siguiente cuestión generatriz:

> Q_0-FP ¿Cómo organizar la enseñanza del CDE en la última etapa de la enseñanza secundaria?

Y como primer paso para empezar a responder, se propone estudiar la *respuesta institucional* a la misma, esto es, la forma como el sistema escolar actual organiza la enseñanza en torno a dicho ámbito. Este estudio comportará la emergencia de cuestiones más específicas como, por ejemplo:

- En el sistema escolar actual, ¿se explicita la razón de ser del CDE?
- ¿Qué tipos de tareas se proponen para dar sentido a las técnicas del CDE? ¿Se justifican dichas técnicas?
- ¿Se relacionan las técnicas entre sí?
- ¿Se estudian diferentes técnicas para la realización de una misma tarea? ¿Se comparan entre sí?, Etc.

Una vez hecho este análisis se espera que la comunidad de estudio vea la necesidad de relacionar el CDE con el estudio de los diferentes tipos de funciones y con los modelos funcionales. Surgirán cuestiones tales como:

- ¿Qué tipo de actividades se llevan a cabo en Secundaria con las funciones? ¿Se utilizan las funciones para construir modelos?
- ¿Qué papel desempeñan los modelos funcionales en el currículo?
- La construcción de los modelos funcionales, ¿se deja bajo la responsabilidad de los alumnos?
- En relación al trabajo con funciones, ¿cuándo aparece la necesidad de utilizar el CDE?
- ¿Qué papel desempeña el CDE en el estudio de los diferentes tipos de funciones?

En el desarrollo del módulo M_0, la respuesta a estas cuestiones (y a otras que irán apareciendo) se formulará a partir de un análisis de los *media* más habituales para los profesores: currículo, libros de texto, revistas para el profesorado, revistas de investigación, centros de recursos, webs, etc. El rol de los formadores en este proceso no es el de aportar elementos de respuesta para darlos a conocer a los profesores, sino guiarlos en la búsqueda de estos elementos y, sobre todo, iniciarlos a los gestos básicos del cuestionamiento didáctico: ¿Qué se entiende por CDE? ¿De dónde viene? ¿En qué ámbitos matemáticos y no matemáticos se utiliza o utilizaba el CDE? ¿Por qué hay que enseñarlo en Secundaria? ¿Qué propuestas de enseñanza del CDE existen? ¿Qué se dice o sabe de ellas? Etc.

2.2. Módulo M_1: vivir un REI sustentado en el MER de Secundaria

Los siguientes pasos en la estrategia metodológica consisten en la construcción de un MER para Secundaria y de la correspondiente praxeología matemática por enseñar y, a continuación, en la experimentación y evaluación de un REI sustentado en dicho MER. Estos pasos fueron llevados a cabo en C. Lucas (2015).

En el módulo M_1 del REI-FP se pretende que los profesores en formación empiecen a construir, mediante un trabajo cooperativo, una respuesta a Q_0-FP que vaya más allá de la respuesta institucional que proporciona el sistema escolar. Este módulo constituye un dispositivo didáctico diseñado para proporcionar a los profesores en formación la posibilidad de vivir en propia carne el REI experimentado previamente con estudiantes de un primer curso de Universidad que incluía contenidos muy semejantes a los de Secundaria (Lucas, 2015).

Para ello, se propondrá a los profesores en formación las mismas cuestiones que se propusieron a estos estudiantes y que describimos a continuación:

> Q_1: ¿Cómo se puede diagnosticar y prever el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a Chernóbil?

Para hacer la devolución de esta cuestión, se podrá acceder a informaciones relativas a la forma de diagnosticar el cáncer de tiroides administrando radiofármacos que contienen radioisótopos sintéticos. Al circular por el cuerpo de la persona, dichos radioisótopos emiten radiaciones que permiten saber por dónde pasaron y dónde se depositaron. De este modo, se logra un mapeo de los órganos que posibilita generar datos empíricos y, a partir de estos, construir modelos funcionales que, a su vez, van a permitir hacer una previsión de los casos de cáncer de tiroides.

Para iniciar el estudio se plantearán las cuestiones siguientes relativas a la preparación de estos radiofármacos:

> Q_{11}: ¿Cómo varía la masa de un isótopo radiactivo a lo largo de su desintegración?
>
> Q_{12}: ¿Cómo estudiar la variación de la concentración de un radiofármaco en el organismo de un paciente un tiempo después de su administración?
>
> Q_{13}: Conociendo la velocidad de administración por vía intravenosa de un radiofármaco, ¿cómo podemos variar la dosis si el caso lo requiriese?
>
> Q_{14} ¿Cómo se puede prever a lo largo del tiempo el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas a la antigua central ucraniana de Chernóbil?
>
> Q_{15} ¿Cómo prever la evolución de los efectos genéticos del accidente de Chernóbil en las generaciones futuras?

Para empezar a responder a la cuestión Q_{11}, los formadores podrán sugerir la busca de datos discretos de la masa de diferentes radioisótopos en trabajos científicos de Medicina Nuclear, como los de John U. Hidalgo, Robert M. Wright y Mary M. Wooten (1967) o Jonathan Langford y Gertrud Thompson (1990). Se propondrá a los profesores en formación que, trabajando en pequeños grupos, utilicen diferencias finitas y construyan modelos discretos para la masa de un isótopo radiactivo concreto. Para guiar el proceso de estudio de estas cuestiones se sugiere a los formadores que intenten provocar el planteamiento de cuestiones intermedias como las que aparen en C. Lucas (2015, pp. 201-205). Después se compararán los modelos de los diferentes grupos y, al final de esa sesión, se vivirá un *momento de la institucionalización* en el que, presumiblemente, se deducirá una respuesta global mediante una familia de modelos funcionales del tipo:

$$m(t) = ae^{bt}, t \in \mathbb{N}$$

En otros artículos se buscarán modelos semejantes a estos, pero para variables continuas (obtenidos mediante la resolución de la ecuación diferencial asociada a la ecuación en diferencias finitas) y se discutiría las ventajas y las desventajas del paso del campo discreto al continuo, y cómo se podrá mostrar a los estudiantes ese mismo tránsito. Se pretende que los profesores en formación experimenten la dificultad técnica del trabajo con diferencias finitas.

Para la cuestión Q_{12}, los formadores podrán proponer una indagación en los manuales escolares y en internet, siendo previsible que se tomen en consideración diferentes tipos de modelos continuos (exponenciales, racionales, polinómicos, etc.). Se mostrará la relevancia de las técnicas del CDE para trabajar en dichos modelos e interpretar los resultados del mismo.

Para la cuestión Q_{13}, los profesores en formación podrán empezar por buscar una aproximación del valor del área correspondiente a la dosis del radiofármaco, construir el modelo a partir del estudio de la variación de la dosis, escribir la ecuación en diferencias, aproximar la Tasa de Variación Media mediante la función derivada en un punto y expresar y resolver la ecuación diferencial correspondiente. Se mostrará así la economía y eficiencia de las herramientas del CDE (en este caso del cálculo integral) para construir modelos algebraico-funcionales de ciertos sistemas.

Para responder a las cuestiones Q_{14} y Q_{15}, el formador podrá sugerir un trabajo con datos empíricos discretos recogidos en investigaciones científicas —por ejemplo, en The Chernobyl Forum (2003-2005)—, y la construcción de modelos continuos a partir de dichos datos discretos.

2.3. Módulo M_2: Analizar el REI vivido

En este módulo los profesores en formación llevan a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido que podrán interpretar como una respuesta, en acto, aunque sólo sea parcial y provisional, a la cuestión Q_0-FP. Para ello, se retoma el problema de la profesión docente descrito mediante dicha cuestión, así como las respuestas parciales que los profesores en formación hayan encontrado en el Módulo M_0 a partir de la exploración de los diversos documentos oficiales que tienen a su disposición (incluyendo su propia experiencia como alumnos). Estos datos, junto a una descripción de la respuesta particular a la misma cuestión Q_0-FP surgida en el ámbito de la investigación didáctica y descrita en (Lucas, 2015), constituyen los *media* de los que disponen los profesores en formación para llevar a cabo un análisis matemático-didáctico del REI vivido.

Se propone a los profesores en formación que analicen en profundidad la estructura y la dinámica del REI anteriormente vivido, como sugiere Yves Chevallard (1999), tanto en lo que respecta a la *praxeología matemática* construida efectivamente (comparándola con la organización matemática escolar) como en lo que hace referencia a la *organización didáctica* de este proceso en términos de la articulación de los *momentos del estudio*, de los *gestos del estudio y la investigación* que han desarrollado efectivamente, de las *técnicas y tecnologías didácticas* que se han puesto en juego y, en particular, de las *responsabilidades* que han asumido los profesores en formación —en su papel de estudiantes—, y el formador —en su papel de director del proceso de estudio.

Para impulsar este análisis y teniendo en cuenta que en el módulo M_1 los profesores en formación habrán vivido un REI en el cual el CDE se ha utilizado como un instrumento clave en un proceso de MF, los formadores utilizarán técnicas didácticas adecuadas con el objetivo de que los profesores en formación lleguen a plantear y discutir cuestiones en torno al papel que desempeña el CDE en la construcción y el estudio de modelos funcionales de todo tipo de sistemas. Entre las cuestiones que podrían surgir, empezaremos por citar las que tienen un carácter más general. Obviamente, estas cuestiones están sugeridas por los criterios y principios utilizados en la construcción del MER, tal como se explicita detalladamente en C. Lucas (2015):

Q_1: Para llevar a cabo un proceso de MF, ¿qué tipo de praxeologías matemáticas o extra-matemáticas pueden tomarse como sistema inicial a modelizar?

Q_2: ¿Qué cuestiones problemáticas que se pueden plantear en dicho sistema requieren de manera imprescindible, en Secundaria, del uso del CDE y, por lo tanto, posibilitan la génesis funcional del mismo?

Q_3: ¿En cuántas etapas parece razonable articular los procesos de MF?

Q_4: ¿Qué universo de tipos elementales de variación es razonable utilizar en el último curso de enseñanza secundaria?

Una vez que se plantee la posibilidad de utilizar datos discretos, dado que esta es la naturaleza habitual de los datos empíricos, podrán surgir cuestiones tales como:

Q_5: ¿En qué tipo de modelizaciones funcionales será necesario partir de datos discretos como paso previo a la construcción de modelos funcionales continuos? ¿Qué tipo de modelos discretos se podrán utilizar en estos casos?

Q_6: ¿Cómo tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos?

Q_7: ¿Qué papel podría asignarse a las ecuaciones en diferencias finitas en dichos procesos? ¿Y a las ecuaciones diferenciales elementales?

Q_8: ¿Qué criterios utilizar para los datos más adecuados (discretos o continuos) para llevar a cabo un proceso de MF?

Q_9: Si se parte de datos discretos, ¿qué tipo de regresión será en cada caso el más adecuado para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos?

Q_{10}: Dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, ¿qué tipo de datos discretos (datos de la tasa de variación media, TVM, o de la tasa de variación media relativa, TVMR) es preferible utilizar?

Y con relación al tratamiento de los modelos funcionales continuos, es previsible que se planteen, entre otras, cuestiones del siguiente tipo:

Q_{11}: ¿En qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta?

Q_{12}: Si se parte de datos continuos, ¿cómo construir con técnicas algebraicas el modelo funcional o, en su caso, el *modelo diferencial* (en el que aparece la derivada de la función-modelo)?

Q_{13}: ¿Qué papel podría desempeñar el CDE en la construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales continuos?

Q_{14}: Utilizando las técnicas del CDE, ¿cómo se puede interpretar correctamente el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema?

Q_{15}: ¿Cómo utilizar el CDE para estudiar las propiedades locales de los modelos funcionales construidos?

Postulamos que las cuestiones Q_i (i = 1, …, 15), con otras que puedan surgir a lo largo del módulo M_2, junto con las posibles respuestas tentativas a las mismas, así como otras muchas posibles cuestiones derivadas de dichas respuestas, formarán parte de una praxeología matemática *para la enseñanza* en torno a la MF que integra el papel que se asigna al CDE.

Como sugiere Y. Chevallard (2017, p. 8):

> … en pratique, c'est chaque classe, chaque équipe d'enseignement qui est appelé á nourrir l'inventaire des questions á étudier, des réponses pouvant leur être apportées et des connaissances á mobiliser […]

Las cuestiones Q_i son algunas de las que se plantearon en su momento para decidir (en base a las respuestas a las mismas) los criterios y principios que se utilizaron para construir un MER del CDE en el ámbito de la MF (Lucas, 2015). Al tomarlas como punto de partida para empezar a estructurar una praxeología para la enseñanza, junto a otras cuestiones que se derivarán del estudio de las mismas, se da la posibilidad a la comunidad de estudio (integrada por los formadores y los profesores en formación) de proponer respuestas diferentes y, en definitiva, de cuestionar y modificar la propia estructura y dinámica del MER construido.

3. Un problema abierto: la gestión didáctica de la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza

Hemos descrito sintéticamente un proceso de construcción de praxeologías para la enseñanza en el ámbito de la formación del profesorado que contiene, en su núcleo, una experimentación de los módulos M_0, M_1 y M_2 de un REI-FP. Pero, en el caso que nos ocupa (relativo al problema profesional de la enseñanza del CDE) dicha experimentación aún no se ha llevado a cabo, por lo que hemos presentado, únicamente, un diseño a priori de un *desarrollo hipotético* de una praxeología para la enseñanza en torno a dicho ámbito de la matemática escolar.

Como todo REI, un REI-FP parte de una cuestión a la que la comunidad de estudio se propone responder y que, en este caso, es la cuestión generatriz Q_0-FP que expresa un problema profesional y que estará presente a lo largo de todo el recorrido de estudio.

El problema que proponemos ahora para concluir esta comunicación hace referencia a la forma de gestionar didácticamente el desarrollo de un REI-FP y, en particular, el proceso de estudio e investigación que se lleva a cabo a lo largo de los módulos M_0, M_1 y M_2. Dado que, siguiendo la estrategia metodológica que hemos descrito, dicho proceso desemboca en la construcción de una praxeología para la enseñanza que puede considerarse como una primera respuesta a Q_0-FP, el problema que planteamos podría describirse como el *problema de gestionar didácticamente la construcción de una praxeología para la enseñanza* en una institución de formación del profesorado.

Para responder a esta cuestión, la TAD propone un *modelo didáctico general*, esto es, un patrón de lo que se entiende por «estudiar una cuestión». Dicho patrón puede expresarsee mediante el *esquema herbartiano* (Chevallard, 2004):

$$[S(X, Y, Q) \to M] \to R^{\heartsuit}$$

Este esquema, una vez explicitado el *medio didáctico M* que debe ser construido por la comunidad de estudio [*X*, *Y*], describe los elementos que constituyen la *estructura* del proceso de indagación que tiene como objetivo que dicha comunidad construya una respuesta $R^♥$ a la cuestión Q (en nuestro caso, a la cuestión Q_0-FP).

En todos los casos, la *dinámica* de un REI (y, en particular, la dinámica de los módulos M_0, M_1 y M_2 de un REI-FP), puede describirse en términos de *dialécticas* o *gestos del estudio* (Chevallard, 2009), pero la gestión de dichas dialécticas y, en general, la gestión didáctica de un REI es un problema didáctico que, en gran medida, continúa siendo un problema abierto.

En particular, los trabajos que analizan diversos procesos de formación de profesorado en el ámbito de la TAD con el objetivo de construir, de manera más o menos explícita, una praxeología para la enseñanza, como son los de Marianna Bosch y Alicia Ruiz-Olarría (2011), Ana R. Corica y María R. Otero,(2016), Tomás A. Sierra y Pedro Nicolás (2017), y Eva Cid, José M. Muñoz-Escolano y Noemí Ruiz-Munzón (2018), además del citado de A. Ruiz-Olarría (2015), se centran esencialmente en el nivel descriptivo y en el análisis de algunas de las restricciones que aparecen en dichos procesos.

Podemos concluir que se requieren nuevos desarrollos sobre la gestión didáctica de los REI-FP y, en particular, muchas más experimentaciones (incluida la que se esboza en este trabajo) para construir y poner a disposición de las instituciones de formación una infraestructura didáctico-matemática que, sin depender de las decisiones puntuales y de la habilidad particular de los formadores y de los profesores en formación, sustente y haga accesibles las *técnicas didácticas* necesarias para llevar a cabo una gestión eficaz y económica del proceso de construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza.

Referencias

Bosch Casabò, M & Ruiz-Olarría, A. (2011). Un parcours d'étude et de recherche en formation initial des professeurs : le cas des «réductions progressives», *Actes de la 16*[e]*e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, (pp. 415-420) Editeur: La pensé Sauvage éditions.

Chernobyl's Legacy: Health, Environmental and Socio-Economic Impacts and Recommendations to the Governments of Belarus, the Russian Federation and Ukraine. The Chernobyl Forum: 2003–2005. http://www.iaea.org/sites/default/files/chernobyl.pdf

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques.http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/ La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf

Chevallard, Y. (2017). Quel avenir pour la formation des professeurs ? Éléments pour la transition didactique. www.snesup.fr/sites/default/files/fichier/texte_YC-11-01-2017_0.pdf.

Cid, E. & Ruiz-Munzón, N (2011). *Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En M. Bosch et al. (Eds), Un panorama de la TAD (pp. 579-604). CRM Documents, vol.10. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. & Ruiz-Munzón, N. (2018). La introducción de los REI en la formación de profesorado: Un ejemplo de REI-FP.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les* *mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Corica, A. & Otero, M. (2016). Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. *Bolema*, *30*(55), 763-785. doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a22.

Hidalgo, J.; Wright, R.; Wooten, M. (1967). *Prediction of Technetium-99m Yield from Molybdenum-99 Generators.* The Journal of Nuclear Medicine, *8, 426-429.*

Langford, J., Thompson, G. (1990). *Monitoring radioactive xenon gas in room air using activated charcoal*. Journal of Nuclear Medicine Technology, *18,* 40–43.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial en el ámbito de la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, Vigo.

Lucas, C. O., Gascón, J. & Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, *6*(3), 283-306. doi: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elementaly su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de Secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

Sierra, T. A. & Nicolás, P. (2017). Metodología de los REI-FP en el caso de los Sistemas de Numeración para futuros maestros de primaria y profesores de secundaria. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 941- 964). https://citad4.sciencesconf.org 941

Redynamiser l’étude des mathématiques dans l’enseignement libanais

Mise en place d’une activité d’étude et de recherche sur les nombres relatifs

Nawal Abou Raad
Faculté de Pédagogie, Université Libanaise, Liban

Résumé : Ce travail étudie le développement de la compréhension du sens des nombres relatifs. Une comparaison entre deux méthodes d’enseignement a permis de valider l’ingénierie préparée par le groupe PERMES par identification de l’évolution des représentations mentales, des procédures et des réflexions des élèves de deux classes de EB6 dans une école libanaise privée. Cette étude nous permettra d'améliorer l’enseignement par la mise en place des A*ctivités d’Étude et de Recherche* (AER) dans le système éducatif libanais.

Abstract: This work studies the development of the understanding of relative numbers meaning. A comparison between two teaching methods allowed to validate the "ingenierie" prepared by the PERMES group by identifying the evolution of the mental representations, procedures and reflections of the students of two classes of EB6 in a Lebanese private school. This study will enable us to improve teaching through the implementation of Study and Research Activities (EAR) in the Lebanese educational system.

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

1. Introduction

Le développement des technologies informatiques et l'intégration des TICE dans les curriculums ont profondément modifié l'appréhension des mathématiques et plus spécifiquement celle du calcul. L'enseignant passe un temps important pour faire acquérir à l'élève des techniques de calcul dont l'application est automatisée alors que, par une touche, l'élève est capable de calculer 5 – (– 9) sans se tromper. Ce qui suscite des questions du type « À quoi bon étudier les mathématiques si la machine calcule ? ».

Les « nouveaux » programmes Libanais des mathématiques du décret 1997 sont conçus de sorte que l'élève, à la fin de son cursus scolaire et voulant entrer dans une profession, dispose d'un bagage mathématique lui permettant d'exercer un métier et d'appréhender, en tant que citoyen, certaines des informations et connaissances scientifiques, afin que les élèves éprouvent de l'intérêt et du plaisir dans l'étude et l'apprentissage des mathématiques. Ce double objectif devait être atteint à travers un travail de recherche dans lequel engager les élèves afin de construire collectivement le savoir. Mais le problème qui se pose est celui de la mortification des objets mathématiques. L'enseignement des mathématiques ne fait pas, dans la plupart des cas, vivre dans les classes une motivation fondatrice du savoir mathématique Nous retrouvons toujours des élèves qui agissent par *psittacisme,* ils répètent des termes ou des notions sans en comprendre le sens. Que dire du manuel scolaire national qui vient après, et qui s'avère en contradiction avec l'ambition d'une « activité d'étude et de recherche ». Trop souvent, en effet, et en contradiction avec les commentaires contenus dans les instructions officielles, le mot « Activité » semble ne désigner qu'une simple phase « préparatoire » ou « introductive », voire un pur « échauffement », en début du cours, mettant en scène des pré-requis, et dont le principal défaut est de ne pas faire apparaître la ou les questions problématiques motivant l'étude à entreprendre.

Pour maintenir l'enseignement des mathématiques au Liban, et plus spécifiquement l'enseignement des nombres relatifs, nous avons pensé, en collaboration avec l'équipe française PERMES, de faire passer dans nos classes une de leurs A*ctivités d'Étude et de Recherche* (AER) à propos des nombres relatifs. La définition d'une AER est donnée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique développée par Yves Chevallard (1998, 2002, 2004). Chaque AER vise à proposer aux professeurs un système de conditions pour que le processus d'étude des mathématiques prenne davantage de sens aux yeux des élèves. Pour faire contraste avec les contenus des manuels, dévoluer aux élèves la responsabilité de construire une réponse à une question est sans doute nécessaire si le souhait est de « redynamiser l'enseignement des mathématiques » – c'est-à-dire rendre les élèves auteurs, et non spectateurs des mathématiques.

L'expression « programme de calcul » n'apparaît pas explicitement dans le programme libanais. Nous considérons que le « programme de calcul » est une activité consistant à « faire un calcul », c'est-à-dire à opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon une certaine technique.

La notion d'« expression algébrique »[1] est introduite dans les programmes de mathématiques comme mathématisant la notion de « programme de calcul », qui est en quelque sorte une machine à fabriquer des nombres. Ainsi, à titre d'exemple, l'expression $a + 2$ est l'expression algébrique du programme de calcul « à un nombre donné, ajouter 2 » et qui a une valeur numérique dépendante de la valeur du nombre représenté par la lettre a.

2. Choix didactique

Les nombres négatifs sont désormais abordés à partir de la classe de EB6 (Sixième) au Liban. Les élèves ne trouvent pas un sens à ces nombres et surtout à opérer avec. Malgré qu'ils soient dans leur culture, ils leur posent des difficultés spécifiques. D'une part, pour la première fois, ils sont confrontés à des nombres que les enseignants concrétisent par diverses métaphores traditionnellement en usage, « gain-dette », « avance-recule », etc., ce qui constitue une rupture importante avec les nombres manipulés jusque-là. D'autre part, la notation habituelle des nombres négatifs utilise le signe « – » qui est, pour les élèves, lié à une

[1] La notion d'expression algébrique repose sur l'« entité » programme de calcul, comme l'ont noté Yves Chevallard et Marianna Bosch : « Une «expression algébrique est un énoncé symbolique qui exprime un certain programme de calcul. L'expression algébrique $E(x) = 15x - 3(x + 1)$ exprime le programme de calcul dont une expression rhétorique est la suivante :Multiplier le nombre donné par quinze puis retrancher au nombre obtenu le triple du successeur du nombre donné » (2012, p. 30).

opération, « la soustraction », ce qui contribue à accroître les difficultés liées au calcul sur les nombres relatifs.

Dans ce travail, nous avons choisi de nous placer résolument dans un cadre interne aux mathématiques afin d'amener les élèves vers une première fréquentation des relatifs, vus comme des « programmes de calcul » permettant de simplifier les calculs au sein d'un programme complexe sans signaler que ce travail se fait dans ℕ. Le programme de calcul **P** initial considéré est : « à un nombre on ajoute un deuxième et on soustrait un troisième » dont un spécimen est par exemple 347 + 61 – 62. Le relatif est vu comme un programme **P_1,** simplifié à partir de **P** tout en lui étant équivalent : « à un nombre on ajoute ou on soustrait un deuxième » (dans l'exemple précédent, 347 – 1).

3. Cadre théorique

Nous nous sommes donc placée dans la théorie anthropologique, afin de comprendre à partir de données empiriques, comment les individus parviennent à partager, du moins de manière collective, des pratiques relatives à deux enseignements de type différents, clinique et ingénierie, dans deux classes de EB6.

La modélisation anthropologique du didactique initiée principalement par Y. Chevallard (1992, 1999, 2002) s'inscrit dans un programme de recherche qu'on a pu nommer « programme épistémologique de recherche en didactique des mathématiques » et dont la principale caractéristique tient en ce qu'il se donne l'activité mathématique comme premier objet de recherche.

Cette modélisation englobe des conditions et des contraintes selon lesquelles se déterminent conjointement les organisations mathématique et didactique (Chevallard, 2005). On sait qu'en suivant l'échelle des niveaux de codétermination didactique, et en allant du générique vers le spécifique, chaque niveau est le siège de conditions et de contraintes qui exercent leurs effets tant sur les niveaux inférieurs que sur les niveaux supérieurs. Contraintes relevant de *la civilisation* et de son histoire (tradition de l'étude des nombres relatifs par exemple), ou de la société pensant l'organisation de son école, et qui se répercutent en premier lieu aux niveaux de *la pédagogie* (cours de 55 minutes engageant les élèves à être actifs) et de *la discipline* (présence ou absence dans le programme de certains objets mathématiques transposés). Ces contraintes induisent en retour des formes relativement stables d'enseignement et des manières de penser l'étude des mathématiques.

4. Les nombres relatifs dans le système scolaire libanais et nos réflexions

Nous présentons, dans cette partie, le contexte éducatif libanais en se limitant à la troisième année (EB6) de l'Éducation de Base, cycle II. Le travail consiste en une analyse institutionnelle du curriculum en vigueur, du programme et d'un manuel[2] . L'analyse de ces médias permet d'identifier un système de conditions et contraintes de niveaux de détermination didactique supérieur à ceux sur lesquels interviennent directement les enseignants (niveaux allant du secteur au sujet d'étude) mais qui peuvent influer sur leurs choix didactiques et mathématiques.

4.1 Ce que dit le curriculum

Les rédacteurs du curriculum en vigueur, ont groupé leurs intentions majeures en cinq objectifs généraux. Nous allons exposer[3] ceux qui nous semblent en lien avec notre problématique « Donner du sens aux savoirs mathématiques et en particulier aux nombres négatifs ».

Objectif 1 : « La formation à la construction d'arguments et à leur évaluation, le développement de la pensée critique, la formation au RAISONNEMENT MATHEMATIQUE. Pour cela l'occasion doit être toujours offerte aux élèves pour : observer, analyser, abstraire, douter, prévoir, conjecturer, généraliser, synthétiser, interpréter, démontrer

Objectif 4 : former l'élève à la COMMUNICATION MATHEMATIQUE. Pour cela il doit être entraîné à : coder et décoder des messages, formuler, exprimer oralement, par écrit et/ou à l'aide d'outils mathématiques des informations diverses »

Tous ces verbes d'action renvoient à des « habilités » que l'enseignant doit favoriser chez les élèves durant le cours de mathématique et selon le

[2] Nous étudions le manuel adopté par l'école où ont eu lieu nos observations de classe pour l'enseignement ordinaire.

[3] Nous avons repris les textes avec la même calligraphie de la partie « Objectifs généraux du curriculum ».

contenu étudié. Ces « habilités » nous conduisent à interroger la construction des savoirs à partir de situations réellement en phase avec certains intérêts extrascolaires des élèves, en adéquation avec certaines pratiques de la vie courante, ou, plus simplement peut-être, de situations offrant seulement aux élèves l'apparence de cette adéquation.

4.2 Ce que dit le programme

L'analyse anthropologique s'appuie sur l'étude de la structuration du programme. Notre étude consiste à repérer, suivant les niveaux de l'échelle de codétermination, les types de tâches présents puis les techniques et les éléments technologiques et théoriques mobilisés pour « les Nombres Relatifs ».

Au niveau de la pédagogie (niveau 0 dans l'échelle des niveaux de codétermination), le « programme » de l'enseignement primaire se veut résolument novateur par rapport aux anciens programmes libanais, comme l'atteste l'utilisation des verbes d'action dans les objectifs du curriculum, et qui supposent placer l'élève en action.

Les programmes du cycle II sont structurés en quatre rubriques : « Arithmétique et Algèbre ; Géométrie ; Mesure et Statistique ». Nous identifions ces rubriques au niveau du *domaine* d'étude dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Chaque domaine s'organise dans une présentation en trois colonnes intitulées respectivement « Contenu » ,qui présente les *thèmes* à acquérir ; « Objectifs », présentant les *sujets :* ils sont exprimés par un verbe d'action et renvoient à ce que l'élève doit savoir faire ; « Commentaires », renvoyant à des directions de travail : ils apportent parfois des informations complémentaires qui nous aideront à définir les types de tâches, les techniques, les éléments technologiques et théoriques.

Le domaine « Arithmétique et Algèbre » est découpé en dix secteurs présentés dans cet ordre : « Entiers naturels » ; « Fractions » ; « Décimaux » ; « Nombres relatifs » ; « Addition » ; « Soustraction » ; « Multiplication » ; « Division » ; « proportionnalité » et « Expressions algébriques ». Nous remarquons que les nombres constituent une part essentielle de ce domaine, neuf secteurs pour l'arithmétique contre un seul secteur pour l'algèbre.

Le *secteur* « Nombres Relatifs » se laisse partager en trois thèmes d'étude : « Nombres positifs et nombres négatifs » ; « Représentation sur l'axe numérique » ; « Comparaison ». En descendant encore jusqu'au niveau des sujets, nous trouvons que pour chaque thème il n'y a qu'un seul sujet qui est scindé au minimum en deux tâches. Le nombre des heures d'enseignement du secteur est fixé par les rédacteurs du programme.

Expliquons brièvement. Pour le thème : « Nombres positifs et nombres négatifs », un seul sujet est exigé par le programme : « Identifier les nombres positifs et les nombres négatifs » ; pour acquérir ce sujet, l'élève doit accomplir les quatre types de tâches suivants : 1) « Qualifier des grandeurs par un sens positif ou négatif », 2) « Reconnaître un nombre positif, un nombre négatif et un nombre nul », 3) « Utiliser la notation classique pour désigner les nombres relatifs », 4) « Reconnaître deux nombres opposés ». Dans la colonne « Commentaires » relative à ce sujet, nous relevons la naissance des entiers relatifs à partir de multiples exemples de « grandeurs pouvant avoir deux sens : déplacement sur une route, température, altitude, temps, etc. On fera remarquer l'intérêt particulier du choix de l'origine (valeur initiale) bien que ce choix soit arbitraire ». Il est aussi conseillé d'utiliser les notations (+a) et (-a) pour désigner des nombres relatifs, et aucune particularité n'est accordé à l'ensemble des entiers relatifs. Pour les fractions, uniquement les fractions à numérateur et à dénominateur positifs seront traitées. Il est aussi conseillé d'admettre pour une grandeur donnée, une valeur initiale à partir de laquelle la grandeur pourrait prendre des valeurs positives ou négatives. Le terme « grandeur » allume pour nous le feu rouge. Ce terme désigne aussi bien une longueur, une masse, etc. *Est-ce que la masse peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives ?* Un recours à l'axe numérique est exigé pour présenter les nombres relatifs, les comparer, les additionner et les soustraire. Il est demandé de multiplier les exemples de grandeur pouvant avoir deux sens : déplacement sur une route, température, altitude, temps,…

Nous n'avons trouvé dans le programme qu'une liste de tâches et de techniques sans fournir à l'enseignant des stratégies qui favorisent « le sens des nombres négatifs ». Les « Entiers Relatifs » sont au programme depuis toujours, mais ils n'ont jamais constitué un objet savant. C'est apparemment une « création didactique » (Mercier 2008).

4.3 Ce que dit le manuel.

Dans ce paragraphe nous décrivons les principales organisations mathématiques (OM) relatives au thème « Nombres relatifs » présentées dans le manuel de EB6utilisé par l'enseignant observé. Ce thème fait l'objet du chapitre 9 intitulé « NOMBRES RELATIFS », structuré comme suit. En préface figurent des photos avec des commentaires introductifs et le plan du chapitre ; puis les types de tâches T_i. Le contenu de chaque T_i s'organise en trois parties : Activités, l'essentiel (ce que l'élève doit retenir), Entraîne-toi (exercices d'entraînement relatifs à chaque type de tâches).

L'étude porte sur une analyse des types de tâches convoqués dans ces différentes parties. Nous analysons cette partie pour situer les raisons d'être des nombres relatifs et plus particulièrement des nombres négatifs.

Les types de tâches T_i exigés dans le plan de ce chapitre sont :

T_1 : Découvrir de nouveaux nombres-Notation.

T_2 : Repérage sur un axe – Abscisse d'un point sur un axe.

T_3 : Distance à Zéro – Nombres opposés.

T_4 : Comparaison des nombres relatifs.

T_5 : Représentation sur l'axe.

T_6 : Résous les problèmes.

Les nombres relatifs sont construits par modélisation. La plaque d'ascenseur, le thermomètre, la droite orientée sont les métaphores qui font « exister » ces nombres.

Mettons en évidence une des activités, par exemple celle autour de la « *plaque d'ascenseur* », relatives à T_1. Cette plaque est numérotée de –3 à 2, verticalement, en désignant par « RC » le niveau séparateur entre les trois étages indexés par un chiffre muni d'un signe « – » (–3, –2, –1) et les deux autres indexés par un chiffre sans signe (1, 2). Cette plaque n'est pas une nouveauté pour un élève de EB6, c'est vrai, elle est bien de son vécu. Un enfant de dix ans est capable de prendre l'ascenseur seul. Cette représentation verticale montre l'altitude de chaque étage par rapport à l'étage de référence « Rez-de-chaussée : RC ». Mais, dans d'autres ascenseurs, les plaques sont numérotées différemment. Certaines sont numérotées …, L2, L1, 0, 1, 2, .., GF, ou RC à la place de 0, pour d'autres les numéros des étages sont par deux sur chaque ligne. Comment l'élève va-t-il faire le lien entre n'importe quelle plaque d'ascenseur et l'ordre des entiers relatifs ? Comment l'axe des nombres relatifs pourrait « exister » dans l'institution, à partir de la tâche associée « plaque d'ascenseur » ?

5. Méthodologie

Dans ce travail, nous nous sommes appuyée sur des observations d'enseignement des nombres relatifs en classes de EB6 (B, type clinique et C, type ingénierie) d'une école privée, dans laquelle l'enseignant a accepté le type d'enseignement inhabituel : la mise d'un dispositif d'une ingénierie, dans la volonté d'amener ses élèves vers des adaptations servant de support pour la construction du sens des nombres relatifs. Comme notre étude est comparative, nous avons demandé à cet enseignant d'être le concepteur de son enseignement en EB6B. Nous avons évité de lui expliquer l'objectif de nos observations dans cette classe, et nous n'avons donné aucune appréciation ou commentaire que ce soit avant ou après chacune des séances observées et autour des contenus des séances. Il nous a informées qu'il ne dispose pas de cahier de préparation, et qu'il ne prépare pas un « scénario », il se contente d'écrire des notes qu'il nous a fournies. En revanche, nous lui avons fourni les documents qui expliquent la démarche de l'AER, en lui laissant la liberté de la gestion de sa classe et de plus, la liberté de sortir du cadre de cette ingénierie s'il trouve le besoin. L'ensemble des séances, de 55 minutes chacune, dans chaque classe a été filmé et transcrit, et de plus enregistré sur un magnétophone, et accompagné de la prise de notes par nous-même, assise au fond de la classe.

6. Analyse des séances d'enseignement et expérimentation

L'analyse des séances observées nous a permis de mettre en évidence les éléments suivants.

En EB6C, l'étude s'est déroulée en huit séances.

- Le « programme de calcul » a été, au début, une tâche problématique pour les élèves. Ils ont vécu une rupture du contrat. Leurs conceptions sur « l'ordre des opérations » fonctionnent ainsi comme une réalité objective de référence à laquelle ils ont adhéré depuis toujours. Pour calculer 895634 + 20 – 19, ils ont opéré de gauche à droite**.**
- Après quatre séances d'enseignement, à partir d'un travail sur différents programmes de calcul, les élèves ont pu découvrir des *nombres négatifs* et des *nombres positifs*. Ils ont manifesté une motivation pour la recherche des programmes de calcul simplifiés qui les ont menés à la découverte et par suite à l'apprentissage des nombres négatifs. Une identité au signe « – » est donnée.
- Les élèves, pour apprendre, ont pris la responsabilité d'organiser le milieu et leur action sur celui–ci. La mésogenèse a été à leur charge. Ils ont conduit une action conjointe avec l'enseignant qui est intervenu à la fois en accompagnateur et en régulateur de leur action.
- L'enseignant**,** malgré le manque de patience et d'expérience dans la mise en place d'une ingénierie, a laissé une large place à l'action et à la réflexion des élèves pour faire ressortir le *statut* des nombres négatifs. Il a travaillé par ostension déguisée pour faire fonctionner le contrat, il a eu recours à des ostensifs graphiques, d'une part : il a entouré les signes + et – pour pousser les élèves à la recherche de leur signification verbale, il a relié les nombres pour expliciter le calcul de la forme $b - c$; gestuels, d'autre part : il a montré avec son doigt les nombres et les signes.

En EB6B, l'étude s'est déroulée en trois séances.

- Les élèves ont vécu dans la routinisation, du fait que l'enseignant ne dispose d'aucune théorie pour décrire son travail. Le processus d'enseignement est mécanique. Les nombres relatifs sont introduits dans un domaine paramathématique, par la métaphore de la plaque d'ascenseur. Le zéro est le nombre qui correspond au « Rez de chaussée » ;

- L'enseignant est resté collé au contenu du manuel et a travaillé suivant le triptyque : Activités, cours, exercices, en faisant des allées et des retours entre « activité » et « cours » à noter dans le cahier ;
- Les techniques sont indiquées et non pas instrumentées. Aucune identité n'est donnée au signe « – », sa fonctionnalité est accordée aux « étages sous-sols » et à l'altitude ;
- L'enseignement ne présente qu'un ensemble de recettes à appliquer. Les élèves sont réduits à des automates, ils font des applications par analogie avec le travail de l'enseignant.

Pour évaluer les apprentissages et les modifications des rapports des élèves à l'étude des nombres relatifs, afin de préciser si l'enseignement de l'AER profite ou non aux élèves, nous avons fait le choix de placer les élèves dans différentes situations de calcul où ils ont dans certaines à valider une réponse donnée. Il s'agit pour nous de tester la viabilité de l'implantation de l'AER au sein du système éducatif et de prouver l'effet du manque théorique dans l'enseignement ordinaire des nombres relatifs, et non pas d'étudier les erreurs des élèves. Nous avons construit deux exercices couvrant la somme et la différence de deux nombres relatifs ((+4) + (-8) =). La passation de ces exercices fut réalisée à la fin de l'apprentissage dans les deux classes (28 élèves), et le même jour. Nous avons interdit l'usage de la calculatrice, notre but était de voir le rapport personnel de chaque élève aux nombres relatifs. Le pourcentage de réussite est de 5% de différence du côté de l'enseignement ordinaire. Nous renvoyons la réussite des élèves de la classe de EB6 B, au nombre des exercices d'application faits pendant que les élèves de l'autre classe recherchaient les nombres négatifs et prenaient la responsabilité de découvrir les programmes de calcul.

7. Conclusion

Ce travail nous a montré que l'action enseignante de l'ingénierie des nombres relatifs, n'est pas seulement le fait de l'enseignant, les élèves ont manifesté l'intention d'enseigner et de s'enseigner. Ils ont manifesté une motivation pour la recherche des programmes de calcul qui les ont menés à la découverte des nombres négatifs. Ils ont participé à la construction du sens de ces nombres. Ils n'ont pas appris des « savoir-faire » fragiles et de peu de portée. Le signe « – » a une identité, sa fonctionnalité n'est pas accordée à des métaphores (l'axe orienté, températures, altitudes, chronologie, plaque d'ascenseur,..). Alors que, l'enseignement ordinaire des nombres relatifs est « économique » (réduit) et mécanique. Les élèves par routinisation appliquent un ensemble de recettes des techniques n'ayant aucune théorie. À force de faire des applications, ils réussissent les calculs.

Un test fait au début de l'année scolaire suivante pour les mêmes élèves a chamboulé les résultats de notre expérimentation. Il a montré que le pourcentage de réussite des élèves qui étaient en EB6C dépasse de 15% le score de ceux qui étaient en EB6B.

Tout ceci, nous place devant la nécessité d'une réflexion sur l'organisation de l'enseignement non seulement des nombres relatifs, mais de toutes les mathématiques. Aucun mode d'enseignement ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir et des difficultés. Néanmoins, il semble raisonnable de repenser l'enseignement des mathématiques, mais également la formation des professeurs.

L'approche en termes d'AER donne des possibilités à l'enseignant de s'investir davantage dans la conception et la création de la progression du savoir et de ne pas apparaître comme « asservi » à l'institution (Yves Chevallard;1995) qui lui impose ses choix en ne lui laissant trop souvent que les tâches décisionnelles ; mais aussi à l'élève d'envisager un apprentissage plus assuré, de trouver de l'intérêt à l'étude des mathématiques.

D'où l'utilité de l'intégration des AER dans l'enseignement des mathématiques au Liban à tous les niveaux.

Références

Chevallard Y (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *RDM, 12*(1), (pp.73-112).

Chevallard Y (1995), La fonction professorale : Esquisse d'un modèle didactique. *VIII^ème^ école d'été, Auvergne.*

Chevallard Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In Noirfalise R., éd. Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques: acte de l'Université d'été de la Rochelle. *Ed IREM de Clermont-Ferrand.*

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *RDM*, *19*(2), (pp.221−266).

Chevallard Y (2002), Les praxéologies didactiques ; Organiser l'étude. Cours n°1: Structures et fonction. *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des mathématiques*, Grenoble.

Chevallard Y. (2004), La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire, communication à la 3ème Université Animath, Saint Flour (Cantal), (pp.22-27).

Chevallard Y (2005). La didactique dans la cité avec les autres sciences. *Journées 2005 du Réseau Education Formation*, Montpellier.

Chevallard Y & Bosh M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques*. bilan et perspectives, hors-série, (pp.19-40).

Mercier A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique, *In Education & didactique*, v. 2, n°1, (pp.7–40).

Le manuel scolaire : Mathématiques, Cycle Moyen, 6ème année, EB6 Collection Puissance Al-Ahlia, Edition 2009

Programme libanais: décret-loi no 10227, date 8 mai 1997.

La problématique de l'évaluation et de la régulation : apports de la TAD

Brigitte Grugeon-Allys, Julia Pilet
Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Est-Créteil, France

Axe1

Abstract. In this article, we study how TDA impacts the problematization of the evaluation of learning and the regulation of teaching. Indeed, these questions were mainly addressed in a psycho-cognitive approach, without taking into account the student's subordination to an institution and the need to evaluate personal relationships with a given knowledge confronted with the institutional relationship, at different levels of co-determination. We study the potentialities of a praxeological analysis of tasks, and more particularly at the technological-theoretical level, with regard to an epistemological study of the field of knowledge, on the one hand, to characterize valid evaluations (Grugeon-Allys and Grapin, to be published) and on the other hand, to describe the praxeologies to be taught, taught and learned (Grugeon-Allys et al. 2012). From the linking of these praxeologies, we identify epistemological aspects to be worked on by the students in order to organize the regulation of teaching according to their learning needs (Pilet, 2015; Grugeon-Allys, 2016).

Résumé. Dans cet article, nous étudions en quoi la TAD permet de faire évoluer la problématisation de l'évaluation des apprentissages et de la régulation de l'enseignement. En effet, ces questions étaient principalement abordées dans une approche psycho-cognitive, sans prendre en compte l'assujettissement de l'élève à une institution et la nécessité d'évaluer les rapports personnels à un savoir donné confrontés au rapport institutionnel, à différents niveaux de co-détermination. Nous étudions les potentialités d'une analyse praxéologique des tâches, et plus particulièrement au niveau technologico-théoriques, au regard d'une étude épistémologique du domaine de savoir pour d'une part, caractériser des évaluations valides (Grugeon-Allys et Grapin, à paraître) et d'autre part, décrire les praxéologies à enseigner, enseignées et apprises (Grugeon-Allys et al., 2012). De la mise en relation de ces praxéologies, nous dégageons des aspects épistémologiques à travailler par les élèves pour organiser la régulation de l'enseignement en fonction de leurs besoins d'apprentissages (Pilet, 2015 ; Grugeon-Allys, 2016).

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

Notre contribution se situe dans l'axe 1 et interroge les apports de la théorie anthropologique du didactique pour faire évoluer la problématisation de l'évaluation des apprentissages et de la régulation de l'enseignement. En quoi la TAD permet-elle d'interroger les approches psychologique et cognitive de l'évaluation, souvent très présentes dans les travaux sur l'évaluation ? En quoi la TAD permet-elle d'étudier la validité de l'évaluation des acquis des élèves, question déjà abordée par Yves Chevallard (2007) ? En quoi la TAD permet-elle de modéliser le profil d'un élève, d'une classe (Grugeon, 1997 ; Grugeon-Allys et al. 2012) et des parcours d'enseignement (Pilet, 2015) ? Ces études nous amènent à dépasser les usages classiques de la TAD, à travers d'une part, la prise en compte du cognitif et d'élèves spécifiques et d'autre part l'étude de la régulation de l'enseignement compte tenu des besoins d'apprentissages des élèves repérés après évaluation. Quelles sont les potentialités et les limites des usages de la TAD pour aborder de telles questions ?

Nous présentons d'abord les potentialités de la TAD pour une approche multidimensionnelle de la problématique de l'évaluation. Dans une seconde partie, nous nous centrons sur la validité d'une évaluation. Dans une troisième partie, nous développons les apports de la TAD pour modéliser le profil d'un élève et d'une classe spécifiques et de parcours d'enseignement différencié avant de proposer des perspectives de recherche.

1. Les potentialités de la TAD dans une approche multidimensionnelle de la problématique de l'évaluation

1.1. Approche multidimensionnelle de la problématique de l'évaluation

Nous abordons la problématique de l'évaluation dans une approche cognitive puis anthropologique.

Un élève est d'abord un sujet cognitif. Il s'engage dans un processus d'apprentissage relatif à un savoir et peut être confronté à des obstacles d'ordre épistémologique et/ou didactique pendant l'enseignement qu'il reçoit. Evaluer les connaissances et les compétences de l'élève nécessite une étude de l'apprentissage sur un champ conceptuel. Nous reprenons Gérard Vergnaud qui indique que, « étudier l'apprentissage d'un concept isolé ou d'une technique n'a pratiquement pas de sens » (Vergnaud, 1986, p 28).

Plusieurs didacticiens, en particulier, Yves Chevallard (1988, 2007), Brigitte Grugeon (1997, 2012), Michèle Artigue et Carl Winslow (2010) ont interrogé la problématique de l'*évaluation* dans le cadre de la TAD (Chevallard, 1992, 1999). Cet ancrage conduit à situer l'élève et l'enseignant comme sujets d'une institution. En effet, chaque élève est assujetti aux institutions dans lesquelles il apprend ou a appris, les savoirs étant relatifs aux institutions. Le rapport personnel d'un élève à un savoir donné, dans une institution donnée, se construit relativement au processus de transposition didactique qui dépend des programmes scolaires définissant le rapport institutionnel et du savoir enseigné par le professeur. C'est avec ce point de vue que Grugeon (1997) a remis en question l'origine des difficultés des élèves dans la transition lycée professionnel / général : les difficultés des élèves ne sont pas seulement d'ordre cognitif mais peuvent relever de décalages entre les rapports institutionnels dans la transition entre deux institutions.

La TAD se propose alors comme un outil de modélisation et d'analyse des praxéologies mathématiques apprises par les élèves, par rapport aux praxéologies mathématiques visées dans une institution donnée, compte tenu des assujettissements implicites que toute institution porte sur les pratiques qu'elle abrite. En effet, les praxéologies mathématiques et didactiques sont co-déterminées par une hiérarchie de niveaux didactiques (niveaux 1 à 5, de la discipline d'études aux sujets d'études) qui se conditionnent et se contraignent successivement, *via* les niveaux 0 à -3 (pédagogie et organisation de l'enseignement, noosphère et ministère qui définissent programmes, auteurs de manuels, société, aspects culturels et politiques en lien avec la civilisation). Ces niveaux conditionnent l'activité réelle d'étude et d'enseignement (praxéologies didactiques), tous extérieurs aux situations d'enseignement (Chevallard, 1999).

L'évaluation des réponses des élèves est souvent limitée à une analyse en termes de réponse correcte/incorrecte alors qu'elle peut être associée à l'étude des techniques et des éléments technologico-théoriques développés par les élèves lors de la résolution d'une tâche d'un type donné, permettant l'interprétation d'une erreur comme mise en œuvre d'une technologie faible, incomplète ou non idoine à ce niveau scolaire (Wozniak, 2012). Chevallard interprète d'ailleurs « l'erreur (..) comme un symptôme de l'effort pour créer une technique (ou la technologie qui doit l'accompagner), mais d'un effort qui, jusqu'ici, n'a pas abouti, chemin d'errance qui n'a, jusqu'à présent, conduit nulle part. » (Chevallard, 2004, p6).

Nous fondons la modélisation d'une évaluation, considérée comme un « *échantillon* de l'ensemble des types de tâches constitutifs des organisations praxéologiques visées » (Chevallard, 2007) sur la définition d'un référent épistémologique relativement au domaine de savoir étudié, indépendant des institutions (Bosch et Gascon, 2005) tout en se situant dans leur champ d'action. Nous définissons un référent épistémologique qui permet de mettre en perspective les résultats d'évaluation des élèves (savoirs appris) avec les programmes, les pratiques de leur enseignant mais aussi, suivant les différents niveaux de codétermination, avec les pratiques dans un établissement assujetti à des contraintes de plus haut niveau liées aux pratiques des systèmes d'enseignement et des évaluations standardisées.

Nous posons l'hypothèse que la prise en compte d'un référent épistémologique relativement à un domaine de savoir favorise :

- la conception d'une évaluation valide (voir § 2) relativement aux praxéologies évaluées,
- la comparaison de dispositifs d'évaluation à différents niveaux de co-détermination mathématique et l'interprétation des résultats au regard des niveaux de co-détermination supérieurs,
- le repérage des praxéologies implicites ou ignorées dans les programmes, en lien avec les praxéologies apprises des élèves et les obstacles d'ordre épistémologique ou didactique qu'elles sous-tendent,
- la caractérisation de praxéologies à travailler pour réguler l'enseignement (voir §3) et accompagner les élèves à donner des raisons d'être aux concepts, à préciser les domaines de validité des techniques, à agréger des praxéologies ponctuelles ou locales, à compléter des praxéologies.

1.2. Evaluation en algèbre élémentaire en fin de cycle 4

Nos travaux sur l'évaluation et la régulation ont été développés depuis 1990 dans le cadre des projets Pépite (Grugeon, Chenevotot & Delozanne, 2013). Le domaine mathématique privilégié est celui de l'algèbre élémentaire, au niveau de l'enseignement obligatoire (cycle 4).

Pour modéliser et analyser les praxéologies mathématiques apprises par les élèves, nous avons préalablement défini une référence épistémologique (Grugeon, 1997) s'appuyant sur une synthèse des travaux de didactique de l'algèbre dans différentes approches (Chevallard, 1985, 1989, Gascon, 1995, Kieran, 2007). Julia Pilet (2015) et Stéphane Sirejacob (2017) ont poursuivi la définition d'une praxéologie épistémologique de référence relative à l'algèbre, structurée autour des praxéologies relatives aux expressions algébriques, aux formules et aux équations. Les praxéologies ponctuelles concernent ces différents objets, généraliser, modéliser, mettre en équation, prouver (du côté *outil*), reconnaître, substituer, développer, factoriser, tester, résoudre (du côté *objet*). Ces praxéologies ponctuelles se regroupent en praxéologies locales : praxéologie *modélisation*, praxéologie de *preuve*, praxéologie *de calcul*. La praxéologie de référence définit les propriétés idoines d'un calcul « raisonné et contrôlé » (prise en compte des aspects procédural et structural des expressions algébriques, des équations, de l'équivalence des expressions algébriques, des équations, de la dialectique numérique / algébrique), les éléments technologico-théoriques associés ainsi que les ostensifs.

Nous montrons maintenant en quoi la TAD, et plus particulièrement la notion de praxéologie, permet d'appréhender la définition de preuves didactiques de validité d'une évaluation et de définir des critères pour qu'une évaluation soit valide.

2. Potentialités d'une approche praxéologique pour caractériser la validité d'une évaluation

La validité d'une évaluation concerne le degré d'adéquation entre ce qu'elle mesure et ce qu'elle prétend mesurer (Laveault et Grégoire, 1997, 2002). Elle fait toujours l'objet de nombreuses définitions et débats (Goldstein 2015, p.193) dans les différents champs scientifiques qui s'intéressent à l'évaluation, essentiellement dans une approche psychométrique. Brigitte Grugeon-Allys et Nadine Grapin (à paraître) proposent une approche didactique de la validité portant sur le contenu du test et les processus de réponse mis en jeu par les élèves, ces derniers ayant déjà été travaillés par Marc Vantourout et Rémi Goasdoué (2014). Leur approche vise à spécifier les savoirs mathématiques visés dans chacune des tâches et plus globalement sur un domaine mathématique donné, à décrire les praxéologies évaluées. Grugeon-Allys et Grapin montrent les potentialités d'une analyse praxéologique *a priori* prenant appui sur la définition d'une praxéologie épistémologique de référence relative au domaine mathématique et obtenue suite à une analyse épistémologique du domaine. Nous revenons sur leur méthodologie d'analyse de la validité d'une évaluation.

2.1. Cadre d'analyse de la validité des évaluations

Dans l'approche développée par Grugeon-Allys et Grapin, la validité d'une évaluation externe ou interne est étudiée à travers une analyse praxéologique des tâches d'évaluation au regard de la praxéologie de référence. Dans le cas d'une évaluation interne, nous prenons aussi en compte les praxéologies enseignées. Les praxéologies développées par les élèves dans leurs productions sont analysées suivant les éléments technologico-théoriques visés. L'interprétation des résultats peut conduire à des propositions pour faire évoluer le système d'enseignement. Du côté du contenu, les preuves didactiques de la validité d'une évaluation concernent la représentativité de chaque tâche relativement à ce qui est évalué, la complétude des praxéologies étudiées, la variété de la complexité des tâches en termes de niveau de convocation.

L'analyse praxéologique *a priori* d'une tâche d'évaluation consiste à étiqueter le type de tâche et les éléments technologico-théoriques visés et à décrire sa complexité, en particulier, à travers le nombre de types de tâche convoqués, s'ils le sont par la tâche ou à la charge de l'élève (Castela, 2008).

L'analyse *a priori* prend également en compte l'impact du format des questions sur le processus de réponse des élèves au regard du savoir évalué, en particulier, dans le cas des QCM, celui des distracteurs sélectionnés comme réponse (Maury, 2005 ; auteur, 2014)[1].

L'étude de la validité d'une évaluation consiste alors :

- A faire une analyse praxéologique *a priori* locale, de chaque tâche, afin de repérer sa représentativité, c'est-à-dire sa pertinence et son adéquation par rapport à l'objectif d'évaluation qui lui est assigné ;
- A faire une analyse praxéologique globale, appelée « étude de la couverture du domaine », par l'ensemble des tâches du test sur un domaine mathématique à partir de la praxéologie épistémologique de référence et des programmes.

Grugeon et Grapin (à paraître) soulignent que d'autres éléments concernant l'activité réelle de l'élève ne peuvent être pris en charge dans la TAD mais sont à considérer et qui auront un impact sur les praxéologies des élèves. Ce peut être la nature du contexte de la tâche, le format de la question (QCM ou questions ouvertes), le niveau de langue, etc. Ce sont autant de variables didactiques qu'il est nécessaire de prendre en compte lors de l'analyse des tâches, mais qui demanderaient, pour en connaître l'impact sur l'activité effective de l'élève, des observations « cliniques » d'élèves en situation de résolution de la tâche (Vantourout & Goasdoué, 2014).

2.2. Exemple d'analyse praxéologique *a priori* locale : étude de l'adéquation entre la tâche d'évaluation et son objectif d'évaluation

Ce cadre d'analyse a été exploité pour étudier la validité d'évaluations standardisées, en particulier l'évaluation nationale CEDRE[2] de fin de collège mais aussi leur conception. Nous étudions la représentativité de deux tâches de formats différents issues de CEDRE 3e.

Tâche 1 : Dans le cadre de l'évaluation CEDRE 2014, cette tâche vise à étudier la compétence d'un élève à substituer une lettre par une valeur dans une expression littérale de degré 1.

[1] Par exemple une tâche de résolution d'équation avec un panel de solutions proposées dans un format QCM peut amener les élèves à tester l'égalité en substituant mais pas toujours à mettre en œuvre des techniques de résolution d'équations. Ainsi, le format de la réponse peut engendrer des processus de réponse différents et peut modifier l'objectif d'évaluation.

[2] http://www.education.gouv.fr/cid81218/methodologie-du-cycle-des-evaluations-disciplinaires-realisees-sur-echantillon-cedre-en-fin-d-ecole-et-fin-de-college.html

On donne l'expression $A = 1 + 3x$
Cocher la valeur de A pour $x = 8$.

- 25
- 32
- 39
- 48

Figure 1 : Exemple de tâche d'évaluation issue de CEDRE 2014 3e

Une analyse *a priori* de ce QCM met en évidence la pertinence du choix des distracteurs pour repérer des erreurs relatives aux propriétés visées : 25 bonne réponse (mise en jeu des priorités opératoires), 32 (calcul de (1+3)×8 lié à une non-prise en compte des priorités opératoires), 39 (interprétation incorrecte de 3*x* comme écriture en base 10), 48 (cumul des deux erreurs précédentes).

Si cette analyse *a priori* montre la représentativité de la tâche, ce n'est pas le cas de la seconde.

Tâche 2 : L'objectif annoncé dans CEDRE 2014 de cette tâche est de repérer si l'élève sait mettre en équation et résoudre un problème à l'aide d'un système de deux équations à deux inconnues.

Un fleuriste compose des bouquets de roses et d'iris.
Toutes les roses sont au même prix. Tous les iris sont au même prix.
Un bouquet composé de quatre roses et de quatre iris revient à 34 euros.
Un bouquet composé de six roses et de deux iris revient à 38 euros.
Quel est le prix en euros d'un bouquet de cinq roses et de trois iris ?

euros

Figure 2 : exemple de problème extrait de l'évaluation CEDRE 2014, fin de collège

L'analyse *a priori* permet d'envisager une autre technique que la mise en équation, mettant en jeu la technologie arithmétique, s'appuyant sur les propriétés de linéarité de la proportionnalité[3]. Ainsi le choix des valeurs des variables didactiques « nombre de roses et d'iris » n'est pas approprié pour tester les praxéologies visées *mettre en équation* et *résoudre* un système de deux équations à deux inconnues puisque la résolution du problème peut ne pas nécessiter la mobilisation d'une technologie algébrique[4]. Cette tâche n'est donc pas représentative de l'objectif d'évaluation visé à ce niveau scolaire. Une étude praxéologique favoriserait la sélection de tâches représentatives d'un savoir visé, ce qui

[3] En effet, en additionnant le prix de 4 roses et de 4 iris avec celui de 6 roses et de 2 iris, on obtient le prix de 10 roses et de 6 iris. 5 roses et 3 iris coûteront moitié moins.

[4] De plus, le choix des valeurs de ces variables didactiques rend coûteuse la résolution algébrique du système qui nécessite de nombreuses étapes et des solutions fractionnaires.

permettrait de caractériser les groupes de performance dans CEDRE par des tâches idoines relatives à un type de tâche.

2.3. Exemple d'analyse globale des tâches d'évaluation

Une telle analyse *a priori* de chacune des tâches nous a permis de faire une étude globale sur l'ensemble des tâches algébriques de l'évaluation CEDRE, en 2008 et en 2014, et de mettre en évidence la non représentativité de certaines tâches et l'incomplétude des praxéologies, en particulier en ce qui concerne les praxéologies de modélisation et de preuve, mais aussi des praxéologies de calcul en 2014.

Types de tâches	**CEDRE 2008**	**CEDRE 2014**
Produire	**0**	**0**
Traduire	1	3
Associer	1	4
Mettre en équation	**0**	**0**
Conjecturer	**0**	**0**
Prouver	**0**	**0**
Trouver un contre-exemple	3	2
Développer	2	0
Factoriser	2	2
Calculer (qui mobilise le calcul algébrique)	3	0
Substituer	5	4
Tester	6	0
Résoudre une équation, un système	2	2
Reconnaître la structure	4	4
Choisir la forme la plus adaptée	0	0
Total	**29**	**21**

Tableau 1 : étude globale sur l'ensemble des tâches algébriques de l'évaluation CEDRE

Les travaux de Grugeon-Allys et Grapin (à paraître) montrent les potentialités de l'association de l'approche anthropologique avec l'approche psychométrique pour mettre en relation l'analyse didactique de certains résultats de l'évaluation avec des besoins d'apprentissage ignorés par les programmes (Castela, 2008) ou des pratiques d'enseignement à faire évoluer.

3. Potentialités des modes technologiques sur un domaine mathématique donné pour évaluer les praxéologies apprises et organiser la régulation de l'enseignement

Le modèle praxéologique et plus particulièrement le bloc technologico-théorique fournit une modélisation éclairante pour définir des stratégies de régulation de l'enseignement au sens de Linda Allal et Lucie Mottier-Lopez (2007) : l'enjeu est de faire évoluer les apprentissages des élèves sur le domaine étudié, en prenant en compte leurs besoins d'apprentissages repérés à partir d'une évaluation diagnostique, lors de moments de rencontre ou de reprise.

3.1. Rendre compte des éléments technologiques mobilisés par les élèves dans la résolution de problèmes du domaine algébrique

Nous faisons l'hypothèse que la caractérisation des praxéologies apprises des élèves à partir des éléments technologiques qu'ils mobilisent majoritairement dans la résolution des tâches du domaine considéré peut faciliter le choix de stratégies d'enseignement et la gestion des interactions en classe par l'enseignant. En effet, considérer que les élèves ont un fonctionnement cohérent (Grugeon 1997) sur un domaine mathématique donné revient à considérer que les techniques correctes ou incorrectes qu'ils mobilisent dans la résolution des types de tâches de ce domaine sont dépendantes du bloc technologico-théorique qu'ils mobilisent de façon prégnante. Ici, au-delà du modèle de référence, nous élargissons le bloc technologico-théorique de référence aux technologies erronées. Comme Marie-Caroline Croset et Hamid Chaachoua (2016), nous considérons qu'il est nécessaire de prendre en compte le sujet cognitif et en particulier les techniques erronées et donc l'erreur comme un objet d'étude en tant que tel au sein de la TAD. Mais, contrairement à Croset (2009), nous ne nous restreignons pas aux praxéologies de calcul ; nous étudions le rapport personnel de l'élève sur les praxéologies du domaine algébrique, en référence au modèle épistémologique de référence défini plus haut. Ce choix est crucial pour prendre en compte la complexité du rapport personnel des élèves à un domaine donné : bien souvent des techniques erronées en calcul algébrique masquent des difficultés plus profondes relatives au statut des lettres pour résoudre des problèmes de généralisation, de modélisation ou de preuve. Aussi, nous ne retenons pas le modèle des praxéologies personnelles développé par Marie-Caroline Croset et Hamid Chaachoua (2016).

Grugeon-Allys (2016) définit *a priori* quatre types de technologies mobilisées par les élèves en algèbre au niveau scolaire concerné, nommées « modes technologiques » : « (1) Technologie idoine (…), (2) Technologie faible (Wozniak, 2012) au vu du manque de discours justifiant les techniques (algébriques) ou de leur emploi, (3) Technologie incomplète relativement à certains aspects épistémologiques de l'algèbre élémentaire (processus de modélisation, processus de preuve, prise en compte de la structure des objets, de leur équivalence, de la dialectique numérique / algébrique, ..), (4) Technologie appuyée sur l'arithmétique. » (p 71).

Brigitte Grugeon-Allys les a opérationnalisés dans le domaine de l'algèbre dans le cadre de la conception de l'évaluation diagnostique *Pépite* (Grugeon-Allys et al., 2012) pour évaluer les praxéologies apprises des élèves en fin de la scolarité obligatoire. Cette évaluation, valide du point de vue de la couverture et de la représentativité des tâches, propose un codage des réponses des élèves sur l'ensemble des types de tâches de la praxéologie mathématique de référence en algèbre. Ce codage vise à caractériser les modes technologiques mobilisés par les élèves selon la praxéologie en jeu, et non les techniques utilisées pour résoudre les tâches, à partir des quatre dimensions d'analyse: EA (mode de transformation des objets algébriques dans des tâches de calcul), L (mobilisation des lettres dans les types de tâches de modélisation ou de preuve), J (mode de raisonnement), T (mode de traduction ou d'interprétation dans des tâches de traduction ou d'interprétation) (Grugeon-Allys, 2016) .

Ce choix de codage permet une analyse transversale des modes sur l'ensemble des tâches diagnostiques. La description des traits caractéristiques du rapport personnel (profil) de chaque élève à l'algèbre élémentaire met en évidence les éléments technologico-théoriques idoines mobilisés par les élèves. La modélisation macroscopique du profil retenue sur trois composantes, l'*usage de l'algèbre (UA), calcul algébrique (CA), traduction - génération (entre différents registres sémiotiques) (TG)* représente à grands traits, les différents aspects de l'activité algébrique de l'élève (voir figure 3) ; la géographie de la classe s'appuie également sur cette modélisation (Grugeon-Allys et al., 2012).

Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : avec peu de signification	Taux de réussite sur les questions techniques*	2 sur 12
	Taux de réussite sur l’interprétation des expressions algébriques*	7 sur 23
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
	Interprétation des expressions	Défaillante
Usage de l’algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	1 sur 9
	Maîtrise de l’outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : pour schématiser	Taux de réussite sur la mise en équation*	5 sur 24
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante
	Traduction des relations mathématiques**	Abréviative

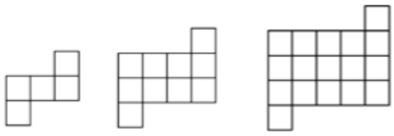
Figure 3 : Bilan d’un élève à l’évaluation Pépite selon les trois composantes

3.2. Réguler l’enseignement en fonction des besoins d’apprentissage des élèves

Nous posons l’hypothèse que pour faciliter une régulation de l’enseignement au service des apprentissages des élèves, cette dernière doit être organisée selon deux niveaux.

Au niveau global, l’étude épistémologique et didactique permet de dégager les aspects épistémologiques et didactiques à négocier dans l’introduction de savoirs nouveaux ou la reprise de savoirs anciens. Cette étude permet également de mettre en regard les modes technologiques mobilisés par les élèves avec des implicites dans les praxéologies à enseigner. Ainsi Pilet (2015) a montré que les praxéologies de *preuve* d’équivalence de programmes de calcul ou d’expressions algébriques étaient peu travaillées dans les manuels. Elle a défini des parcours d’enseignement différencié (PED) portant sur les aspects épistémologiques à travailler. Un PED porte sur la même praxéologie mais la tâche diffère en fonction de valeurs de variables didactiques adaptées aux modes technologiques mobilisés par les élèves. Par exemple, pour les élèves qui ont une utilisation inadaptée de l’algèbre dans la résolution de problèmes et utilisent des technologies arithmétiques, le PED présenté en figure 4, organisé au moment de la reprise de l’algèbre, permet de revenir sur le rôle de l’algèbre dans les problèmes de généralisation et de preuve. Les stratégies de régulation des apprentissages consistent à proposer aux élèves de rencontrer des situations dans lesquelles les éléments technologiques qu'ils mobilisent soient insuffisants ou utilisés hors de leur domaine de validité.

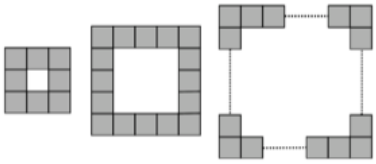
Enoncé pour le groupe B-. On considère des figures de tailles différentes à partir de carreaux unités comme sur les modèles ci-dessous. On souhaite déterminer le nombre de carreaux unités en fonction de la taille de la figure.



Taille 1 Taille 2 Taille 3

Quel est le nombre de carreaux dans la figure de taille 4 ? De taille 30 ?
Ecris une formule qui donne le nombre de carreaux en fonction de la taille de la figure.

Enoncé pour le groupe C. On considère un carré dont la bordure est constituée de carreaux unités gris.



Si le carré a un côté de 3 unités, quel est le nombre de carreaux gris ? Même question avec 10 unités et 100 unités.
Ecris une formule qui donne le nombre de carreaux gris en fonction du nombre de carreaux unités sur le côté du carré.

Figure 4 : Exemple de parcours d'enseignement différencié

Au niveau local, la régulation consiste à amener les élèves à étudier la validité d'une technique, à la justifier à partir d'arguments idoines et construire l'environnement technologico-théorique visé. C'est à nouveau la connaissance des modes technologiques mobilisés par les élèves qui facilite la gestion des interactions en classe. Par exemple, nous pouvons faire le lien entre l'erreur $3+5x \rightarrow 8x$ avec le fait que l'élève mobilise des technologies arithmétiques pour le calcul algébrique. Le recours à un contre-exemple pour invalider cette erreur peut conduire à construire un rapport à la rationalité mathématique idoine contrairement à un discours d'ordre légal, souvent utilisé par les élèves, du type « on n'a pas le droit d'ajouter des lettres et des nombres ».

4. Conclusion

En conclusion, nous avons montré des potentialités d'usages de la TAD autour de la problématique de l'évaluation et de la régulation. L'analyse praxéologique au niveau technologico-théorique est un levier pour décrire les praxéologies apprises des élèves et les situer à différents niveaux de co-détermination (classe, établissement, système d'enseignement).

L'approche multidimensionnelle permet de coordonner différents cadres théoriques, ici issus notamment d'approches anthropologique et cognitive, indispensables pour appréhender l'évaluation d'élèves et de classes spécifiques.

Références

Artigue, M. & Winslow, C. (2010) International Comparative Studies on Mathema- tics Education : a Viewpoint From the Anthropological Theory of Didactics. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(1), 47-82.

Allal, L., & Mottier Lopez, L. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : revue de publications en langue française. In OCDE, *L'évaluation formative – Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires* (pp.265-290). Paris: OCDE/CERI Publication.

Assude, T., Coppé, S., Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et reduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques* Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives. Hors-série 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

Bosch, M., Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans Mercier A. & Margolinas C. (Dir) *Balises pour la didactique des mathématiques*. 197 – 122. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 28(2), 135–182.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x* 5, 51–94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43–75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 19(2), 221 – 266.

Chevallard, Y. (2004). Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions : déplacements, ruptures, refondation. *Journées de formation de formateurs 2004*, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr /spip/spip/article.php3?id_article=44

Chevallard, Y. (2007). http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/y-chevallard

Croset, M.-C., & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *36*(2), .

Croset, M.-C. (2009) Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élèves en termes de praxis en acte. Thèse de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17 (2), 167–210.

Grugeon-Allys, B., Grapin, N. (à paraître). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités ? Quelles divergences ? *Mesure et évaluation en éducation.*

Grugeon-Allys, B., Grapin, N. (2015). Validité d'une évaluation externe. Complémentarité des approches didactique et psychométrique. Dans A-C. Mathé et E. Mounier (Eds.) *Actes du séminaire national de Didactique des mathématiques. 2015*. Paris : IREM Paris 7.

Grugeon-Allys, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : une approche didactique multidimensionnelle. Evaluer. *Journal international de Recherche en Education et Formation (en ligne), 2.2*, 63-88. http://e-jref.org/index.php?id=137

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. & Robert A. (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire*, Bilan et perspectives. Hors-série 137–162. Grenoble : La pensée sauvage.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 707-762.

Maury, S. (2005). Modélisation du sujet en psychologie et en didactique, dans les travaux intéressant l'enseignement des mathématiques. In M.-H. Salin, P. Clanché, et B. Sarrazy, *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*, 118-127. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273-312.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x*, 22, 51-69.

Wozniak, F. (2012) Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Education et didactique*. 6(2), 65-88.

Propuesta de un proceso de *estudio de clases* para la formación inicial del profesorado de Educación Infantil desde el *paradigma del cuestionamiento del mundo*

Elena Lendínez Muñoz
Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, España

Francisco Javier García García, Ana M. Lerma Fernández
Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, España

Abstract. As teacher educators involved in the initial education of prospective Early Childhood Education teachers, we observe evident signs of the monumentalistic paradigm (visiting some mathematical and didactic of mathematics works) when the education of teachers is structured following the traditional scheme *lecture-practice*. In this communication, we aim at clearly identifying the challenge of a functional education of prospective teachers, formulating it as a research problem within the ATD, and exploring the potential of the *lesson study* device as tool to develop prospective teachers' praxeological equipment as responses to live and authentic professional questions. We will describe de design of such device, for the case of the initial education of prospective Early Childhood Education teachers around the teaching of numbers and numbering.

Resumen. Como docentes universitarios a cargo de la formación inicial del profesorado de Educación Infantil, observamos claros síntomas del *paradigma monumentalista* (visita a algunas obras tanto de Matemáticas como de Didáctica de las Matemáticas) cuando esta formación se organiza según el esquema tradicional *clase de teoría/clase de prácticas*. En esta comunicación pretendemos identificar con nitidez el reto que supone la formación profesional funcional del futuro profesorado, formularlo como un problema de investigación dentro de la TAD, y explorar la potencialidad del dispositivo del *estudio de clases* como herramienta para desarrollar el equipamiento praxeológico del profesorado como respuesta a *cuestiones profesionales* vivas y auténticas. Se describirá el diseño de este dispositivo, para el caso de la formación inicial de profesorado de Educación Infantil sobre la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos.

1. Introducción

La formación del profesorado, inicial y continua, es un dominio de investigación central en el área de Didáctica de las Matemáticas.

Liste des editeurs (Eds.)
Métodos de investigación en la TAD (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

Tradicionalmente, dos ejes se interconectan dentro de esta problemática: el del conjunto de conocimientos y destrezas que el profesor de matemáticas necesita en una determinada institución (dimensión del equipamiento praxeológico de la profesión), y el de cómo construir y desarrollar estos conocimientos, y estas destrezas, de manera efectiva (dimensión de los dispositivos para la formación).

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se puede identificar toda una línea de investigación en esta perspectiva, representada por trabajos como los de Gisèle Cirade (2006), Yves Chevallard (2009), Marianna Bosch y Josep Gascón (2009), Luisa Ruiz-Higueras y Francisco Javier García (2010), Alicia Ruiz-Olarría, Tomás Ángel Sierra, Marianna Bosch y Josep Gascón (2014), Alicia Ruiz-Olarría (2015) o Francisco Javier García (2017). Algunos de los avances más interesantes han sido: la despersonalización de la problemática del conocimiento del profesor (conocimiento de la profesión), la caracterización de este en términos praxeológicos (equipamiento praxeológico matemático-didáctico de la profesión), la experimentación de nuevos dispositivos para el desarrollo de este equipamiento (los REI-FP: recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado) o la extensión del *paradigma del cuestionamiento del mundo* a la formación del profesorado (cuestionamiento del mundo de la profesión), en torno a la que girará esta comunicación.

2. El paradigma del cuestionamiento del mundo en la formación de la profesión

Yves Chevallard (2015) propone el *paradigma del cuestionamiento del mundo* con el objetivo de hacer frente a los fenómenos indeseables que aparecen dentro del *paradigma de visita de las obras*. En F.J. García (2017) se propone extender este paradigma al caso de la formación del profesorado. Muy frecuentemente, esta formación está más organizada como *visita* a determinadas *respuestas* (“la resolución de problemas”, “los niveles de Van Hiele”, “la Teoría de las Situaciones Didácticas”) que los formadores presentan, considerando que son útiles y pertinentes para el profesorado, que como un verdadero cuestionamiento del mundo de la profesión docente. De esta forma, se corre el riesgo de estructurar la formación del profesorado a partir de los bloques tecnológico-teóricos de equipamientos praxeológicos ya existentes en la profesión, manteniendo implícitas, e incluso ausentes, las cuestiones que dieron lugar a su creación. Privados de sus "razones de ser", y como una consecuencia más del *paradigma monumentalista*, la toma de contacto de la profesión con estos equipamientos dejará completamente bajo la responsabilidad de los profesores el darle sentido a los mismos, dificultando enormemente que estos equipamientos se conviertan en verdaderas herramientas para actuar ante las situaciones problemáticas que la profesión debe abordar.

Este fenómeno lo venimos observando, de forma reiterada, en la formación inicial del profesorado de Educación Infantil en la Universidad de Jaén. Los estudiantes cursan una única asignatura de Didáctica de las Matemáticas (*Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil,* asignatura obligatoria de 7 créditos ECTS, que se traducen en 6 horas semanales presenciales de teoría y 3 horas semanales presenciales de prácticas, durante 5 semanas), organizada según el dispositivo clásico *clase de teoría/clase de prácticas*. La asignatura se centra en el aprendizaje por adaptación al medio, la Teoría de las Situaciones Didácticas y, a partir de ella, la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos lógicos, aritméticos, espaciales y geométricos en la escuela infantil. Aun cuando se proponen muchos ejemplos y casos prácticos, la formación que reciben los futuros maestros asume en gran medida los postulados de un *paradigma monumentalista*, siendo tal vez el síntoma más evidente el que se les proporcione a los estudiantes un conjunto de respuestas recogidas en un "temario", junto con unas clases de *teoría* orientadas a exponer (explicar) dicho temario. Aunque se incluyen cuestiones problemáticas a las que el "temario" intenta dar respuesta (por ejemplo, *¿qué conocimientos lógicos se deben trabajar en la escuela infantil?,* o *¿para qué sirve el número y su designación escrita?*), el mero hecho de formularlas no implica que generen, por un lado, el sentido de los conocimientos matemático-didácticos que se exponen y, por otro lado, que consigan que el equipamiento praxeológico de los futuros maestros se desarrolle más allá del bloque tecnológico-teórico, convirtiéndose en un verdadero instrumento que informe y provoque una *praxis* profesional (como constatamos con estos mismos estudiantes en sus periodos de prácticas docentes o en la realización de sus Trabajos Fin de Grado).

La formación del profesorado según el *paradigma de cuestionamiento del mundo de la profesión* (*PCMP*) puede ser modelizada con el esquema herbartiano (véase García, 2017). Este representa un sistema didáctico constituido por uno o varios profesores *X*, con el apoyo de uno o varios formadores *Y* (eventualmente, $Y=\emptyset$), y articulado en torno al estudio de una o varias *cuestiones profesionales Q*. La comunidad de estudio, tomando en serio el estudio de esta cuestión, indagaría en el *mundo de la profesión* buscando posibles respuestas ya existentes ($R_i^{\lozenge}$), y considerando obras ya creadas que les permitan estudiar, cuestionar, deconstruir y validar estas respuestas. Este conjunto de respuestas y obras actúan como un *medio* (en el sentido brousseauniano), potencialmente útil a la comunidad de estudio en su búsqueda de una posible respuesta $R^{\heartsuit}$. Esta respuesta tiene siempre un carácter provisional, ya que dependerá de lo adecuada y potente que sea para ofrecer una respuesta satisfactoria a *Q*, y estará condicionada por la posible emergencia de nuevas cuestiones problemáticas derivadas de *Q*, o por la toma en consideración de respuestas $R_i^{\lozenge}$ y obras O_j alternativas (Figura 1).

$$[S(X; Y; Q) \diagup M=\{R_1^{\lozenge}, ..., R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, ..., O_n\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Figura 1. Esquema herbartiano (Chevallard, 2009)

Considerar la formación del profesorado desde este paradigma supone un doble reto. Por un lado, la identificación de *cuestiones profesionales* con suficiente poder generador para desarrollar el equipamiento praxeológico de la profesión. Por otro lado, el diseño de dispositivos que permitan a la profesión identificar y explorar, de forma productiva, dichas cuestiones (véase Figura 2).

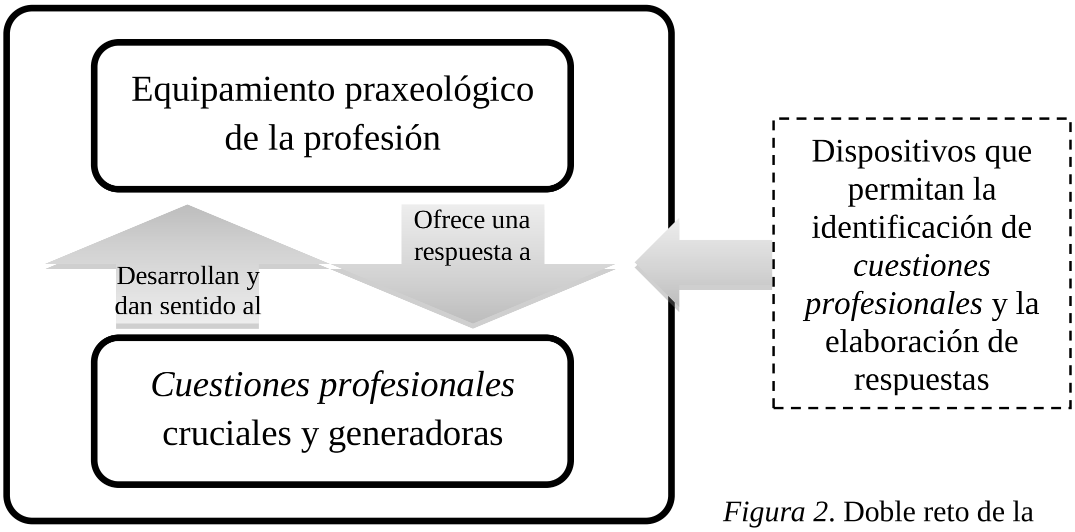


Figura 2. Doble reto de la formación del profesorado desde la TAD

En este contexto, nuestra investigación tiene por objetivo explorar posibles respuestas a las siguientes cuestiones: ¿Qué dispositivos pueden ser eficaces para organizar la formación de los maestros dentro del *PCMP*? ¿Cuáles son las condiciones y las restricciones que permitirían o no el uso de estos dispositivos en los sistemas actuales de formación inicial del profesorado en España? En particular, en esta comunicación nos centraremos en la primera cuestión, explorando la posibilidad que podría ofrecer el dispositivo del *estudio de clases*.

3. El dispositivo del *estudio de clases* desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

El dispositivo de *estudio de clases* (*EC*) es una práctica para la formación inicial y continua del profesorado desarrollada en Japón durante más de 100 años, que llamó la atención en la esfera internacional a partir de los resultados del estudio TIMSS[1].

Sucintamente, el *EC* se puede describir como un dispositivo que permite al profesorado desarrollar su práctica y su conocimiento profesional a través del diseño colaborativo y cuidadoso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior. Esbozaremos los rasgos más importantes y, hasta cierto punto, idealizados de este dispositivo, basándonos en Tad Watanabe, Akihiko Takahashi y Makoto Yoshida (2008), Brian Doig y

[1] Third International Mathematics and Science Study

Susie Groves (2011), Aki Murata (2011), Yoshinori Shimizu (2014) y Toshiakira Fujii (2015):

1. Un *EC* parte siempre de algún tipo de inquietud por parte del profesorado, normalmente sobre el aprendizaje de sus estudiantes, que conduce a la formulación de una *pregunta de investigación*. Esta cuestión no es una formalidad, sino que debe ser tomada en serio y guiará las siguientes etapas, hacia la búsqueda de una posible respuesta a la misma.
2. El grupo de profesores comienza un proceso colaborativo que conduce al diseño de una intervención en el aula, y que incluye un documento detallado de cómo será esta (*plan de clase*). Esta intervención se puede apoyar en actividades ya existentes, o puede incluir el diseño de otras nuevas. En esta fase, los profesores van más allá de explorar posibles tareas, involucrándose en un verdadero proceso de investigación (*kyozaikenkyu*, en japonés), que podría incluir el análisis del currículo, de libros de texto, de otros materiales curriculares, de artículos y libros científicos, etc. El profesorado dedica tiempo y esfuerzo a anticipar cómo la intervención (*la clase*) va a funcionar y qué tipo de estrategias podrían movilizar los estudiantes. Para todo ello, el profesorado podría contar con la ayuda de uno o varios expertos (*koshi*, en japonés). El resultado es un documento (el *plan de clase*), que incluye: (i) el objetivo de la clase y su conexión con la pregunta de investigación; (ii) un análisis detallado de las posibles respuestas de los estudiantes, posibles errores, bloqueos, concepciones erróneas, etc.; (iii) la acción del profesor en el aula, para introducir la actividad, sostener y apoyar el trabajo de los estudiantes, comparar las respuestas de los estudiantes, y elaborar una síntesis a partir de éstas.
3. Una implementación de la *clase* por parte de un profesor del grupo, mientras que el resto observa. El profesor trata de ajustarse al *plan de clase*, aunque las circunstancias de la intervención le pueden llevar a hacer modificaciones. El resto observa la clase, centrándose en la actividad matemática de los alumnos, y no tanto en las acciones del profesor. La observación está guiada por la búsqueda de respuestas a la *pregunta de investigación*.

4. Tras la intervención, se produce una discusión grupal, centrada en las estrategias y las dificultades de los estudiantes, y conectada con la *pregunta de investigación*. El objetivo no es analizar ni cuestionar la intervención del profesor. En ocasiones, la discusión puede verse enriquecida con la intervención de un experto externo (normalmente un profesor universitario u otro profesor con experiencia).

Toshiakira Fujii (2016) añade una quinta etapa, que denomina "reflexión", y en la que el ciclo se documenta, el aprendizaje profesional se consolida, y nuevas cuestiones podrían emerger. En esta etapa se elabora un informe en el que se incluyen la *pregunta de investigación, el plan de clase,* datos de los estudiantes recogidos en la observación de la implementación y una reflexión sobre lo que se ha aprendido.

Desde la TAD, Carl Winsløw (2011) y Takeshi Miyakawa y Carl Winsløw (2013) han propuesto una primera reinterpretación del *EC*, basándose en las nociones de *sistema didáctico* (Brousseau, 2002) y de *infraestructura matemática y didáctica* (Chevallard, 2009). Así, C. Winsløw (2011) considera que cuando los profesores planifican una clase, la observan, o cuando discuten *a posteriori*, forman parte de diferentes sistemas didácticos, que denomina, respectivamente, *sistema predidáctico* (PrS), *sistema didáctico de observación* (DoS) de un *sistema didáctico* (DS), y *sistema post-didáctico* (PoS). El *EC* integra, a lo largo del tiempo, a estos cuatro sistemas didácticos. Por ello, C. Winsløw (2011) propone referirse al mismo como un *sistema paradidáctico*, en el que los profesores comparten prácticas y conocimiento sobre diferentes sistemas didácticos, que se convierten en objeto de estudio, usando diferentes artefactos (Figura 3).

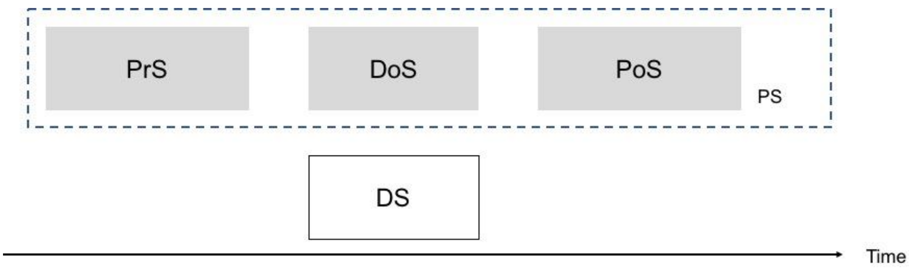


Figura 3. EC como sistema paradidáctico (Winsløw, 2011)

La existencia de un sistema didáctico provoca la necesidad de una *infraestructura matemática y didáctica* (Chevallard, 2009), que incluye un conjunto de praxeologías matemáticas y didácticas, así como las condiciones que las afectan y hacen posible que vivan en una institución determinada. De manera análoga, la existencia del sistema paradidáctico del *EC* hace necesario el desarrollo de una *infraestructura paradidáctica*, que fijará las condiciones y las restricciones que condicionan al *sistema paradidáctico* en sus diferentes fases.

A partir de esta primera reinterpretación del *EC*, formulamos, como hipótesis de trabajo, que este dispositivo podría ofrecer un marco de referencia para organizar la formación del profesorado desde el *PCMP*. Nos interesa profundizar sobre las posibilidades reales del mismo, así como sobre las condiciones y restricciones que posibilitarían su uso en las instituciones actuales de formación inicial del profesorado.

4. Una experiencia de *estudio de clases* con profesorado de Educación Infantil en formación inicial

En este apartado introduciremos algunos aspectos del trabajo que estamos llevando a cabo para crear una posible *infraestructura paradidáctica* para la formación inicial del profesorado de Educación Infantil, desde el *PCMP*, y a través del dispositivo del *EC*. En línea con el trabajo de C. Winsløw (2011), intentaremos exponer en qué sentido hemos ido construyendo esta infraestructura atendiendo a los diferentes *sistemas didácticos* (PrS, DoS y PoS) que aparecen, así como al sistema didáctico (DS) que se desea producir. No entraremos en esta comunicación a analizar la ecología de este dispositivo en instituciones universitarias de formación del profesorado como la nuestra.

Los datos provienen de una experiencia piloto llevada a cabo en el curso 2016-17 con 48 estudiantes del Grado en Educación Infantil, dentro de una asignatura optativa de 3er/4º curso. Estos estudiantes ya habían cursado la asignatura de 3er curso *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil* que, como ya hemos comentado, asume en gran medida los postulados del *paradigma monumentalista*. En total, 8 grupos de *EC* trabajaron, con la ayuda de varios formadores, en la identificación de una *cuestión de investigación* sobre aprendizajes numéricos en la escuela infantil y en el diseño de un *plan de clase*. Cada grupo tuvo la oportunidad de implementar su *plan de clase* en un aula real de Educación Infantil en un colegio público, habiendo recibido previamente información sobre las capacidades matemáticas del alumnado. Tras el análisis y la discusión posterior a la clase, los grupos pudieron efectuar modificaciones en sus *planes de clase* y conducir una segunda *clase de investigación*. Durante el proceso, los estudiantes fueron recogiendo su trabajo en actas semanales. Además, en cada grupo, las dos *clases de investigación* fueron grabadas en vídeo y las discusiones posteriores en audio. Para terminar, se les pidió un informe final en el que valorasen en qué grado habían sido capaces de dar respuesta a *la cuestión de investigación* que se habían planteado. Asimismo, a modo de conclusión, los estudiantes tuvieron que indicar qué impacto tuvo el proceso de *EC*, en el que estuvieron inmersos, en su desempeño como futuros maestros de Educación Infantil.

4.1. El sistema didáctico a producir (DS)

C. Winsløw (2011) considera que una *infraestructura paradidáctica* debe ser analizada en conexión con el sistema didáctico (DS) que intenta producir.

Así, asumimos que un componente esencial de la *infraestructura paradidáctica* es la *infraestructura matemático-didáctica* del sistema didáctico que se desea producir. En nuestro estudio, el DS que se desea producir sería uno organizado según los modelos epistemológicos y didácticos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002). Luis Radford (2008) los resume en los siguientes términos: (1) el conocimiento resulta como la solución "óptima" a una cierta situación o problema; (2) aprender es, en consonancia con la epistemología genética de Piaget, una forma de adaptación cognitiva; (3) para cada conocimiento matemático existe una familia de situaciones que le dan sentido, significado (al aparecer este conocimiento como la mejor estrategia posible ante dichas situaciones); (4) para el aprendizaje, es necesario que los estudiantes se enfrenten de forma autónoma a las situaciones planteadas.

En el caso de nuestra investigación, con maestros en formación inicial y para la enseñanza de los primeros conocimientos numéricos y aritméticos en la escuela infantil, asumimos que los elementos esenciales de esta *infraestructura matemático-didáctica* están disponibles, al haber sido estudiados en un curso anterior, y al contar los estudiantes con documentos concretos sobre la Teoría de la Situaciones Didácticas, las diferentes situaciones fundamentales y ejemplos de situaciones adidácticas concretas. El estudio exploratorio nos permitió constatar que el hecho de que los estudiantes tuviesen acceso a dicha *infraestructura* no implicaba necesariamente, como señalábamos al comienzo de esta comunicación, que fuesen capaces de ponerla en funcionamiento para generar los DS pretendidos. De hecho, fue este fenómeno el que nos condujo a explorar el uso del *EC*.

4.2. El sistema predidáctico (PrS)

En este sistema, los estudiantes para maestro deben afrontar tareas profesionales diversas. Aun pudiendo existir otras, las más relevantes son: la *tarea de formular una pregunta de investigación*, la *tarea de indagar* (sobre el currículo, sobre materiales de enseñanza, sobre el aprendizaje de los alumnos,…) y la *tarea de elaborar un plan de clase* (o propuesta de intervención en el aula).

En nuestra experiencia piloto, observamos la gran dificultad que tienen los estudiantes para problematizar su práctica profesional y para identificar *cuestiones profesionales* cruciales. En otro artículo, en revisión, nos preguntamos con qué herramientas se construyen estas cuestiones, formulando la hipótesis de que éstas dependen de los modelos epistemológicos y didácticos que el grupo de *EC* asume. Desde esta perspectiva, la posibilidad misma de llevar a cabo con éxito esta tarea estará fuertemente ligada a la disponibilidad de la *infraestructura matemático-didáctica* correspondiente, y a la capacidad de hacerla funcionar.

Con la ayuda de los formadores (profesorado universitario), se fueron perfilando diferentes tipos de *preguntas de investigación*: sobre el significado o la "razón de ser" de los conocimientos matemáticos; sobre las estrategias de los estudiantes y su posible evolución; o sobre el diseño de medios adidácticos y la gestión de variables didácticas para provocar determinados aprendizajes. Por ejemplo, un grupo llegó a formular la siguiente cuestión: *¿El uso del conteo en algunos contextos escolares garantiza que el niño haya aprendido a movilizar el número natural-cardinal con sentido (para medir y producir una colección), o sólo cuenta cuando se le pide que lo haga (o cuando él cree que debe hacerlo)?*

La *tarea profesional de indagación* se simplificó de forma deliberada, facilitándoles a los futuros maestros, por un lado, la descripción de las situaciones fundamentales que necesitasen (que supuestamente debían conocer) y, por otro lado, posibles variables didácticas a gestionar y posibles estrategias que podrían movilizar los niños.

Finalmente, la *tarea de elaborar un plan de clase* también supuso un reto mayor. No hay espacio para entrar aquí en detalle, pero identificamos como puntos cruciales a los que prestar mayor atención: (1) la elección del medio material y su estructuración para que sea adidáctico; (2) la formulación precisa y adaptada al alumnado de Educación Infantil de las consignas; (3) la toma de decisiones sobre las variables didácticas para ir generando diferentes "juegos" o "fases" que provocasen una evolución determinada en las estrategias de los niños.

4.3. El sistema didáctico de observación (DoS)

En este sistema didáctico, aunque llamado por C. Winsløw (2011) de "observación", confluyen, al menos, dos tareas profesionales diferentes:

- la que ejecuta el encargado de implementar el *plan de clase* en un aula real, activando para ello las praxeologías matemáticas y didácticas recogidas en el *plan de clase*, pero al mismo tiempo tomando las decisiones que considera necesarias u oportunas, según las contingencias del momento,
- la tarea propia de observar la evolución de la intervención, tratando de identificar cómo los estudiantes se adaptan a las situaciones propuestas, qué tipo de estrategias movilizan, qué dificultades y bloqueos surgen, cómo los superan (si son capaces), y a la vez recopilando datos para dar respuesta a la *pregunta de investigación*.

Nuestra experiencia, de nuevo, puso de manifiesto aspectos problemáticos sobre los que profundizar: (1) la elaboración poco detallada de los *planes de clase* condujo a incertidumbres importantes en momentos cruciales de la implementación (por ejemplo, sobre cómo introducir una situación, o sobre qué valores dar a ciertas variables didácticas para generar la siguiente "fase" en una secuencia de situaciones); (2) la evolución inesperada de los niños ante la situación (bien por una deficiente anticipación de las posibles estrategias que éstos movilizarían, bien por otros motivos) también generó dificultades en el estudiante que hacía de maestro en el aula, al tener que tomar decisiones *in situ*; (3) la observación de los niños no es una tarea menor, aun cuando se disponía del *plan de clase*, como referencia, y de tablas de observación.

4.4. El sistema post didáctico (PoS)

La actividad de los futuros maestros en este sistema post didáctico está fuertemente conectada con la anterior. De hecho, según la literatura ya citada en torno al *EC*, la tarea de *discutir sobre lo acontecido en la experimentación* debe llevarse a cabo justo al acabar la clase experimental.

En este sistema, lo importante no es describir lo que pasó, sino analizar el desarrollo de la experimentación, teniendo como referencia la pregunta de investigación a la que se desea dar respuesta. Es un momento clave en el que *praxis* y *logos* profesional se integran y articulan, contribuyendo al potencial desarrollo del equipamiento praxeológico de los maestros en formación implicados.

En nuestra experiencia piloto, observamos una vez más dificultades de los futuros maestros para ir más allá de lo anecdótico, y profundizar en un verdadero análisis. No queremos decir con ello que no surgiesen discusiones interesantes sobre las praxeologías matemáticas y didácticas puestas en acción durante la clase experimental, sino que éstas fueron escasas y poco profundas.

Hay varias razones que pueden explicar este hecho. Por un lado, la dificultad para observar y registrar lo que acontece durante la clase experimental (véase apartado 4.3). Por otro lado, un desarrollo insuficiente de la *infraestructura matemático-didáctica* del grupo, a la que ya nos hemos referido con anterioridad.

A lo largo del trabajo con los 8 grupos de *EC* (2 ciclos por grupo), se probaron diferentes formas de organizar estas discusiones. Así, se probó a hacerlas justo tras la clase experimental o dejando unos días de margen para que los estudiantes reflexionaran a partir de las notas tomadas, no detectando, en principio, una gran diferencia en el análisis que llevaban a cabo. Para estimular el análisis y centrarlo en la pregunta de investigación, en el segundo ciclo se les proporcionó un vídeo de la clase experimental y se les pidió que, tras su visionado, discutiesen y elaborasen un informe. Estos informes no evidencian, por ahora, una mejora significativa en su capacidad de análisis de la actividad matemática y didáctica acaecida en el aula, ni en su capacidad para vincular los fenómenos observados con la pregunta de investigación.

5. Conclusiones

En esta comunicación hemos presentado los primeros pasos de una investigación que pretende explorar dispositivos para la formación inicial del profesorado a partir del *paradigma del cuestionamiento del mundo de la profesión*. El origen de esta investigación está en las limitaciones observadas, como formadores de maestros, en nuestra forma de organizar la formación inicial a través del dispositivo tradicional *clase de teoría/clase de prácticas*, que puede ser interpretada como más cercana a los postulados del *paradigma de visita de las obras*.

En concreto, hemos elegido el dispositivo del *EC* porque consideramos que pone el acento en la formulación de cuestiones problemáticas y en procesos de indagación y experimentación en el aula y, por tanto, es *a priori* consistente con el paradigma que deseamos hacer vivir.

Tras la reformulación del dispositivo dentro del marco de la TAD, hemos descrito algunos aspectos de un trabajo en curso en el que se han diseñado y experimentado ciclos de *EC* con futuros maestros de Educación Infantil. Nuestra primera experiencia piloto ha puesto de manifiesto, por un lado, el papel crucial que juega la *infraestructura matemático-didáctica* disponible en los grupos de *EC* y, por otro lado, ha permitido hacer emerger y comprobar la complejidad de las tareas profesionales a las que los estudiantes para maestro se deben enfrentar. También hemos constatado las restricciones ecológicas que instituciones universitarias como la nuestra imponen al desarrollo de este dispositivo, si bien no han sido objeto de discusión en esta comunicación.

A través de los instrumentos de diagnóstico que hemos diseñado, usados antes y después de los ciclos de *EC* (cuestionarios pre y post sobre autoeficacia percibida en las tareas profesionales asociadas con el diseño e implementación en el aula de situaciones adidácticas), y aún en proceso de análisis, esperamos poder determinar hasta qué punto este dispositivo permite desarrollar el equipamiento praxeológico de la profesión.

Referencias

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Springer.

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. *Comunicación en el Seminario DiDiST, 29 de abril, 2009*. Toulouse.

Chevallard Y. (2015) Teaching Mathematics in Tomorrow’s Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Cham, Suiza: Springer.

Cirade, G. (2006). Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel. (Tesis de doctorado). Université de Provence.

Doig, B. & Groves, S. (2011). Japanese Lesson Study: Teacher Professional Development through Communities of Inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 77-93.

Fujii T. (2015). The Critical Role of Task Design in Lesson Study. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273-286). Cham, Suiza: Springer.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 411-423.

García, F.J. (2017). Modificación de las praxeologías didácticas del profesorado: un programa de desarrollo profesional en torno al aprendizaje por investigación. En G. Cirade *et al*. (Eds.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 529-556). Obtenido de https://citad4.sciencesconf.org/data/pages/ActesCITAD4.pdf

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: the paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 185–209.

Murata, A. (2011). Introduction: conceptual overview of lesson study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). Dordrecht: Springer.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: a brief inquiry into their conceptual differences. *Comunicación en el ICME 11, Survey Team 7, 6-13 de julio, 2008.* Monterrey, México. Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/31_radfordicmist7_EN.pdf

Ruiz-Higueras, L. & García, F. J. (2010). Didáctica de las Matemáticas y Formación de Maestros. En A. Bronner *et al*. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 171-213). Montpellier: Université de Montpellier.

Ruiz-Olarría, A. (2015). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma de Madrid.

Ruiz-Olarría, A., Sierra, T.A., Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. *Bolema*, 28(48), 319-340.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). Dordrecht: Springer.

Watanabe, T., Takahashi, A. & Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. En F. Arbaugh y P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into Mathematics Teacher Education* (Vol. 5, pp. 131–142). Association of Mathematics Teacher Educators (AMTE). Monograph Series.

Winsløw C. (2011). A Comparative Perspective on Teacher Collaboration: The Cases of Lesson Study in Japan and of Multidisciplinary Teaching in Denmark. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources* (pp. 291-304). Dordrecht: Springer.

El problema de la modelización matemática en la formación de profesores: una propuesta de cambio curricular desde la TAD.

Federico Olivero
Univ. Nac. del Comahue, Argentina

Mariela Martinez, María Laura Santori
Univ. Nac. del Comahue, Argentina

Abstract. In this work we approach the problem of the introduction of the modeling in the teachers' formation of mathematics. Especially, we shall review a curricular course created in the new study plan of the university teachers career in mathematics at the National University of the Comahue with the principal aim to experiment a process of study based on the layout of one RSP multidisciplinary as constitutive part of the mathematical training in the career of university professorship of mathematics.

Resumen. En este trabajo abordamos el problema de la introducción de la modelización en la formación de profesores de matemática. En particular, analizamos un espacio curricular creado en el nuevo plan de estudios del profesorado universitario en matemática de la Universidad Nacional del Comahue con el principal objetivo de vivenciar un proceso de estudio basado en un REI multidisciplinar como parte constitutiva de la formación matemática en la carrera de profesorado universitario en matemática.

Résumé. Dans ce travail nous abordons le problème de l'introduction de la modélisation dans la formation de professeurs de mathématiques. En particulier, analyse un espace curricular créé dans le nouveau plan d'études du professorat universitaire dans des mathématiques de l'Université Nationale du Comahue avec pour principal objectif d'expérimenter un processus d'étude basée sur le dessin d'un PER pluridisciplinaire comme partie constitutive de la formation mathématique dans la carrière de professeurs d'université de mathématiques.

1. Formulación del problema: la modelización matemática en la formación de profesores.

Desde el año 2011 hemos constituido un grupo de investigación en didáctica de las matemáticas en la Universidad Nacional del Comahue (UNCo) cuya finalidad es estudiar el problema de la formación inicial de profesores de matemáticas. Para nuestra investigación nos hemos posicionado desde el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

Ante la multiplicidad de aristas que presenta el problema de la formación de profesores, abordaremos *el problema de la modelización en la formación de profesores de matemática.* A partir de las expresiones vertidas por los egresados, los profesores y los estudiantes de la carrera de profesorado, como así también del análisis de los planes de formación, investigaciones y documentos oficiales, pudimos caracterizar algunas cuestiones problemáticas puntuales:

- Si bien los planes de estudio de las diferentes disciplinas específicas de la formación de profesores en matemática mencionan el abordaje de la resolución de problemas y su importancia en el proceso de estudio de las matemáticas, hay una ausencia casi total de un trabajo genuino de modelización.
- Se proponen a los estudiantes un sólido y elevado cúmulo de conocimientos matemáticos pero, al momento de desarrollar su práctica profesional en una escuela secundaria, estos encuentran fuertes limitaciones para hacer uso de ese conocimiento de manera funcional que les permita pensar sus propuestas didácticas profesionales.
- En los documentos oficiales y los diseños curriculares provinciales y nacionales se menciona la necesidad de una educación emancipadora que permita a los estudiantes asumir un rol protagónico en su proceso de estudio, que los incentive a cuestionar y asumir una posición crítica y reflexiva de la realidad, pero en la formación de profesores de matemáticas, particularmente en nuestra universidad, hay muy pocos espacios que permitan a los futuros profesores pensar este tipo de educación.

Nos planteamos entonces la siguiente cuestión:

¿Qué dispositivo didáctico podemos proponer en la formación de profesores que permita abordar el trabajo matemático basado en la modelización? ¿Qué condiciones debemos gestionar para hacer posible implementar estos

dispositivos? ¿Cuáles son y cómo se construyen los conocimientos necesarios para el desempeño profesional de los profesores que permita realizar una gestión efectiva de estos dispositivos?

Este problema, entre otros, ha sido abordado y viene siendo investigado desde hace algunos años en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), como se puede indagar en numerosos trabajos y tesis presentadas (Barquero, 2009; Bosch & Gascón, 2009; Cirade, 2006; Olivero, Bosch & Gascón, 2013; Ruiz Olarría, 2015; Licera, 2017, entre otros).

1.1. ¿Qué entendemos por modelización matemática?

La TAD postula que "gran parte de la actividad matemática puede identificarse (…) con una actividad de modelización matemática" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 51).

Esta afirmación adquiere pleno sentido si, en primer lugar, la noción de modelización matemática (MM) no queda limitada sólo a la "matematización" de situaciones extramatemáticas, esto es, cuando la modelización intramatemática es considerada como un aspecto esencial e inseparable de las matemáticas y, en segundo lugar, cuando se dota de un significado preciso a la actividad de modelización dentro del modelo general de la actividad matemática propuesto por la TAD (Serrano, 2013).

La MM se desarrollará de acuerdo a cuatro estadíos (Chevallard, 1989; Bolea, 2003):

1. Planteamiento de la situación problema y delimitación de las cuestiones a estudiar.
2. Construcción del modelo, determinación de las variables, planteamiento de hipótesis, relaciones y formalización de dichas relaciones.
3. Trabajo con el modelo para dar respuesta a las cuestiones planteadas.
4. Interpretación de los resultados y planteamiento de nuevas cuestiones.

1.2 La modelización matemática y la formación de profesores.

Desde la TAD se propone un dispositivo didáctico: los recorridos de estudio de investigación (REI), que integra la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2004) y favorece el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional (Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Serrano, 2013).

La noción de REI surge de la necesidad de fundamentar las organizaciones didácticas —tanto las escolares como las de cualquier otro tipo de institución— en una epistemología realmente funcional, en la que los saberes aparezcan como máquinas productoras de conocimientos útiles a la creación de respuestas *R* a cuestiones *Q* (Chevallard, 2004).

En el caso de la formación del profesorado y teniendo en cuenta las necesidades de formación detectadas en los profesores para gestionar los REI experimentados, es de fundamental importancia el diseño de recorridos de estudio de investigación para la formación del profesorado (REI-FP), fuertemente articulados con los REI, y que servirán para organizar las praxeologías matemáticas por enseñar y para la enseñanza, e integrar la formación matemática y didáctica del profesorado (Ruiz-Olarría, 2015).

Es por ello que, para permitir la implementación efectiva de los REI-FP en la carrera es necesario, como parte integrante de la formación matemática de los profesores, realizar recorridos matemáticos que integren al modelización matemática al quehacer de los estudiantes de grado. A tal fin, se ha creado el taller: *Actividad matemática y resolución de problemas (AMRP)* como una espacio curricular destinado a ello.

La propuesta del taller AMRP, constituye el espacio físico y temporal dentro del diseño curricular de la carrera de profesorado, para hacer efectiva la realización de un REI, donde la principal finalidad es la modelización de situaciones extra-matemáticas y el estudio de las características de los procesos de modelización.

1.3 El nuevo plan de profesorado universitario en matemática en nuestra universidad.

A partir del año 2014, en nuestra Universidad, se ha implementado un nuevo plan (Ord. C.S. 1467/14 – UNCo, 2014) de profesorado universitario en matemática, que tiene una duración de 4 años. Esta carrera es de grado, por lo tanto la mayoría de los estudiantes que acceden a ella, recién han finalizado sus estudios en la escuela secundaria (17 años o más).

Este nuevo plan contempla varias modificaciones sustanciales con respecto al plan anterior. Una de las principales variantes que se han introducido es la incorporación de nuevos espacios curriculares que hasta el momento eran relegados. Hasta la llegada del nuevo plan, la formación de profesorado contaba con dos grandes bloques independientes entre sí (o al menos, pensados independientemente). Por un lado, la formación matemática específica de la carrera, compartida con la formación de licenciados en matemáticas; y por otro, la formación pedagógica, común a todas las carreras de profesorados de diferentes disciplinas. Sólo al final de la carrera, y durante dos cuatrimestres, se abordaban las cátedras de "Didáctica de las matemáticas" y "Residencias", donde se intentaba articular estos dos bloques de conocimientos que habían sido trabajados en forma totalmente separados uno de otro.

Por todo ello, en el proceso de reformulación del plan se han introducido, además de las materias tradicionales del campo disciplinar y de la formación didáctico-pedagógica, diferentes espacios curriculares que permiten reflexionar sobre el trabajo matemático de un profesor, las organizaciones matemáticas necesarias en la enseñanza y la importancia de la MM en el establecimiento de las razones de ser de los objetos matemáticos. Es así, que en el nuevo curriculum se han introducido las materias: *Introducción al quehacer matemático, Taller actividad matemática y resolución de problemas, Taller sobre práctica docente, Actividad matemática como asunto de enseñanza, Didáctica de la matemática 1, Didáctica de la matemática 2 y residencia, Epistemología e historia de las matemáticas y Modelos matemáticos.*

Uno de los primeros espacios creados para la introducción y trabajo de la MM en la formación de profesores es el taller AMRP que se desarrolla en el primer cuatrimestre del segundo año de la carrera, con una carga horaria de 4 horas semanales durante 16 semanas. El objetivo principal de este espacio es realizar un proceso de estudio sobre la propuesta de un REI basado en una cuestión de interés multidisciplinar. En el año 2015 el primer REI abordado estuvo basado en el estudio de la dinámica de poblaciones de bacterias que contaminan el cauce del rio Limay (uno de los dos ríos que atraviesa la ciudad de Neuquén donde se encuentra emplazada nuestra universidad) y en lo realizado por Berta Barquero en su tesis doctoral (Barquero, 2009), respetando la organización matemática y la propuesta didáctica planteada.

En el año 2016 se desarrolló un REI basado en una nueva problemática: el estudio de la optimización de funciones reales de una y dos variables a partir del problema de la optimización de envases.

En el último año, se ha reeditado una versión del recorrido realizado en el año 2015 con pequeñas modificaciones, que permitieron optimizar los resultados. Los detalles de esto se proponen en otro trabajo redactado por el grupo de investigación (Escobar, Olivero & Santori, 2017).

2. Análisis de la implementación de los REI en el taller AMRP.

Los REI propuestos se desarrollaron en la UNCo durante el primer cuatrimestre de 2015, 2016 y 2017 en cursos de aproximadamente veinticinco estudiantes del Profesorado Universitario en Matemática.

2.1. Acuerdos preliminares

Previo al inicio de cada REI establecimos algunos acuerdos con los estudiantes, que dieron cuenta de un nuevo contrato didáctico:

- El trabajo se realiza en grupos de dos o tres integrantes.
- Los estudiantes tienen la libertad de elegir la confección de los grupos que se mantendrán estables durante todo el cuatrimestre.
- En cada sesión de trabajo, cada grupo debe entregar un informe por escrito con todo lo realizado en ese día. El informe debe contener: cuestiones a abordar en la sesión de trabajo, posibles vías de resolución que se trabajaron y conclusiones finales.
- Al inicio de cada sesión, uno de los grupos oficia de "grupo secretario" contando de forma breve un resumen de los avances y problemas que han quedado plasmados en los informes entregados la sesión anterior.
- La asistencia a clase es obligatoria, permitiendo sólo dos inasistencias durante el cursado del taller.
- La acreditación comprende haber entregado grupalmente todos los informes de avances, un examen escrito individual al final del taller, y la posibilidad de recuperar este examen.

2.2. Puntos a destacar durante los recorridos.

Queremos destacar cuestiones y hechos que sucedieron durante el desarrollo del taller en sus tres ediciones.

La limitación de las técnicas conocidas.

En los problemas propuestos en las distintas disciplinas y en los libros de texto, las soluciones siempre se pueden hallar analíticamente de manera precisa y a partir de las técnicas disponibles en la institución, pero en los diferentes recorridos propuestos en el taller, los estudiantes no siempre contaban con técnicas analíticas que permitieran hallar de manera directa soluciones exactas a los problemas que emergen. Esto obligó a buscar y construir técnicas y discursos tecnológicos originales que permitieran, por lo menos, obtener una solución aproximada a los problemas planteados. Por ejemplo, en uno de los recorridos, si bien los estudiantes ya habían cursado y aprobado la materia Cálculo 1 donde se abordan todas las técnicas clásicas del cálculo diferencial en una variable, las funciones que emergieron en el REI distaban sustancialmente de las funciones estudiadas en dicha materia, donde siempre era posible hallar sus ceros de manera analítica. Esto llevó a que el grupo de estudiantes propusiera el uso de las TIC como medio de estimación de dichos puntos y del comportamiento general de la función a estudiar, y debiera construir un discurso tecnológico apropiado para justificar sus técnicas.

La emergencia de más de una técnica para dar respuesta a una cuestión.

Al contar con grupos heterogéneos, donde algunos estudiantes provienen de un cambio de plan y cuentan con recorridos académicos muy diferentes, se nos planteó el problema de articular el trabajo entre los grupos, dada la diversidad de niveles de formación.

Al proponer los problemas de manera abierta y permitir el abordaje con diferentes niveles de profundidad, dando la posibilidad a emergencia de distintas técnicas provenientes de diversos recorridos personales de estudio de los estudiantes, esta realidad se transformó en una potencialidad para la búsqueda de respuestas.

En este punto, hay que destacar que, ante la emergencia de diferentes técnicas, se hacía necesario justificarlas, establecer algún criterio de selección de las mismas, pensando en su fiabilidad, economía, pertinencia, entre otras cuestiones.

La ventaja de introducir TIC.

Ante la necesidad de visualizar el comportamiento de los modelos cuya finalidad es realizar conjeturas y validaciones empíricas, los estudiantes propusieron el uso de diferentes dispositivos TIC, que no emergió como una imposición externa al problema, sino que fue genéticamente necesaria para encontrar una vía de acción en pos de nuestro objetivo de estudio. Por ejemplo, al introducirnos en el estudio de funciones de dos variables, en la segunda edición del taller AMRP, el uso de los software Excel® y WxMaxima® facilitó la búsqueda y visualización de los extremos absolutos. Dado que los estudiantes no habían realizado estudios previos sobre este tipo de funciones, resultó indispensable la visualización y manipulación de las gráficas de estas funciones para construir las primeras nociones intuitivas de una praxeología en torno a la búsqueda de extremos de funciones de este tipo.

Esto estableció un nuevo reparto de responsabilidades, donde los estudiantes tomaron decisiones sobre en qué momento y qué herramientas utilizar para llegar a las respuestas que pretendían encontrar y no dependieron de las sugerencias, ayudas o indicaciones de los profesores.

3. Análisis de los resultados

Una vez finalizado el ciclo lectivo en cada edición del taller, propusimos a los estudiantes realizar una evaluación de los aspectos que, según ellos, se debían destacar.

También incluimos en este apartado las opiniones de los docentes sobre algunas cuestiones importantes.

3.1. La visión de los estudiantes ante este tipo de dispositivo didáctico.

Mediante una encuesta donde los estudiantes debían aportar sus impresiones sobre el proceso de estudio que habían realizado, pudimos recabar aspectos positivos y negativos que posteriormente analizamos.

Aspectos negativos:

- Algunos estudiantes vivenciaban como *“desorden”* o *“falta de directivas claras”* el hecho que las consignas no fueran totalmente determinadas y cerradas. Enfrentarse a la necesidad de tomar decisiones, plantear hipótesis, decidir sobre las variables, optar por los caminos a seguir, entre otras cuestiones, generaba mucho rechazo dado que durante gran parte de la carrera, las actividades a resolver eran precisas y claras. Todas estas cuestiones venían “resueltas” en los enunciados, o los docentes eran los encargados de resolverlas.
- *“Por momentos las clases parecían improvisadas”*. El hecho de avanzar a partir de cada respuesta que se daba generaba la impresión que desde la cátedra no se había pensado nada previamente. Esto impulsó que al finalizar cada edición del taller, se les mostrara un esquema del REI y se discutiera con ellos las características de este dispositivo didáctico.
- *“Quedaron cuestiones abiertas”*. Al estar tan arraigado en el contrato didáctico que los problemas matemáticos abordados durante nuestra

escolarización siempre tienen respuesta (y en la mayoría de los casos deben ser únicas y acabadas), los estudiantes mostraron cierto recelo a dejar cuestiones sin responder o con repuestas parciales, considerando como incompleto el proceso de resolución.

Aspectos positivos:

- *"La dinámica de la clase"* y *"la modalidad de trabajo en clase"*. Acostumbrados a tomar apuntes en forma pasiva durante las clases teóricas y resolver ejercicios prácticos, muchas veces, en soledad; mostraron mucho entusiasmo al momento de enfrentarse a problemas en forma grupal y discutir resoluciones con el resto de sus pares.
- *"Las exposiciones para recordar lo visto en las clases anteriores"*. Esta instancia constituyó un espacio para que los estudiantes tomaran el rol de expositores frente a sus compañeros, rompiendo el esquema clásico del docente como único expositor.
- *"La instancia de evaluación a mitad del recorrido como evaluación del proceso de estudio."* Se les propuso a los estudiantes un trabajo práctico individual donde se debía reconstruir un modelo semejante al trabajado, pero con algunas nuevas hipótesis. Esto modificaba sustancialmente el modelo, pero hacía que se pudiera resolver con las mismas técnicas elaboradas hasta el momento. Esta evaluación tenía la premisa que no acreditaba para la nota final del taller, sino que permitía evaluar los conocimientos adquiridos por cada uno de los estudiantes hasta el momento.

3.2. Apreciaciones de los docentes

Destacamos algunas cuestiones que emergieron durante las diferentes ediciones del taller y que creemos importantes de comunicar.

Pérdida de la ilusión de control.

En las modalidades de clases teóricas y prácticas, comúnmente utilizadas en la universidad, se genera una falsa ilusión de control sobre lo que los estudiantes son capaces de hacer o no. La creencia de muchos docentes que aseguran el éxito en la resolución de problemas a partir de las explicaciones teóricas y la posterior ejercitación práctica, queda refutada a diario en las aulas.

La implementación de los REI permite romper con esta ilusión de control, dado que el avance en el proceso de estudio depende totalmente de la producción matemática de los estudiantes. La imposibilidad de avanzar de los estudiantes, fruto de genuinos obstáculos proveniente de la autonomía real de trabajo y de la verdadera disponibilidad de las técnicas y conocimientos, genera en los profesores fuertes sentimientos de ansiedad que no están acostumbrados a lidiar con la incertidumbre y los tiempos reales que se necesitan para llevar a cabo el trabajo matemático en una verdadera resolución de problemas.

La riqueza de la evaluación como parte del proceso de estudio.

Este tipo de dispositivo demandó el diseño e implementación de instrumentos de evaluación y acreditación que permitieran hacer un verdadero diagnóstico del proceso de estudio, individual y grupal, en su totalidad. Para ello se pensó en instrumentos de evaluación que dieran cuenta de:

- *La autonomía y responsabilidad del trabajo de los estudiantes*. A través de una evaluación de proceso, escrita a individual, durante el recorrido; y una evaluación final individual para acreditar, con la disponibilidad de todo el material elaborado durante todo el recorrido (apuntes, informes, entre otros).
- *La riqueza del trabajo en grupo*. La entrega de informes al finalizar cada sesión de trabajo y la realización de una exposición grupal como grupo secretario.
- *La completitud del proceso de modelización*. Al finalizar cada taller, los grupos tuvieron la posibilidad de elaborar un mapa de todo el recorrido realizado y dar cuenta del modelo construido, la necesidad de justificar sus decisiones y resultados, y comunicarlos.

3.3. Cuestiones que quedan pendientes

• Buscar un dispositivo que permita dar cuenta de lo que los estudiantes realmente desarrollan en todo el proceso y no sólo recabe los resultados acertados. Mucho de lo realizado en las sesiones de trabajo no se plasmaba en los informes que los estudiantes entregaban. Sólo mencionaban las técnicas o respuestas correctas y no explicitaban los caminos que conducían a ellas, o las técnicas que no estaban institucionalmente aceptadas, pero que sin embargo, los docentes habíamos observado que usaban.

• ¿Cómo articular este espacio con los espacios curriculares subsiguientes para transformarlo en un REI-FP, donde el vivenciar el REI propuesto sea parte integrante del mismo? Si bien, al final de cada edición del taller se realiza un esbozo de las cuestiones teóricas que justifican la implementación de los REI desde la TAD, no se cuenta aún con un espacio donde analizar con mayor profundidad estas cuestiones y permita el desarrollo de un REI-FP en su totalidad. Es decir, un recorrido mas amplio a lo largo de la carrera que propicie el diseño y gestión de procesos de MM a los estudiantes de profesorado, como futuros docentes.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del seminario matemático García de Galdeano, 29.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation: étapes d'une recherche (Vol. 16). IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2004), "Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire", *Journées de didactique comparée*, Lyon.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, i c e/Horsori.

Cirade G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de laprofession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*, Tesis doctoral. Université Aix-Marseille I.

Escobar, M.; Olivero, F. & Santori, M. L. (2017). Respuesta a las nuevas necesidades curriculares en Argentina desde la teoría antropológica de lo didáctico: un REI co-discplinar. (En redacción).

https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709

Licera, M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado* (Tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas.

Olivero, F.; Bosch, M.; Gascón, J. (2013). *Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado.* En Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J.-P., Chevallard, Y., Ladage, C. & Sierra, T. A. (Éds).

(2017). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*. https://citad4.sciencesconf.org

Ord. C.S. 1467/14. Universidad Nacional del Comahue. (2014). Profesorado Universitario en Matemática. Neuquén. http://faeaweb.uncoma.edu.ar/index.php/component/phocadownload/category/1-archivos?download=24:ord-1467-2014

Ruiz Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Memoria de Tesis Doctoral). Facultad de Formación de Profesorado y Educación. Departamento de Didácticas Específicas. Universidad Autónoma de Madrid.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. (Doctoral dissertation, Tesis Doctoral en Matemáticas). Departamento de Matemática, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. (Tesis doctoral). Departamento de Estadística Aplicada, Universitat Ramon Llull, Barcelona.

La preuve en géométrie dans les manuels au collège : une étude des quadrilatères et des triangles

Patrick TCHONANG YOUKAP

Université de Yaoundé 1, Cameroun A

Judith NJOMGANG NGANSOP et Daniel TIEUDJO

École Normale Supérieure de l'Université de Yaoundé 1, Cameroun

Abstract. The purpose of this paper is to identify how geometry is introduced in textbooks at college. To do this we have designed a grid to analyze the contents about quadrilaterals and triangles in the textbooks of the second and third grade class institutions. The results indicate that discovery problems of textbooks mostly correspond to prescribed tasks that do not always allow students to develop the heuristics knowledge skills that lead to the proof of the statement being studied. Furthermore could foster continuity between argumentation and mathematic proof.

Résumé. Le présent article a pour objectif d’identifier la façon dont la preuve est introduite en géométrie dans les manuels au collège. Pour ce faire nous avons conçu une grille pour analyser les contenus portant sur les quadrilatères et les triangles dans les manuels des institutions « classe de cinquième » et « classe de quatrième ». Les résultats indiquent que les problèmes de découverte des manuels correspondent pour la plupart aux tâches prescrites qui conduisent à la preuve de l’énoncé étudié. De plus, ils ne permettent pas toujours aux élèves de développer les connaissances heuristiques qui pourraient favoriser la continuité cognitive entre l’argumentation et la démonstration.

Axe 2. *Le paradigme de questionnement du monde et la question curriculaire*.

1. Introduction

Les manuels scolaires sont des ressources généralement sollicitées par les enseignants pour concevoir leurs leçons et par les élèves pour stabiliser les connaissances acquises. Ainsi, ils jouent un rôle non négligeable dans l'apprentissage au secondaire.

Au Cameroun, la géométrie est considérée comme le moyen privilégié pour initier les élèves au raisonnement déductif. Elle débute au collège, qui est organisé en deux sous-cycles. D'une part, le sous-cycle d'observation constitué des classes de sixième et de cinquième (âge des élèves, 11 à 13 ans). La géométrie qui y est recommandée correspond à la « géométrie naturelle » (Houdement & Kuzniak, 2006). D'autre part, le sous-cycle d'orientation constitué des classes de quatrième et de troisième (âge des élèves 13 à 15 ans) ; la géométrie enseignée dans ce sous-cycle correspond à la « géométrie axiomatique naturelle » (Houdement & Kuzniak, 2006). Des difficultés apparaissent généralement lors du passage d'une géométrie à l'autre.

Des travaux existent en didactique des mathématiques sur la démonstration. Pedemonte (2002) rapporte que les problèmes ouverts conduisant à la formulation et la démonstration de l'énoncé d'une conjecture sont pertinents pour favoriser la continuité entre l'argumentation et la démonstration. La démonstration en géométrie au collège s'appuie sur les figures. Colette Laborde souligne la nécessité de distinguer la figure du dessin qui la représente, ce qui pourrait réduire les difficultés liées à la confusion entre les deux (Laborde, 1994, p.532). Pour exécuter une tâche de démonstration, il faut pouvoir passer de l'appréhension perceptible de la figure à l'appréhension discursive de celle-ci (Duval, 1988).

On sait qu'au-delà de la différence de fonctionnement entre l'argumentation et la démonstration une continuité existe et se situe au niveau des systèmes de référence (Pedemonte, 2002). On ne sait pas suffisamment comment cette continuité est prise en charge dans l'initiation des élèves à la démonstration par les auteurs des manuels.

La question à laquelle nous souhaitons répondre est la suivante : *comment la démonstration est-elle introduite à travers l'étude des quadrilatères et des triangles dans les manuels au collège ?*

La contribution que nous espérons obtenir de cette étude est double : dans un premier plan, elle devrait permettre de mettre en lumière la façon dont les auteurs des manuels introduisent les énoncés de théorèmes, ce qui renforcerait les précédentes recherches sur le sujet. Dans un second plan, elle devrait permettre de faire des hypothèses sur les répercussions des phénomènes observés sur le rapport des élèves à la démonstration au collège.

Pour ce faire nous commençons par présenter notre cadre conceptuel. Ensuite nous présenterons la méthodologie et les résultats obtenus.

2. Cadre conceptuel

2.1. La démonstration et les quadrilatères et les triangles en géométrie

Le raisonnement d'après Nicolas Balacheff (1988) est une activité intellectuelle en générale non complètement explicite, de manipulation d'informations, données ou acquises pour produire de nouvelles informations. L'argumentation et la démonstration sont deux types de raisonnement que l'on rencontre au collège. Des recherches ont permis de caractériser ces deux raisonnements (Cabassut, 2005; Duval, 1992). Selon Duval (1992), la démonstration vise à établir la valeur de vérité vraie d'une proposition, elle obéit au critère de validité. Cependant, l'argumentation vise à convaincre autrui, elle obéit au critère de pertinence. Duval soutient l'existence d'une rupture cognitive entre l'argumentation et la démonstration. Il pense que « *la pratique de l'argumentation ne pourrait que maintenir ou renforcer les écrans et les méprises sur ce qu'est une démonstration, car son fonctionnement discursif va à l'encontre du fonctionnement d'un raisonnement valide en langue naturelle* » (p.42). Par ailleurs, des chercheurs italiens pensent qu'une continuité de système de référence est possible entre ces deux types de raisonnement (Mariotti, 2001; Pedemonte, 2002). L'hypothèse qu'ils défendent est la suivante durant la phase de formulation de l'énoncé d'une conjecture, des arguments sont émis, ces arguments pourront ensuite être organisés et réutilisés pendant la phase de démonstration. La conjecture et le théorème sont définis comme des triplets. Pour la conjecture, il s'agit : d'un énoncé ; d'une argumentation et d'une conception. Pour un théorème, il s'agit : d'un énoncé d'une démonstration et d'une théorie(Mariotti, 2001; Pedemonte, 2002). Toutefois, le raisonnement en géométrie porte essentiellement sur la figure. Ainsi, aux triplets précédant nous ajoutons la nation de figure géométrique. Le cadre de la géométrie est constitué d'objets, des relations entre objets, etc. La recherche rapporte que les objets géométriques sont des pures constructions de l'esprit, les quadrilatères et les triangles en font partie. Ils sont étudiés tout au long de la scolarité au collège, grâce aux relations structurales qu'elles entretiennent dans leur classe d'objets, mais aussi les relations qu'elles entretiennent avec d'autres classes d'objets. La figure se distingue du dessin qui en est une représentation concrète et imparfaite que l'on trace sur une feuille ou sur un écran d'ordinateur (Walter, 2001, p.3).

Pour que les élèves dans son activité arrivent à exécuter un raisonnement de validation, ils doivent y être initiés. Ils doivent pouvoir passer d'une appréhension perceptive de la figure à l'appréhension discursive.

2.2. La TAD comme cadre théorique

Nos analyses des manuels au sujet de l'introduction de la démonstration suivent une approche institutionnelle. Nous souhaitons décrire les choix institutionnels et leur répercussion. Le rapport institutionnel à un objet est perçu par Chevallard (1994) comme l'ensemble des interactions possibles entre l'institution I et l'objet O. Il devrait y avoir une certaine conformité entre le rapport personnel des élèves et le rapport institutionnel à l'objet O. Pour Chevallard, la démonstration est perçue comme une notion outil de l'activité mathématique, il s'agit d'un objet paramathématique. Du point de vue de la TAD, toute activité humaine consiste à l'accomplissement d'une tâche « t » d'un certain type « T » au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire. Cette technologie est à son tour justifiable par une théorie Θ. Selon Chevallard (1999), une organisation notée [T/τ/θ/Θ] est mise en œuvre dans toute activité humaine. L'organisation mathématique est dite ponctuelle lorsqu'elle est relative à une seule tâche.

Dans le cadre de la TAD, Castela (Castela, 2008) définit la notion de tâche prescrite à l'élève, comme un couple constitué de l'énoncé et du contexte institutionnel de prescription : l'énoncé est une mise en texte du problème mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue. Le contexte institutionnel précise les éléments du contexte dans lequel la tâche est prescrite. Selon Chaachoua (2010), le choix d'une technique et sa mise en œuvre par l'élève dépendront des éléments de ce contexte. Toutefois dans une perspective d'un diagnostic automatique, elle propose un modèle qui intègre dans le contexte institutionnel des éléments relatifs à une classe génétique qui correspond au niveau donné. Il s'agit de ce qu'elle nomme une tâche mathématique (Chaachoua, 2010). C'est un problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste la plus neutre possible vis-à-vis de la technique. À notre avis, la détermination de la tâche mathématique pour un problème donnée permet au chercheur d'identifier l'intention didactique de ce problème.

3. Méthodologie

Nous présentons à présent la méthodologie exploratoire que nous avons opté pour répondre à notre objectif de recherche.

3.1. Corpus et collecte des données

Les documents qui font partie de notre corpus sont des manuels scolaires utilisés dans les institutions « classe de cinquième » et « classe de quatrième ». En effet, les programmes prescrivent l'étude des quadrilatères et des triangles dans ces institutions, en plus, les compétences relatives à la preuve sont également recommandées dans ces programmes. Ces manuels sont ceux de la Collection Inter africaine de Mathématiques (CIAM) pour des raisons suivantes : la collection a été l'unique collection utilisée au Cameroun pendant plus de 15 ans, elle a été révisée en 2008 et est toujours en usage de nos jours ; cette collection a été conçue pour 20 pays en Afrique francophones et reste utilisée aujourd'hui dans la plupart de ces pays ; cette collection est la plus répandue sur le territoire national ; ce manuel est approuvé par le ministère en charge de l'enseignement secondaire au Cameroun et est accessible à toutes les couches de la population.

Les manuels sont organisés en deux parties : une partie « activité numérique » et une partie « activité géométrique ». Les chapitres des manuels sont organisés en trois rubriques : une rubrique consacrée aux leçons du chapitre. Dans cette rubrique, on retrouve des sections, une section pouvant être une leçon, où un ensemble de leçons. Une leçon dans le manuel est constituée de blocs, il peut s'agir : d'un bloc « activité de découverte » où l'on retrouve des problèmes, d'un bloc « institutionnalisation » où l'on retrouve les énoncés institutionnalisés ; d'un bloc « application » où l'on retrouve quelques exercices d'applications. Notons que ces blocs peuvent être associés dans une même leçon.

La deuxième rubrique est essentiellement constituée d'un exercice résolu, dont la technique de résolution est détaillée. La troisième rubrique qui se situe en fin de chapitre propose des exercices d'entrainement.

Notre instrument de collecte de données correspond à une grille d'analyse des contenus des manuels. La preuve est introduite dans les manuels en même temps que les contenus d'enseignement, dans le cas d'espèce, les quadrilatères et les triangles. L'enseignement de la géométrie naturelle en classe de cinquième mettra un accent dans les manuels sur les aspects graphiques, tandis qu'en quatrième la géométrie axiomatique naturelle tiendra en compte la figure.

3.2. Analyse des données

Nous présentons ci-dessous les éléments de la grille d'analyse des contenus. Ils consistent en trois étapes pour des raisons du nombre de mots.

La première étape consiste à déterminer les types de problèmes dans les blocs « activités de découverte » et leur intention. Il pourrait s'agir des problèmes visant à : démontrer un énoncé ; découvrir et vérifier un énoncé ; reconstruction une définition. Elle consistera également à déterminer les organisations mathématiques ponctuelles dans ces problèmes. L'on déterminera les fonctions et les types de dessins associés aux problèmes de découverte dans les blocs « activités de découverte » : le dessin peut avoir quatre fonctions (Elia & Philippou, 2004) dans un problème en mathématiques. L'on déterminera les problèmes de la rubrique « exercices résolus », le type de problème proposé, les organisations mathématiques dans ces problèmes, les fonctions des dessins qui leur sont associés.

4. Résultats

Dans la suite nous rapportons une partie de nos résultats en raison du nombre restreint de mots, nous présentons ensemble les analyses des deux premiers éléments de la grille.

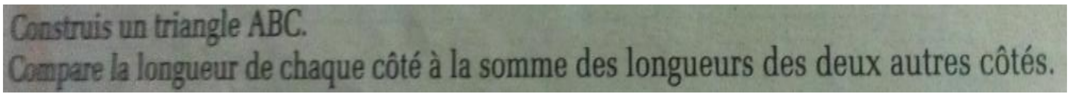
4.1. Les problèmes et les dessins dans les blocs « Activités de découverte »

Manuel de la classe de cinquième : Nous avons identifié dans le manuel 40 problèmes dans les blocs « activités de découverte ». Nous avons organisé ces problèmes en trois catégories suivant leur intension didactique : les problèmes dont la tâche mathématique consiste à « justifier » un énoncé (TJE) ; les problèmes, dont les tâches mathématiques, sont de découvrir en vérifiant l'exécution du contenu d'un énoncé (TDVE) ; les problèmes dont la tâche mathématique consiste à reconstruire une définition (TRD).

Problèmes	TDVE	TJE	TRD	Total
Nombre de problèmes	19	17	4	40
Pourcentage	47,5 %	42,5 %	10 %	100 %

Tableau 1. Répartition des types de problèmes suivants les intentions didactiques

Les problèmes dont les tâches mathématiques consistent à découvrir et vérifier la réalisation du contenu d'un énoncé sont constitués des tâches dont les techniques de résolution s'appuient sur : l'intuition par le biais de la perception visuelle ; sur l'expérience à travers l'utilisation des instruments de géométrie.

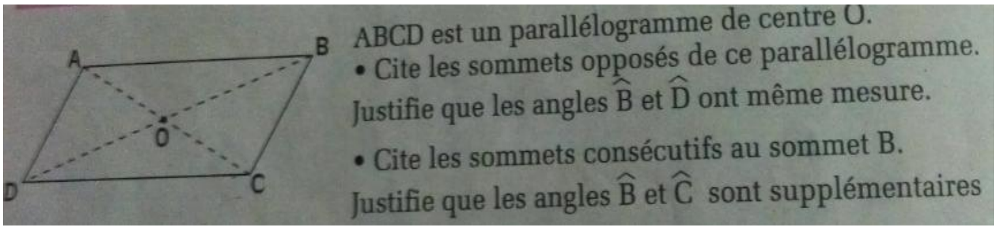


Construis un triangle ABC.
Compare la longueur de chaque côté à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Figure 1. Problème de découverte page 14

À notre avis, le fait de vérifier la réalisation du contenu d'un énoncé remplit l'une des fonctions de la preuve. Ainsi, le fait de procéder de la sorte peut être considéré comme une validation pragmatique du contenu de cet énoncé qui débouche sur une généralisation. Il s'agit d'une preuve pragmatique.

Les problèmes dont les tâches mathématiques consistent à prouver le contenu d'un énoncé orientent sur les techniques d'exécution des tâches. Ces orientations sont perceptibles à travers les tâches intermédiaires du problème. Les tâches de justifications sont parfois précédées des tâches d'observation et d'identification des configurations. Les tâches de justifications sont introduites par le verbe d'action « justifié ».



ABCD est un parallélogramme de centre O.
• Cite les sommets opposés de ce parallélogramme.
Justifie que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ ont même mesure.
• Cite les sommets consécutifs au sommet B.
Justifie que les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires

Figure 2. Problème conduisant à la justification d'un énoncé, page 90

Les problèmes de ce manuel appartiennent à la catégorie des tâches prescrites, elles ne favorisent pas l'esprit d'initiative et d'innovation. Nous pensons que les auteurs ne prennent pas en compte la continuité entre l'argumentation et la démonstration dans la conception des problèmes de découverte. Cette approche pourrait générer les difficultés chez les élèves lorsqu'ils seront amenés à résoudre des problèmes ouverts.

Les types de tâche identifiés dans les problèmes appartiennent aux genres de tâches suivantes : prouver ; construire ; calculer ; comparer ; mesurer ; conjecturer ; déterminer. Les principaux types de tâche qui appartiennent au genre de tâche « prouver » sont les suivants : justifier la nature d'une figure ; justifier une relation entre deux objets géométriques. Les technologies qui justifient les techniques nécessaires à la résolution de ces tâches sont supposées connues des élèves. Toutefois, le type de justification attendu n'est pas connu dans cette institution, n'a pas fait l'objet d'un enseignement.

Dessins	Fonction décorative	Fonction représentative	Fonction informative	Fonction organisatrice	Totale
Nombre	00	20	5	00	23

Tableau 2. Répartition des dessins et leur fonction

La plupart des dessins associés aux problèmes ont une fonction représentative, les propriétés lues sur le dessin sont sémantiquement congruentes à ceux contenus dans l'énoncé. Les dessins sont faits à l'aide des instruments représentant les propriétés qui déterminent soit un quadrilatère soit un triangle.

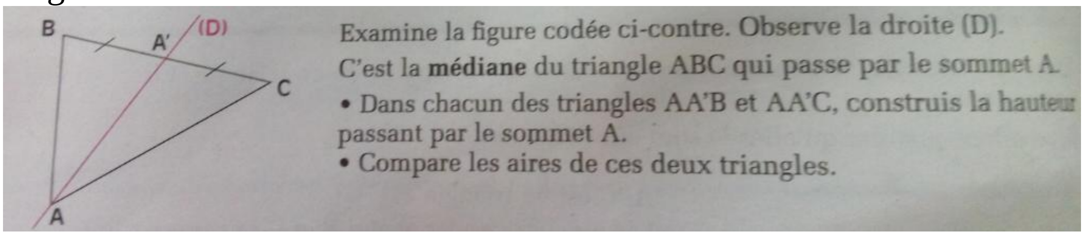
Le fait que les auteurs des manuels aient choisi d'associer les dessins à quelques problèmes uniquement pourrait provenir du fait qu'ils veulent développer les compétences liées à l'intuition et l'expérience, chez les élèves, par exemple construire et analyser une figure. De plus les dessins ayant une fonction représentative sont une aide et influencent la résolution des tâches (Elia & Philippou, 2004).

Manuel de la classe de quatrième **:** Nous avons identifié dans les manuels 14 problèmes dans les blocs « activités de découverte ». Nous avons organisé ces problèmes en trois catégories suivant leur intension didactique : les problèmes dont la tâche mathématique consiste à « Démontrer » un énoncé (TDE) ; les problèmes dont la tâche mathématique est de découvrir et vérifier les contenus d'un énoncé (TDVE) ; les problèmes dont la tâche mathématique consiste à reconstruire une définition (TRD).

Problèmes	TDVE	TDE	TRD	Total
Nombre de problèmes	5	9	00	40
Pourcentage	35,71 %	64,29 %	00 %	100 %

Tableau 3. Répartition des types de problèmes suivants les intentions didactiques

Les problèmes dont les tâches mathématiques consistent à découvrir en vérifiant la réalisation du contenu d'un énoncé sont constitués des tâches dont les techniques de résolution s'appuient sur l'intuition par le biais de la perception visuelle, l'expérience à travers l'utilisation des instruments de géométrie.

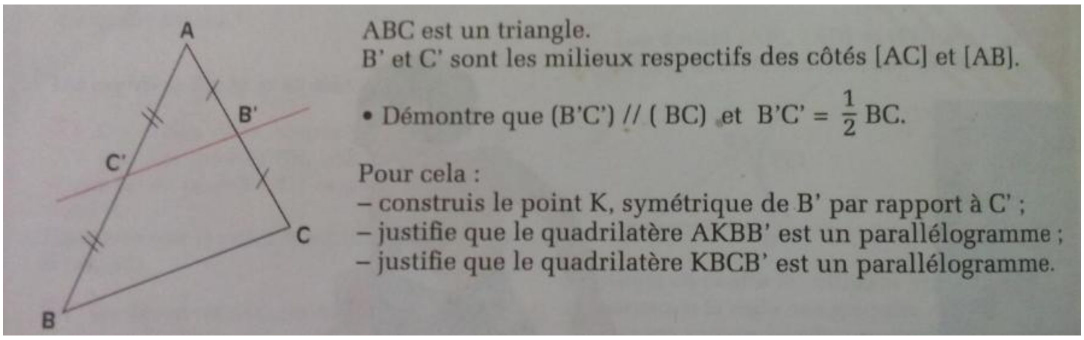


Examine la figure codée ci-contre. Observe la droite (D).
C'est la **médiane** du triangle ABC qui passe par le sommet A.
• Dans chacun des triangles AA'B et AA'C, construis la hauteur passant par le sommet A.
• Compare les aires de ces deux triangles.

Figure 3. TDVE page 50

Les problèmes de ce type conduisent à une validation pragmatique du contenu de cet énoncé. Il s'agit pour l'élève de vérifier la réalisation du contenu d'un énoncé et de généraliser.

Les problèmes dont les tâches mathématiques consistent à démontrer un énoncé sont conçus de manière à orienter les élèves sur la technique à mettre en œuvre pour résoudre la tâche. Dans ces problèmes, la tâche qui conduit à la formulation de l'énoncé de la conjecture n'est pas laissée à la charge de l'actant. Les tâches de démonstration sont introduites par le verbe d'action « démontrer ». Par ailleurs les tâches intermédiaires qui prennent en charge la démonstration sont quelquefois introduites par le verbe « justifier ». Ces tâches intermédiaires orientent sur une technique d'exécution de la tâche.



ABC est un triangle.
B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB].
• Démontre que (B'C') // (BC) et $B'C' = \frac{1}{2}BC$.
Pour cela :
– construis le point K, symétrique de B' par rapport à C' ;
– justifie que le quadrilatère AKBB' est un parallélogramme ;
– justifie que le quadrilatère KBCB' est un parallélogramme.

Figure 4. TDE page46

L'utilisation des verbes justifier et démontrer dans un même problème peut laisser supposer qu'il s'agit de deux types de raisonnement différents. Nous pensons que pour les auteurs, la distinction entre ces deux verbes réside au niveau du nombre d'étapes d'une démonstration. Dans une démonstration, une étape se justifie. Nous citons les auteurs des manuels : « *Faire une démonstration ou démontrer, c'est établir une succession d'étapes qui, en partant des données, permet d'aboutir à la conclusion, chacune de ces étapes étant justifiée par des définitions, des propriétés ou des formules* ».

Les problèmes de ce manuel sont des tâches prescrites, ils ne favorisent pas la continuité entre l'argumentation et la démonstration. De plus, ils ne favorisent pas les compétences heuristiques chez les élèves. L'on pourrait croire que les auteurs du manuel veulent aider les élèves à réussir l'exécution de la tâche de démonstration.

Les types de tâche identifiés dans les problèmes appartiennent aux genres de tâches suivantes : démontrer ; construire ; calculer ; comparer ; mesurer ; conjecturer. Les types de tâche appartenant au genre de tâche démontrer sont : démontrer la nature d'une figure ; démontrer une relation entre deux figures. Les techniques nécessaires à la résolution de ces tâches supposées connues des élèves ; car au regard du contexte institutionnel, les technologies qui justifient ces techniques ont fait l'objet d'un apprentissage dans les institutions antérieures.

Dessins	Fonction décorative	Fonction représentative	Fonction informative	Fonction organisatrice	Totale
Nombre	00	8	5	00	13

Tableau4. Répartition des dessins

Certains dessins sont incomplets, ils doivent être complétés par certaines configurations pour entrevoir une technique d'exécution des tâches. Les dessins des triangles ont une même disposition spéciale et sont tous nommés ABC.

Le fait que le nombre de dessins soit sensiblement égal au nombre de problèmes dans les blocs « activités de découverte » laisse penser que les auteurs veulent privilégier le raisonnement déductif en réduisant les tâches de construction. Le choix fait par les auteurs de privilégier les triangles ABC dans une même disposition spéciale pourrait induire des obstacles didactiques chez les élèves.

4.2. Les exercices résolus dans les manuels

Manuel de la classe de cinquième : nous avons identifié trois problèmes résolus dans les chapitres qui portent exclusivement sur les quadrilatères et les triangles. Ces problèmes sont conçus sous la forme de tâche mathématique sans dessin associé. Les types de tâches que l'on retrouve dans ces problèmes sont : justifier la mesure d'un angle ; justifier la nature d'un quadrilatère ; justifier que deux droites sont parallèles. Les technologies nécessaires à l'exécution de ces tâches mobilisent les propriétés étudiées dans les leçons du chapitre.

Les auteurs du manuel proposent une résolution en trois phases : une phase de lecture de l'énoncé, où la figure est représentée, les données et la conclusion identifiées ; une phase de « recherche de la solution » durant laquelle l'on recherche les règles de validation et enfin la troisième phase de « rédaction de la solution ». Les pas de justifications ont une structure binaire, le recyclage de proposition est implicite. Certaines technologies permettant de justifier la technique utilisée ne sont pas connues des élèves. Par exemple, la notion de centre de symétrie d'un parallélogramme utilisé pour résoudre un des problèmes ne figure pas dans le contexte institutionnel.

Manuel de la classe de quatrième : les problèmes que l'on retrouve dans cette rubrique sont des tâches mathématiques, les phases de résolutions sont les mêmes que celui du manuel précédent. Le verbe d'action pour introduire la tâche de démonstration est « démontrer ». La démonstration n'est pas rédigée de la même façon pour les deux problèmes : l'une des démonstrations est une démonstration à deux colonnes comme aux États-Unis. L'autre est un enchainement de pas de déduction sous forme des phrases ou de paragraphe.

L'analyse de cette partie nous donne de voir que les auteurs des manuels utilisent deux modèles de preuve dans les manuels. Cela pourrait provenir d'une part de l'absence de recommandation des programmes au sujet du type de preuve à adopter dans les institutions. D'autre part, de leur volonté de laisser le soin aux enseignants de choisir la formulation qui leur convient. Par ailleurs, la lecture des textes démonstration ne permet pas toujours d'appréhender l'organisation du raisonnement déductif. Le nombre élevé de pas de déduction dans les textes de démonstration pourrait provoquer des découragements chez les élèves.

5. Conclusion

L'objectif de cet article était de déterminer la façon dont la démonstration est introduite à travers les quadrilatères et les triangles dans les manuels du collège au Cameroun. Le cadre de la TAD s'est révélé pertinent pour décrire les choix institutionnels et leur répercussion. Il ressort de cette étude que les auteurs des manuels mettent en œuvre deux modes de validation dans la conception des tâches prescrites qui servent de problèmes de découverte : validation pragmatique et preuve intellectuelle. Ce procédé pourrait ne pas favorise l'unité cognitive du fait des aides qu'ils procurent. De plus, les textes de preuve bien qu'ils soient corrects pourraient ne pas favoriser la compréhension de l'organisation du raisonnement déductif.

Une perspective à ce travail consisterait à explorer la façon dont les élèves raisonnent sur les figures en situation. Cela permettra de mettre en lumière leur connaissance heuristique et procédurale (relative à l'application d'un théorème).

Références

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*. Université Paris-Diderot-Paris VII.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 28*, 135-182.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves*.(Thèse de doctorat) Université de Grenoble.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence. *Anale de Didactique et Des Sciences Cognitives*, *1*, 57–74. Retrieved from IREM de Strasbourg

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. *Petit x*, *31*, 37–61.

Elia, I., & Philippou, G. (2004). The Functions of Pictures in Problem Solving. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 11, pp. 175–193).

Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie : Permanences et révolutions. *Bulletin APMEP*, *523–548*.

Mariotti, M. A. (2001). La preuve en mathématique. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 1*(4), 437–458.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*.(Thèse de doctorat) Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive: à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, *88*, 5–24.

Walter, A. (2001). Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? *Petit x*, *54*, 31–49.

Generating the *raison d'être* of logical concepts in mathematical activity at secondary school: Focusing on necessary/sufficient conditions

Hiroaki Hamanaka

Department of Education in Mathematics and Natural Sciences,
Hyogo University of Teacher Education, Japan

Koji Otaki

Department of Teachers Training,
Hokkaido University of Education, Japan

Abstract. In this paper, we focus on the absence of the *raison d'être* for logical concepts, especially regarding necessary conditions and sufficient conditions, in mathematics at secondary schools. We investigated the fundamental role of these concepts in the mathematical organisation of mathematicians, which is related to their protomathematical and paramathematical values. Then we designed, implemented, and analysed a study and research activity with the aim to activate their functionality.

Résumé. Cet article porte sur l'absence de la raison d'être des concepts logiques, en particulier des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, dans les mathématiques secondaires au Japon. Nous étudions le rôle fondamental de ces concepts dans l'organisation mathématique de mathématicians, qui est lié à leurs valeurs protomathématiques et paramathématiques. Ensuite, nous concevons, mettons en place et analysons une activité d'étude et de recherche ayant pour but d'activer leur fonctionnalité.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introduction

Though a number of studies about the teaching and learning of proofs have been carried out, mathematical proving seems to remain difficult to learn for a majority of students over the world. In Japan, mathematical proving is taught first in lower secondary schools, traditionally in connection with geometry, and then more developed proofs and their related concepts, including contraposition, reduction ad absurdum, and mathematical induction etc., are studied in upper secondary schools. However, these concepts seem far from well understood for Japanese students; in particular, most of them do not recognise the *raison d'être* of such concepts.

The research questions of this paper are as follows: what is the economy of the lack of the *raison d'être* of logical concepts on proofs in Japanese secondary schools? How can we generate the *raison d'être* of such objects? Against this backdrop, within the framework of the *anthropological theory of the didactic* (ATD) and the methodology of the *didactic engineering within ATD*, we designed, implemented and analysed a relatively short-scale inquiry-based teaching and learning activity with some predetermined target contents, that is, a *study and research activity* (SRA).

2. Preliminary analysis: a new school epistemology of logical concepts

2.1. Disappearance of the *raison d'être* of logical concepts at school

Within the *didactic transposition theory*, Yves Chevallard distinguished three types of notions which arise in mathematics teaching and learning: *protomathematical, paramathematical,* and *mathematical* (cf. Brousseau, 1997). Using these definitions, the actual mathematical notions correspond to mathematical objects to be studied, while concepts such as mathematical proofs at school are tools for studying mathematics rather than mathematical notions themselves to be studied; these are paramathematical notions. While both types of the above notions are recognised explicitly by a person or an institution in a given situation, some notions are not. The protomathematical notion is 'mobilized implicitly in uses and practices, its properties are used to solve certain problems, but it is not recognized, as a topic of study or even as a tool' (ibid., p. 153).

Now we will consider some logical concepts taught in secondary schools. Since the concept of mathematical proof is a paramathematical notion, its teaching is associated with other mathematical knowledge to be taught and, for example, produces new properties among known mathematical notions. Then, what do logical concepts work for? Some logical concepts, such as ad absurdum, necessary or sufficient condition, etc., have the effect of coordinating the consideration of proving, which we describe in detail in a later section. Some students may be able to use these effects unconsciously, without recognising such concepts, and successfully make a mathematical inquiry. Thus, we may say these concepts have the protomathematical nature at first; that is to say, logical concepts support implicitly mathematical proving. And then, they could shift to the state of notions similar to the mathematical proof: thus, logical concepts can become paramathematical objects in mathematical activities. However, this transition is not so much linear as repetitive: a logical concept goes back and forth between a state of being a tool and a state of being an implicit model in a given activity. Such a *dual functioning for directing proving activities* is, we regard, the *raison d'être* of logical concepts, that is, the fundamental functionality of them, which usually disappears at school, as we will describe below. This implies that these logical concepts could be learned in inquiry-based situations.

The Japanese educational guideline claims 'to understand the fundamental notions concerning sets and propositions, and to make use of these notions in considerations of phenomena' (MEXT, 2001, p. 20, our translation) as a content of mathematics to be taught in the first year of upper secondary school. And in fact, in Japanese school mathematics of this grade, logical concepts related to proving, such as necessary or sufficient condition, contraposition, and reduction ad absurdum, are studied in a small unit of 'sets' in rather decontextualised and theorised situations, that is, in connection with set theory, in spite of the claim from the guideline of proper use of these notions. Thus, when students learn logical concepts, these concepts are introduced as if they are mere mathematical notions, skipping both the paramathematical stages and the protomathematical stages. As a result, many students only memorise the facts such as 'when $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}$ is the necessary condition for $\mathcal{P}$', by phrasing it as 'the tip of an arrow is necessary' with a metaphor of hunters' material 'arrows'. They are then forced to tackle fill-in-the-blank tasks with the appropriate phrases, which merely checks their memorising:

– The condition $x = 6$ is (   ) for $x^2 = 36$.

This is nothing but an extreme case of the phenomenon of *monumentalisation of knowledge* (cf. Chevallard, 2006). We think that this is the reasons for the poor role of such concepts and the absence of the *raison d'être* for them in many students' praxeological equipment. In short, *logical* concepts at school need relevant *mathematical* praxeologies wherein such concepts are available.

2.2. A reference model of necessary/sufficient condition

In the above general analysis of logical concepts at school, we argued that, at upper secondary schools, logical notions are parts of mathematical knowledge to be taught but lose their *raison d'être*, which is the twofold functioning with protomathematical value and paramathematical value in proving activities. From now, let me focus on the necessary/sufficient conditions. What exactly is their *raison d'être*? To answer this question, we refer not to the nature of the logical concepts in scholarly logical knowledge, but to the actual functions of them in the mathematician's inquiry. This means that we understand logic at school not as an independent disciplinary field but (mainly implicit) parts of mathematics, as we have already implied in the above.

In mathematicians' inquiry, the propositions or conjectures to be considered are, of course, not always biconditional. In many cases, a target condition in the inquiry, for example 'a given natural number n is a perfect number', exists, and more accessible conditions which have close relationships with the target are desired. Thus, for a target condition $\mathcal{P}$ and another condition $\mathcal{Q}$ being considered, it is necessary to describe the relationship between $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$, and especially to distinguish '$\mathcal{Q}$ is necessary for $\mathcal{P}$'and '$\mathcal{Q}$ is sufficient for $\mathcal{P}$'. It is this distinction which enables the orientation of the consideration, that is, the clarification of what should be proved. Such a role of guiding proving activities appears not only in paramathematical form but also protomathematical form. In many cases, mathematicians operate this kind of reasoning naturally and unconsciously in their mathematical inquiries. We regard this proof-guiding functioning with protomathematical value and paramathematical value, rather than the nature as mere mathematical notions, as the *raison d'être* of necessary/sufficient condition at school, and as a principal ingredient for our *reference epistemological model* of them (Bosch & Gascón, 2006).

The next step was to design an actual mathematical activity in the school institution which promotes the dissemination of the above role; in other words, we considered the possibility of the transposition of this knowledge into the school institution.

3. Design and *a priori* analysis: conditions for a quadrilateral to be a parallelogram

3.1. *A priori* analysis of the possibility of study and research activities as a generator of the *raison d'être* for logical concepts

We used the didactic organisation of *study and research path* (SRP) which starts from a *lively and generating initial question* (cf. Barquero & Bosch, 2015), for encouraging the emergence of the *raison d'être* for logical notions. We considered that SRP generally produces the *raison d'être* for such paramathematical notions similar to what happens with mathematical notions.

But on the other hand, our interest is related to the viability of the designed SRP in current educational systems. An SRP is usually designed and realised with a highly open inquiring trajectory and long-term period. These properties of SRP create a difficulty of designing an SRP focusing on a particular praxeology, and of the implementation of SRPs in ordinary secondary schools, at least in Japan, because many existing teaching methods and pedagogies postulate a closed trajectory and short-term period, following the monumentalism.

To manage these difficulties and constraints, we adopted a short-term SRP, or an SRA requiring the proper role of logical concepts, which are contents in the current Japanese curriculum. Our practice, which we describe below, consists of only two class periods of 45 minutes each. Such a practice using this content and at this scale can be readily implemented in Japanese secondary schools.

3.2. Mathematical design of initial question

In this section, we propose a mathematical activity for the upper secondary school level including inquiries, where what should be proved is ambiguous and needs to be clarified by the protomathematical nature of logical concepts including necessary and/or sufficient conditions.

Let us recall the characterisations of a parallelogram. What condition is sufficient for a quadrilateral to be a parallelogram? In Japanese lower secondary schools, they do not use the word ‘sufficient’, but take up the following five conditions in classes as ‘conditions for a parallelogram’:

– Two pairs of opposite sides are parallel. (Definition)
– Two pairs of opposite sides are equal in length.
– Two pairs of opposite angles are equal in measure.
– One pair of opposite sides are parallel and equal in length.
– The diagonals bisect each other.

Each of these five conditions consists of two conditions out of the following:

– a pair of opposite sides are parallel;
– a pair of opposite sides are equal in length;
– a pair of opposite angles are equal in measure;
– and a diagonal bisect the other.

These are, namely for quadrilateral ABCD with its diagonals crossing at M, the following eight conditions: (a) $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$, (b) $\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$, (c) $\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}$, (d) $\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{D}$, (e) $\mathrm{AM} = \mathrm{MC}$, (f) $\mathrm{BM} = \mathrm{MD}$, (g) $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$, (h) $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$. Using this we propose the following initial question.

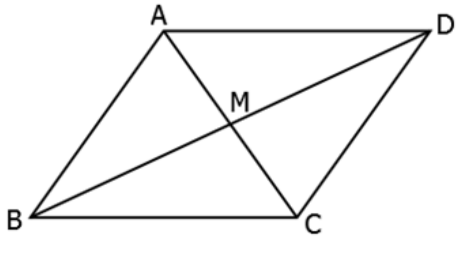


Figure 1. Parallelogram

Q_0: In addition to the five conditions learnt in lower secondary school, are there any two conditions from (a) to (h) that make quadrilateral ABCD a parallelogram?

3.3. *A priori* analysis of possible mathematical inquiries

The 40 students in our study are in the first year of a typical upper secondary school in Japan (15-16 years old) and, in general, students in this school are not very competent in mathematics. The students were just about to study logical notions in the small unit of 'sets' and did not have any previous knowledge about these notions. Most of them were not even familiar with the notion of counterexample. In our design, we nonetheless prompted them to make their own inquiry against the initial question Q_0 in the first period, and the second period was devoted to the theorisation of the notions. In addition to the main teacher who is the usual teacher of these students, the two authors joined to lead the inquiry in the first class period.

Including the five conditions learnt in lower secondary school, there are 28 combinations and 16 elements of them are sufficient condition to make a quadrilateral a parallelogram, but 12 are not. In fact, various inquiries can be possible and some of them are rather accessible, even for beginners. The following three kinds of combinations are relatively easy to judge sufficiency:

– (a) $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$ and (h) $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ are not sufficient. A counterexample exists, of an isosceles trapezoid. The case of (b) and (g) is also the same.

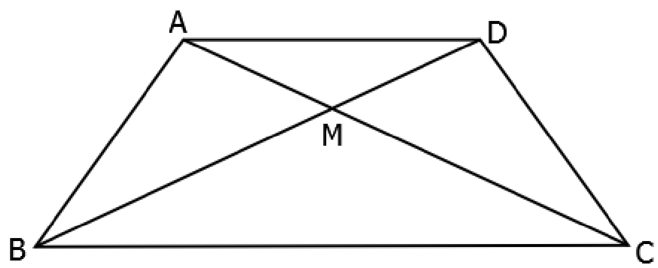


Figure 2. Isosceles trapezoid as a counterexample.

– (c) $\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}$ and (g) $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$ are sufficient. Also the same for (c) and (h) etc. It can be easily proved by using the property of consecutive interior angles of parallel lines.

– With some insight, one can find a kite, which is a counterexample to the sufficiency of (c) $\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{C}$ and (e) $\mathrm{AM} = \mathrm{MC}$. The case of (d) and (f) is also the same.

All other cases are comparatively challenging. For instance, the counterexample for the combination of (a) and (c) might be found through the attempt to prove its sufficiency, while the consideration of the case using (c) and (f) may lead learners to the concept of reduction ad absurdum. The detail is mentioned by Hiroaki Hamanaka (2016). Thus, this initial question has the possibility to induce various considerations involving the knowledge to be taught in existing educational systems.

3.4. Didactic design of teaching process

In the first period, the five characterising conditions of parallelograms were recalled, the initial question Q_0 was proposed, and then students were prompted to create their own inquiry in small groups, each consisting of approximately three students.

Our hypothetical trajectory of SRA starts from a type of tasks ‘to find sufficient conditions under which a quadrilateral becomes a parallelogram’ through the Q_0. The type of tasks includes twenty-eight tasks, each of which corresponds to two out of the eight conditions and belongs to a *genre of tasks* (cf. Miyakawa, 2012) or *paramathematical type of tasks* ‘to judge whether it is a sufficient condition under which an object becomes a specified object’, which we call the *reference genre of tasks* in this paper. The students might think this is a study about parallelograms, however, in this context, the inquiry about parallelograms is rather a possible condition for bringing about the praxeology at stake which involves this genre of tasks. This is the moment of the *first encounter* (cf. Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005) with the mathematical praxeology at stake. This genre of tasks would produce the technique which consists of clarification of the proposition to consider, a search for a counterexample, and proving characterisation with the geometrical knowledge.

In the inquiry, when the students considered the combination of conditions (a) and (h), for instance, if they drew a figure of a parallelogram first, this figure would lead them to the consideration of a proposition different from 'if (a) and (h) are true, then this is a parallelogram', since this figure does not portray the assumptions, but instead, the conclusion to be proved. It would indicate the form and the direction of their considerations what figure they would draw first or what they would intend in drawing figures: this would indicate that they do realise, explicitly or implicitly, both what they assume and what they intend to conclude. Of course, they may face confusion in determining which is an assumption and which is a conclusion. However, this confusion could even help them to realise the difference between considerations of a proposition and its converse. In any case, for this task, they had to set up their own assumption and conclusion. This moment is of the *exploration of the type (or genre) of tasks*.

The important technique here is to clarify what proposition 'the combined conditions is the condition for a quadrilateral to be a parallelogram' is, that is, the *propositionalisation of the discussion* which identifies the assumption and the conclusion in discussion and formulates it as a proposition. In many cases, this technique would be performed implicitly, in other words, this technique has the protomathematical nature, while the consequent proof of the obtained proposition has the paramathematical nature. If one succeeds in the propositionalisation and obtains a result, the necessity of some concepts to explicitly express how the result involves the characteristics of parallelograms, that is, the *raison d'être* of the notions of necessary/sufficient conditions, becomes apparent. After undergoing these processes, protomathematical notions would change into paramathematical notions or mathematical notions in the second class period, where the inquiries performed in the first class would be reflected upon and reconsidered, and its techniques would be theorised. This phase is the moment of the *constitution of technological-theoretical environments* and the *institutionalisation*.

In addition, students might perform a transformation from the problem whether (a) and (h) are characterisations of a parallelogram or not, into whether there exists a quadrilateral which satisfies (a) and (h) but is not a parallelogram. This transformation would be done implicitly and it has a protomathematical nature first, but it can be developed into paramathematical notions of rebutting by a counterexample, and into a mathematical notion of counterexamples. Thus, the practical aspects of this notion, which promote the eligible consideration of judging a proposition, can be actualised in this inquiry. This phase is also the moment of the exploration, and the second class period is the technological–theoretical moment about the notion of counterexamples, where the negation of a given proposition is reviewed.

Our design has no moments of technical works and evaluation, because our experiment is strongly constrained by short didactic time periods. The outline of the model is shown in Table 1.

	1st period	2nd period
Didactic moments	First encounter Exploration	Constitution of *logos* part Institutionalisation
States of logical notions	protomathematical	paramathematical

Table 1. Outline of our reference epistemological and didactic model of necessary/sufficient condition

4. *In vivo* and *a posteriori* analyses

When students created their inquiries in the first period, they started by drawing figures. At first, some of the students struggled with the question of how to draw the quadrilateral satisfying the selected conditions, which is not a task involving the mathematical praxeology at stake; that is to say, the students had not yet encountered the reference genre of tasks. However, in a short time they found themselves drawing a parallelogram and began to consider which figures should be drawn and what to consider with it, which involves the reference praxeology. We identify this moment as the first encounter with the genre of tasks at stake.

A considerable number of students realised, although implicitly, that what should be considered is not whether a parallelogram satisfies the condition, but, whether all the quadrilaterals satisfying the condition are parallelograms. This can be seen from their drawings of figures on the work sheets. Some of those students noticed that it is important to try to draw a figure which satisfies the conditions and is simultaneously as far from being a parallelogram as is possible. This is implied from the following students' conversations:

– 'Well, since we have to consider whether this becomes a parallelogram or not, we'd better not model a parallelogram when we are drawing'.

– 'I'll keep this unlike a parallelogram. What is important is to think outside the box'.

– 'The result is yes for the combination of (b) and (g). Because it seems impossible to draw a figure which is not [a parallelogram]. Right?'

Thus we can recognise that the inquiry period, wherein students have to clarify the nature of the proposition to be considered for themselves could promote the distinction between a proposition and its converse, and the production of an implicit technique of transposition from the judgement of a proposition into the search for a *counterexample*. We can say this is the beginning of the moment of exploration.

In spite of the elaboration of the above techniques, students' final answer $A^{\heartsuit}$ was not fruitful as a response to Q_0. As a result, only a minority of students could find a counterexample on their own, and few students could complete the proof of the sufficiency of selected conditions. However, since we are focusing on the awareness of the role of logical concepts, what is important is not the actual mathematical answer $A^{\heartsuit}$, but the *protomathematical* process of the inquiry.

In fact, some students asserted that '[the quadrilateral with considered conditions] does not become [a parallelogram]', by indicating the possibility of a 'counterexample' which is constructed in the students' minds, although they did not know that word. We consider this kind of conjectures or statements to be a protomathematical occurrence of the notion of counterexample. Such a protomathematical occurrence is a crucial condition for the emergence of the *raison d'être* of any kind of logical concept within mathematical organisations.

We can also see the same phenomenon regarding the notions of necessary or sufficient conditions. In the first class, some students drew parallelograms and confirmed repeatedly that it satisfied the selected conditions. Although this implies that such students misunderstood what 'the condition for a quadrilateral to be a parallelogram' is, their struggles to prove the proposition they set indicate their recognition of the process: they did select an assumption and a conclusion on their own. Hence, it is possible even for such students to compare their reflections with others and realise the notions at stake in the second class.

In many groups, students summarised their affirmative or negative results using original Japanese expressions which mean ‘become’ or ‘not become’ for each pair of conditions which involved the notions of counterexample and necessary/sufficient conditions with protomathematical states. Then, in the second period, after student presentations of their results, the teacher asked and confirmed what ‘become’ means here. The teacher then wrote down the following and asked for the difference between them:

– ‘When (c) and (g) are true, a quadrilateral is a parallelogram’.
– ‘When a quadrilateral is a parallelogram, (c) and (g) are true’.

After some discussion, a student answered, ‘they are different. One means that the satisfaction of conditions (c) and (g) makes it a parallelogram, while the other means that there is a parallelogram first and then it satisfies the conditions’. Although the teacher shook students’ understanding by using the expression ‘when’ instead of ‘if’, this student pointed out the implementation in the sentences and explicitly distinguished one from the other. Thus, students understood the difference, and this distinction would be a technique in their praxeology equipments. It was at this point that the teacher introduced the notions of ‘sufficient condition’, ‘counterexample’, and ‘necessary condition’, and students, as expected, were able to learn these concepts as paramathematical notions which confirm their technique as a technology.

In conclusion, based on this experiment, we can conclude that the role of logical notions like sufficiency, necessity, and counterexamples, in other words the praxeology involving these notions, can live in the mathematical activities in secondary schools. Moreover, in some appropriate inquiries, the *raison d’être* of these notions arises rather naturally and regardless of the results of the inquiries; what is important in the genesis of these notions is its role of the coordination of paramathematical notions, not a direct coordination of mathematical notions. We consider that this lower susceptibility makes this proposed activity viable in secondary schools.

Acknowledgement

This work is supported by KAKENHI of JSPS (No. JP15H03501 and JP17H02694).

References

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 235-268.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 249-271). Switzerland: Springer.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51-64.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IVth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 22-30). Barcelona: Fundemi IQS.

Hamanaka, H. (2016). Considering proof for discovery: teaching materials concerning geometry. (Handout document for the workshop at ICME-13, Hamburg) http://hdl.handle.net/10132/17192

MEXT (2009). *Guideline for upper secondary school course of study: mathematics*. [in Japanese] Retrieved from http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf

Miyakawa, T. (2012). Proof in geometry: a comparative analysis of French and Japanese textbooks. In Tai-Yih Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 225-232). Taipei, Taiwan: PME.

Study and Research path: Indicators of the development of the dialectics

Verónica Parra,

María Rita Otero

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

Abstract. In this work, we describe a set of didactic - mathematical indicators to determine the development of the dialectics. These indicators are not definitive and their first formulations are the result of the analysis of the data obtained when implementing a study and research path (SRP) at the last year of the Argentine secondary level. From these indicators, we conclude that the most frequent dialectics are: *individual and collective, subject and out-of-subject, research and study, praxeological analysis-synthesis/didactic synthesis-analysis and black boxes and clear boxes*.

Resumen. En este trabajo describimos un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos para determinar el desarrollo de las dialécticas. Estos indicadores no son definitivos y sus primeras formulaciones son producto del análisis de los datos obtenidos al implementar un recorrido de estudio e investigación (REI) en el último año del nivel secundario argentino. A partir de estos indicadores, concluimos que las dialécticas más frecuentes son: *individuo y del colectivo*, *tema y fuera-de-tema*, *estudio e investigación*, *análisis-síntesis praxeológica/análisis-síntesis didáctica* y *cajas negras y cajas claras*.

Résumé. Cet article décrit un ensemble d'indicateurs didactique-mathématiques pour décider le déroulement des dialectiques. Ces indicateurs ne sont pas définitifs et ses premières formulations ont été produit à partir de l'analyse de données obtenus en la mise en place d'un parcours d'étude et recherche (PER) à l'école secondaire argentin. A partir de ces indicateurs, on conclut que les dialectiques les plus fréquentes sont : *de l'individu et du collectif ; du sujet et du hors sujet ; de l'étude et de la recherche ; de l'analyse (et la synthèse) praxéologique et de l'analyse (et la synthèse) didactique* et des boîtes noires et des boîtes claires.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introduction

Dialectics are key gestures to achieve a teaching by the study and research path (SRP). According to Chevallard (2008) they allow “to pilot” a research teaching. But how do we determine that these gestures have been done during an implementation of a SRP? This work is aimed to show the point mentioned before. We address the problem of the “monuments of knowledge” with that specific objective: introduce a set of didactic-mathematical indicators of each of the dialectics. These indicators are not definitive and their first formulations are due to analysis of data obtained while designing, implementing and evaluating a SRP in the last level of secondary school from Argentina. This SRP go through hundreds of study themes of the official curricular: straight lines, limits, derivate and use of software.

Several authors have pointed out the importance of the dialectics (Barquero, Bosch & Gascón, 2011; Costa, Arlego & Otero, 2015; Hausberger, 2016), referring them as key gestures of a research teaching. In this work we will not center ourselves in describing in detail the dynamics of the process of SRC already implemented (Parra, Otero & Fanaro, 2015) but we will introduce a posterior phase of analysis: the construction and description of a group of didactic-mathematical indicators that will be used to establish the development of each of the dialectics. So, the research question of this work can be formulated by the following: How to determine from the results of the implementation of a SRC a group of didactic-mathematical indicators for each of the dialectics?

2. Methodology of Research

The implementation of SRC took place during the last year of secondary school in Argentina. (Students from 16-17 years old) from the first school day, during 36 two-hour lessons and the researcher was responsible for the group. On the first day of class the first question of SRC was asked. This decision was taken during the stage of design of SRC, so there wasn’t a previous training in the praxeology that would allow answers to the questions, so, the students would not know which mathematical notions would allow to provide answers

The researcher was also the teacher observing the participants, taking notes, registering the development of the class in audio and collecting the productions from the students. The generative questions are referred to microeconomics, specifically to the laws of the offer and demand of a market formed by the price of only one product. The students were distributed in groups. The teacher introduced initially the questions, each group of students had to give answers, communicate it to the rest of the members and defend it. The derived questions formulated by the different groups of students were considered by the study community.

The path performed was designed considering certain relative hypothesis to the microeconomics, specifically the models of offer and demand:

H_0: The market balance exists and it is possible to obtain.

H_1: The market balance is produced when the offered quantity is equal to the demanded quantity, for a certain price.

H_2: The function offers and the function demands are linear and both depend on the price of the unique product.

The questions given to the students under this hypothesis were the following:

Q_1: Let's suppose that we will make a product and that our aim is to sell and collect money. The following information corresponds to information obtained in a previous test of sales:

Price per unit (in $ARG)	Amount of demand	Amount offered
10	300	
11		174
13	270	
14		231
23		402
24	160	
25		440
26	140	

Table 1: Information obtained in a test on previous sales

What model would allow to study the behavior of the offer and demand on this market? How to determine the price and the quantity so that the demand could satisfy at the same time that the offer doesn't have excess?

Q_2: How to study the behavior of the law of offer and demand for any couple of linear functions? How to determine the point of balance in this case?

Q_3: If the parameter "ordinate" of the model is modified: How to describe the variation of the point of balance?

Q_4: If the parameter "gradient of a line" of the model is modified: How to describe the variation of the point of balance?

Q_5: How much does the point of balance change exactly in each case?

To answer these questions the group has to study microeconomics and mathematics. Frequently during the RSC, it was necessary to get out of the question to investigate and study different knowledge and then return to the question to finally elaborate an answer. The questions Q_3, Q_4 and Q_5 correspond to the study of the variations in the point of balance after modifying the parameters of the model. The parameters were modified one by one because the official curriculum of the Secondary School Argentina prescribes only study of functions of an independent variable. The curriculum does not propose the study of functions of two or more independent variables. The students answered the questions to the variations of a parameter and at the same time build different modes calculating the point of balance (analytical way or using the software GeoGebra®) in each case. They described the variations and answered questions of the type: if it increases or diminishes one of the parameters "How does it change the balance?" The answers to this question was qualitative (increase or decrease). Then, the teacher proposed the following question: "Q_5: How much does the point of balance change exactly in each case?"

Some derived questions were the following one: What is a model of market? What is the point of balance? What is "the demand and the offer"? "How does the offer and demand behave?" These questions were answered by the students through internet search, books and asking the teacher of economy of the institution. Several groups of students not only worked on the characterization of the economic model, also researched about the factors that cause an increase or decrease of the demand; factors that cause an increase or decrease of the offer, among others. And of course, the question: “How to build a model? Here, there is a way out to the scope of microeconomics, but also to the area of mathematics. In order to build this model, it is necessary to study how to build the equation of a line, that contains two points or more, how to solve a system of two linear equations with two unknown quantities and to represent that model or situation un a system of these components.

In order to answer the derived questions of the mathematics, the teacher acted in some cases as a source of information as well. For example, we reminded the students on this model because it is linear, and therefore, this one might behave as the linear functions that they had studied before. Here it was needed to “exit” in order to study linear functions and the resolution of an equation system with two unknown quantities. Once researched and studied they had to get back to the initial question and build an acceptable answer, at least for the study community (students and teachers).

The study of the questions referred to the variations that were developed during several classes, until the concept of derivative functions as a useful tool to describe reason of change between two variables. This required the study of the limits of the functions to define the derivative of a function, a new exit or way out of the theme. The questions were the following: Which is the “intuitive idea” of limit? Does the limit of a function exist always? Can function have two different limits? Which are the properties of the limit? Which are the infinite limits? Which are the limits in the infinite? How many indeterminations can we find? How can they be “saved”?

For the analysis of the data, table 2 was created. In the first column the class number is placed (from class 1 to 36), the second column has the studied questions; the third one divided in 9 sub columns contains each dialectic. Number 1 is written to indicate that that dialectics was identified and 0 when it has not been identified. Finally, the fourth column contains the gestures indicative of the corresponding dialectic.

sso n	est ion	Dialectics (D)	mu ica

		E-I	I-C	ASP-ASD	T-FDT	P-T	CN-CC	M-M	L-E	D-R	

Table 2. Table generated by 0 and 1.

The initials of Table 2 belong to each of the dialectics: $D_{E\text{-}I}$: research and study; $D_{I\text{-}C}$: individual and collective; $D_{ASP\text{-}ASD}$: praxeological analysis-synthesis/didactic synthesis-analysis; $D_{T\text{-}FDT}$: subject and out-of-subject; $D_{P\text{-}T}$: skydiver and truffles; $D_{CN\text{-}CC}$: black boxes and clear boxes; $D_{M\text{-}M}$: media-milieus; $D_{L\text{-}E}$: reading and writing; and $D_{D\text{-}R}$: diffusion and reception.

3. Main results: Didactic-Mathematical indicators of the dialectics

$D_{E\text{-}I}$. Dialectic of research and study: we identified this dialectic when it appears at any moment during the class:

$I_{1DE\text{-}I}$: A search on the internet, books of different disciplines, consultation to teachers of different disciplines, consultation to different professionals and any other search in different medias who are not the teacher. For example, in this case the search on internet or in math books and microeconomy.

$I_{2DE\text{-}I}$: A study of answers $A_i^\diamond$, such as, the study of available answers, the works Oj that are useful in the building of the answer to the general question or its derivates. For example:

- $A_1^\diamond$: OMat on lineal function.
- $A_2^\diamond$: OMat on parallel straight lines and perpendicular straight lines.
- $A_3^\diamond$: OMat on two lineal equation systems with two unknown quantity.
- $A_4^\diamond$: OMicro on the models of offer and demand.
- O_5: OMicro on the displacement of the offer and demand curves.

$I_{3DE\text{-}I}$: The formulation of the derived questions in the different groups and search for answers. For example:

• Q_{ME1}: What is a model of offer and demand?

• Q_{ME2}: What is the function of the offer?

- Q_{ME3}: How does the function of demand behave?
- Q_{ME4}: What is the point of balance in microeconomy?
- Q_{M5}: How do we represent a group of data in a cartesian coordinate system?

D_{I-C}. Dialectic of the individual and collective: We identify this dialectic when the following actions are identified.

I_{1DI-C}: A group decision taken by the students, for example: to agree in a model (if the amounts offered and demands depends on the price or if the price depends of the amount offered and demanded)

I_{2DI-C}: A member mentions that the production made is not his but from the group and vice versa.

I_{3DI-C}: Each group pact how to expose it and defend it the answer knowing that is it a production of the group collective, not individual, assigning tasks and individual responsibilities in this spread out of information.

I_{4DI-C}: The teacher and the students decide what subject to study.

I_{5DI-C}: The teacher prepares the common settings in regards to the need to move forward in the study process.

I_{6DI-C}: The students incorporate questions during the common settings to re direct the study process according to the production of each group.

$D_{ASP-ASD}$. Dialectics of the praxeological analysis-synthesis/didactic synthesis-analysis: we identify this dialectic when we observe an action of the following type:

$I_{1DASP-ASD}$: An analysis of the different answers $R_i^{\diamond}$ that requieres to decide what to study of this work to build the answer $R^{\heartsuit}$. For example: what and how to study the system of two lineal equations with two unknown quantity? what and how to study the displacement of the functions? How to study the models of offer and demand? What and how to study the relations between variables?

$I_{2DASP-ASD}$: An analysis of the information obtained by different information systems: internet, books, micro economy books, teachers, economists, merchants, etc.

I$_{3DASP-ASD}$: An analysis of the questions asked in each study group.
I$_{4DASP-ASD}$: A synthesis of techniques, technology and theories that make up the different $R_i^{\Diamond}$.
I$_{5DASP-ASD}$: A synthesis of the information obtained by the different media prioritizing what is necessary and adequate to give answers to the different questions.
I$_{6DASP-ASD}$: A synthesis of the answers to the derived questions.

D$_{T-FDT}$. Dialectic of subject and out-of-subject: The separation between mathematics and microeconomy it is done in terms of exploring different environments that apparently don't have any direct relation with the issue considered. For example, the study of limits of the functions was produced when there were questions asked about the variations of price and amount of balance. This exploration was not obvious when considering question Q4. That is how we identified this dialectics for the following actions:
I$_{1DT-FDT}$: Students go to a different discipline of mathematics. For example, to microeconomy. The decision over the domain of validity of the parameters of the model implies to study lays of offer and demand and adjust them.
I$_{2DT-FDT}$: In mathematics, a solution to the same discipline. For example:

- The study of limits of the functions in order to enter the study of the derivate of functions as limits of the incremental quotient.
- The study of equation systems to enter the calculation of point of balance.

D$_{P-T}$. Dialectics of skydiver and truffles: This dialectic starts working when it is introduced for the first time to a new question, a derivate question, a $R^{\Diamond}$ and or any other work, that when doing a search in different media and without a strict analysis, it seems to be useful to the construction of answer $R^{\heartsuit}$. We identify the functioning of the dialectics when at some point of the class we observe:

I$_{1DP\text{-}T}$: the group of students cannot determine how to start answering the question and the productions delivered do not give a partial answer to the questions.

I$_{2DP\text{-}T}$: the search on the internet is wide and it starts to focus in what can be useful.

I$_{3DP\text{-}T}$: The search in books lead us to rule out different chapters that weren't useful for answering the questions.

D$_{CN\text{-}CC}$. Dialectics of black boxes and clear boxes: We identify this dialectic when at some point in the class there is a partial study of fragments or parts of some work. So, when a study is produced in a *grey level*. For example: actions belonging to this level of *grey* are the following:

I$_{1DCN\text{-}CC}$: To study only one way to solve a system of equations.

I$_{2DCN\text{-}CC}$: To build the equation of the line that goes through two points without doing the mechanical study of the formula.

I$_{3DCN\text{-}CC}$: To study straight lines without studying perpendiculars.

I$_{4DCN\text{-}CC}$: To study the derivatives of functions as a limit of the incremental quotient.

D$_{M\text{-}M}$: Dialectics of media-milieu: We identify this dialectic when at some point in the class:

I$_{1DM\text{-}M}$: Questions are asked in terms of "why?" and the results obtained or proposal of a media (source of information) are questioned. For example: which of the two models obtained are correct? Why both models of offer and demand are suitable?

I$_{2DM\text{-}M}$: A different answer is studied in any media (that is not the teacher).

I$_{3DM\text{-}M}$: Questions in terms of "how?", that is, questioning how to prove that the model chosen is the correct one? How do we prove that the point of balance varies? How do we prove that the point of balance and the parameters are related? Etc. This implies the need to look for new information

$D_{L\text{-}E}$. Dialectics of reading and writing: We identify this dialectic when at some point of the class the students:

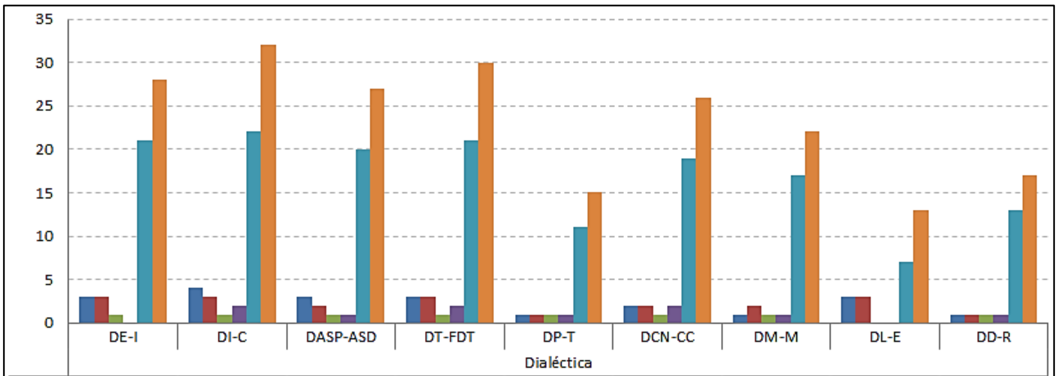
$I_{1DL\text{-}E}$: The student underlines or highlight what they consider important from the internet researches or when they copy on their folders what can be useful in this search and the use of books or asking for information from economy and math teachers.

$I_{2DL\text{-}E}$: They prepare the synthesis of their own work or from the information obtained in a media.

$D_{D\text{-}R}$. Dialectics of diffusion and reception: We identify this dialectic when at some point in the class study groups communicate and defend their answers. When they share the productions in each common setting.

4. Discussion and final reflection

Regrouping the numbers 0 y 1 – obtained according to table 2 – in regards to each question and each dialectic, we summarize this information in the following diagram.



	DE-I	DI-C	DASP-ASD	DT-FDT	DP-T	DCN-CC	DM-M	DL-E	DD-R
Q1	3	4	3	3	1	2	1	3	1
Q2	3	3	2	3	1	2	2	3	1
Q3	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Q4	0	2	1	2	1	2	1	0	1
Q5	21	22	20	21	11	19	17	7	13
Total	28	32	27	30	15	26	22	13	17

Diagram 1: --Frequency of each dialectic according to each question.

Question number 5 presents higher occurrence of indicators of all of the dialectics, specially the dialectic of research and study, subject and out-of-subject and individual and collective. This indicates a higher occurrence in the search of information and development of the investigations, more agreements from each group and higher entering and coming out of different subject (such as mathematics and microeconomy). There is a significant difference with the remaining questions, possibly because Q_5 has allowed to generate more derived questions (characteristics not determined beforehand) and a study sustained in time. More sessions of the class where destined for the construction of answers to Q_5 and its derivates questions than for the rest of the issues. This particularity can be influenced in the apparition of the dialectics, as well as the fact that Q_5 allowed to addresses aspect of the curricular that had not been studied before by the class.

The search for answers to Q_4 did not present indicators of the dialectics of research and study nor the dialectic of reading and writing, possibly because Q_4 did not generate derived questions and in consequence it was not necessary to look or research in different sources of information and so there were not any lectures with subsequent re writing and interpretations form the students. In Q_3 there were no indicators of the dialectics of reading and writing but there was of the dialectic of research and study, possibly because Q_3 generates some questions related to straight parallels, to the use of GeoGebra®, and the intersection of two straight lines: mathematics that the students knew and used. Generally, the occurrence of indicators was similar for Q_2 and Q_1 detecting an inferior number in the corresponding to Q_5 but higher to Q_3 and Q_4.

In summary the most frequent dialectics was from the individual and collective, this is due to the way of working of the group in class. The dialectic of subject and out-of-subject is another frequent one as well as praxeological analysis-synthesis/didactic synthesis-analysis and black boxes and clear boxes. The dialectic of the praxeological analysis-synthesis/didactic synthesis-analysis and the black boxes and clear boxes were used in class immediately. Both of them are strongly linked since the realization of the analysis to a synthesis requires to determine a level of grey useful to the study of the works.

The dialectics of media-milieu is at a lower level than the ones mentioned before. There is a stunning result since the dialectic of media-means dialectics is a key gesture to SRC (Bosch, Gascón, 2007, Barquero, Bosch, Gascón, 2011). Besides, if we got out of a subject to study a work probably some element should have been incorporated to the media when we returned to the subject. This result can be due to the disjoint classification of the dialectics since the indicators of one of the dialectics also could be an indicator of the other. There can be a possible interrelation between the different dialectics since for example all searches of external answers or creation to new answers are elements that constantly are incorporated in the milieu.

However, the indicators introduced here correspond to this particular implementation and have been developed under conditions and limitations of SRC. We conclude that as more generative a question is, it is possible to build more indicators of dialectics. This work expects to move forward in the construction, amplitude and generativist of the set of indicators extending them to future implementations and other researches. The work of Salgado, Otero and Parra (2017) expect to contribute in this sense.

References

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577). Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “Talleres de Prácticas Matemáticas” a los “Recorridos de Estudio e Investigación”. In A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, G. y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action* (pp. 55-91). Uzès: IUFM de l’Académie de Montpellier.

Chevallard, Y. (2008). Didactique de l’enquête codisciplinaire et des parcours d’étude et de recherche. *Colloque international « Efficacité et Équité en Éducation »*, Rennes. https://esup.espe-bretagne.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_chevallard.pdf

Costa, V. A., Arlego, M. & Otero, M. R. (2015). Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*. 8(3), 146-161.

Hausberger, T. (2016). Dimensions collaboratives et dialectique médias-milieux : un questionnement didactique autour d'une retranscription d'échanges sur un forum de mathématiques. *Enjeux et débats en didactique des mathématiques : 18éme Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (pp.613-622). Brest : La Pensée Sauvage.

Parra, V., Otero, M. R. & Fanaro, M. (2015). Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. Preguntas generatrices y derivadas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 69, 1-10.

Salgado, D.; Otero, M. R. & Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional*, 56(1), 84-108.

Japanese mathematics teacher's professional scholarship. A case of open lesson

Yukiko Asami-Johansson

Department of Electronics, Mathematics and Natural Sciences,

University of Gävle, Sweden

Abstract. We study the components of teachers' didactical knowledge that appear and develop during a post-lesson reflection of an open lesson carried out in Japan. The focus of analysis is on the dialectic between specific and more generic argumentations.

Résumé. Nous étudions les composantes des connaissances didactiques des enseignants qui apparaissent et développent lors d'une réunion de réflexion après une leçon ouverte réalisée au Japon. L'analyse est centrée sur la dialectique entre des arguments spécifiques et plus génériques.

Resumen. El estudio considera los componentes del conocimiento didáctico de los docentes que aparecen y se desarrollan durante una reflexión posterior a la impartición de una clase en una clase abierta en Japón. El análisis se centra en la dialéctica entre las argumentaciones específicas y las más genéricas.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

1. Introduction

One of the main reasons that teaching is sometimes viewed as a "semi-profession" (Etzioni, 1969) is the lack of essential knowledge that has been clearly shared in the community of teachers in order to practice their profession. Several researchers are focusing on the cultural scripts (Stigler & Hiebert, 1999) of the community of Japanese mathematics teachers to explore the components of the essential knowledge required to become a "good" mathematics teacher. Some studies focus on Japanese teachers' widely shared theory about teaching practice (Jacobs & Morita, 2002) to pursue "effective teaching" and describes the characteristic of their practice (Corey, et al., 2010). Miyakawa and Winsløw (2013) apply the concept of *paradidactic infrastructure* to explain the conditions which support the development of Japanese mathematics teachers' didactic practice. In a case study, they conclude that the Japanese open lessons help to create and share the theoretical knowledge about teachers' teaching practice. Based on Miyakawa and Winsløw's research as a starting point, this paper aims to investigate the components of professional scholarship of teaching practice, shared by the Japanese mathematics teachers during an open lesson and following post-lesson reflection.

2. Design of the analysis

The concept of didactic organisation (DO) has been developed to describe both a concrete practice constructed by a teacher to solve the tasks of teaching a given mathematical organisation (MO) and the knowledge which supports and justifies that practice. Just as a mathematical organisation, a didactical organisation consists of praxeologies, which in turn consist of two units: a practical (a pair of types of tasks and techniques) and a theoretical (a pair of technology and theory) block. The scale of levels of didactic co-determination (Bosch & Gascón, 2014) explains how the praxeologies are formed by the condition and constraints from different levels (*civilisation*, *society*, *school*, *pedagogy*, *discipline*, *domain*, *sector*, *theme*, *and subject*) influenced each other.

The *paradidactic infrastructure* (Miyakawa & Winsløw, 2013) is the totality of conditions for the teachers' work outside the classroom, related to a given set of MO and DO. Conditions, such as open lessons, support teachers' to develop knowledge about both MO and DO, and their codetermination (ibid.).

Participants to an open lesson have usually read the lesson plan written by the teacher of the lesson beforehand. The lesson plan describes the flow of the whole lesson, the students' previously learned knowledge, the mathematical and didactic tasks of the lesson, and the teacher's ideas for solving the teaching task. Thus, during an open lesson, the participants observe mainly how the teacher applies his/her didactical techniques to realise the mathematical praxeology described in the lesson plan, and in particular how students work as a result. The main task of the post lesson reflection (*hanseikai*) is "to develop and explore the theoretical block of the didactic practice observed in the lesson" (ibid., p. 202).

Within the reflection session, there is dialectic between *specific* and more *generic* argumentations. Some participants remark on the realised DO of the lesson focusing on precise didactic techniques/technologies to support the students to understand a specific mathematical technology. Others have a broader focus and *validate* the realised DO of the observed lesson (and sometimes even more general DOs within school mathematics) based on certain *didactic theories*. The didactic theory is often taken for granted by the community of the teachers and also includes "a certain conception of mathematics, the rational of teaching it and the mission of schools in society" (Bosch & Gascón, 2014, p. 79). The connection between such generic DO theory and the DO's technology in principle becomes implicit, since the DO technology is the element that directs the techniques, which is most visibly co-determined with the elements of the MO. Miyakawa and Winsløw (2013) state that the post-lesson reflection session provides an *ecology* – "a space for developing teacher knowledge that is neither narrowly limited to teaching a particular lesson nor drifting into discussions of teaching philosophies which are more or less detached from the reality of schools and teaching" (p. 204).

The research questions of this study are:

1. What components of didactic knowledge appear or develop during the post-lesson reflection in an open lesson in Japan?

2. How do the discussions during the post-lesson reflections relate to components of the different levels of didactic co-determination?

In order to answer these questions, I first outline core episodes from the open lesson together with the analysis of the planned and realised DO. Then, the various comments of the practicing teacher and the participants are studied from the viewpoint of the scale of levels of didactic co-determination.

3. The context of the open lesson

The observed open lesson took place in June 2011 at a 7th grade class at a lower secondary school attached to a university in northern Japan. The school annually holds a one-day "study meeting" (*kenkyu-kai*), and invites hundreds of teachers from inside/outside of the region. Every second year, the school raises a "study theme" which is common for all disciplines. This year, the theme is "raising students' ability of expressing themselves". The teachers plan and work with the lessons with these themes as focus. The annual *kenkyu-kai* is the occasion where the teachers present the achievement of their daily efforts. The teachers in every discipline describe their works/studies/achievements during the period and their texts are edited and presented in a booklet, which is distributed to all participants during the *kenkyu-kai*. Further, the teachers have an opportunity to improve their work by receiving reflections and advices from the participants from other schools as well as researchers who are invited as "advisers" from universities. The number of attendants to the open lesson was about 65.

Today's topic is "determination of the surface area of a cone". In the previous lesson, the students have learned determining the area of a circular sector by using the central angle a: $\left[A = \pi r^2 \frac{a}{360}\right]$. The practicing teacher of the open lesson, Yamamoto (pseudonym) has written a lesson plan over for today and it has distributed to the participants beforehand. Directly after the 50 minutes of lesson, *hanseikai* was held in the same classroom with the attendants who observed the conducted lesson. The lesson and *hanseikai* were video recorded and transcribed.

4. The lesson and its didactic organisation

Yamamoto shows the class a picture of two cones (Figure 1) and poses the following initial task (t_1): *Which of the cones has the largest surface area?* (**DO** technique $\boldsymbol{\tau_1}$: propose a problem to the students in order to introduce some new piece of knowledge)

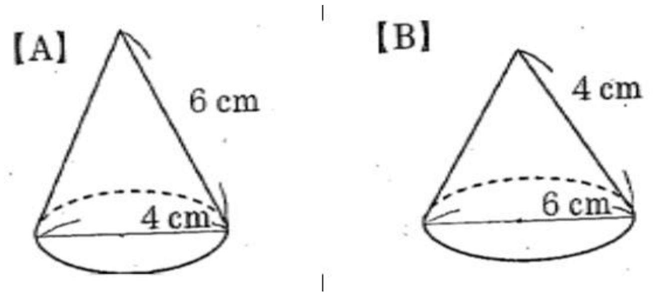


Figure 1. The picture for the task

The types of the task (**T**) of the MO is: 1. To notice the unfolded view of a cone is a circular sector, 2. To find out the proportionality between the length of the arc of the circular sector and the whole circle, 3. To find out the formula for area determination using the generatrix (g) and the diameter (d) $\left[A = \pi \times g \times d \times \frac{1}{2}\right]$. Yamamoto lets the student vote which of the cones has the largest surface area (**DO** $\boldsymbol{\tau_2}$: propose a guess to engage the students in the initial task). 5 students guess A is the largest, 14 students vote for B, the others (ca 20) vote for "equally large". The students now consider finding out the solving methods. Yamamoto observes students' work, while circulating in the classroom. This action of the teacher is called "*Kikan-shido*" (routine **DO** technology $\boldsymbol{\theta}$), it means teacher's "scanning" of students' individual problem solving process. During this moment, Yamamoto poses a question to the class "*what is the problem*?" and asks if they know the pattern of a cone. When it became clear that the majority of the class cannot imagine it, Yamamoto picks up a model of a cone. He put the model horizontally on the projector plate and rotates it (Figure 2). The students see on the projector the trace of the rotation of the cone makes a *circle* (**DO τ_3** to give an association to *image* the pattern).

Figure 2. Showing a rotation of a model of cone with projector

Figure 3. Cutting a model.   Figure 4. The patterns of cones

Since several students want to open the model and see the actual unfolded view, Yamamoto takes up paper models of the cones and lets a student cut and open it (Figure 3). He put the patterns on the blackboard (Figure 4). The students notice that they are circular sectors (**DO τ_4** to let the students realise what information they must know to solve the task).

Now Yamamoto lets the students to determinate the area of the circular sector A. While he does second *kikanshido*, he catches a student's murmur "*But we do not have the central angle of the sector*…" Yamamoto remarks quite loudly (so that all students can hear) "*The central angle? Do you need to have the central angle to* *determine the area?*" and asks the class how many of them have the same problem. The majority of them do. He comments: "*Ok, you have a trouble not having the central angle. What can we do without the angle?*" Some students comment that the central angle looks like 120º. But Yamamoto asks "looks like?" to let them notice that it is not enough to judge by the appearance. (**DO τ_5** to let the students realise that it does not work with the known MO technique and promote to find out a new technique). Yamamoto let a student M to write his solution: $6\times6\times\pi\times1/3 = 12\pi$. Then he asks the class "*Is there anyone who has a problem?*" Several students raise the hands and one utters: "*How and where the 1/3 comes from?*" Yamamoto confirms the other students have the same question (**DO τ_6** to illuminate the *core task* of the MO) and asks if there is any other who uses the 1/3. 8 students do. Student N explains: "*The length of the arc of A is equally long as the perimeter of the bottom (circle). If we compare them, we can find out the central angle of A*" Yamamoto then asks the class how the bottom of the cone looks like. It's a circle. Yamamoto then put a circle made by a paper on the blackboard (Figure 5).

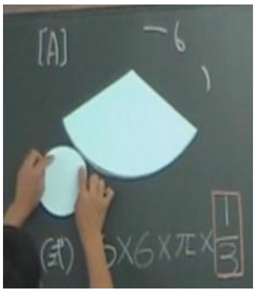


Figure 5. The bottom circle

He repeats what student N said and writes the length of the perimeter of the bottom circle and the length of the arc are "equally long". He asks again the class if they now understand where the 1/3 comes from. They still do not. Student O describes: "If we consider the sector as a big circle, then we can compare to the area of the big circle and the area of the sector". Further, student P explains that the proportion between the length of the perimeter of the big circle (12π) and the length of the ark (4π) is $4\pi/12\pi = 1/3$ (**DO τ_7** to give the class several different version of explanations on a certain MO technique/technology by the classmates). Yamamoto writes few key-words on the blackboard: “The whole perimeter of the big circle”, “The length of the arc” and checks if the class have grasped student O’s explanation.

After they have found that the both cones surface area are equally large, and it is possible to determinate the area without the central angel, Yamamoto gives the class a control task: to find the surface area of two cones with the combination of generatrix and diameter 6-8 and 8-6. The students work by pairs and one tries 6-8 combination and the other checks 8-6 (**DO τ_8** to establish a new technique by explaining it to the mates). Finally Yamamoto presents student P’s idea to establish a formula for the determination of surface area of a cone: diameter × generatrix × π × ½. He let P explain how she found out the pattern while she tried to calculate the different combinations of the generatrix and diameter. Yamamoto let the class to look at the textbook where this formula is described (**DO θ** to institutionalise the knowledge) and asks the students what they would associate from this formula. They answer “*the formula for area of triangle*” (**DO τ_9** to promote the students explore the MO technology). Yamamoto notes that they will work with this concept at the next lesson and closes the class.

5. The reflection session (*Hansei-kai*)

5.1. The teacher’s remarks

Yamamoto and the chairman, the secretary and a university professor are sitting in front of us. *Hansei-kai* starts with Yamamoto’s comments on teachers’ work with the theme of the mathematics department this year: *To raise students’ abilities of expressing their thoughts autonomously and to judge properly*:

> Since I think it is necessary to raise our students’ ability of mathematical thinking and relate it to the lessons with problem solving, we set this goal. I think the relation between learning mathematics and having mathematical activity are very important.

Posing an educational "theme" as a goal of the mathematics department to be realised within the daily works is influenced from the *school* level. The didactic theory which supports this goal is a generic educational conception of the duty of schools. However, Yamamoto's remarks above show that this goal is to be related to specific sets of DOs and MOs, by connecting it to problem solving. The problem solving approach (Stigler & Hiebert, 1999) is considered one of the most crucial didactic theories in Japan. In that way, he makes an informative connection between the generic theory and his teaching practice.

5.2. Reflections regarding a generic DO argumentation

Participant 1 remarks on the goal of today's lesson: "students will be able to *explain* how to determine the surface area of a cone". He asks:

> Was the goal realized? How often did the pupils explained during the lesson? *To whom* did they explain?

Participant 2 criticises Yamamoto's technique to realise to *raise students' abilities of "to express themselves"*:

> I think the crucial attitude our students need to achieve is, knowing the attractiveness of mathematics and learning the logic, thinking, communication and so on. You lead the students all the time today. Wasn't it better giving them more space finding out and talk without YOU telling everything? Tell me what kind of activity was done to train their communication skills. The girl, who found the formula in the end, was fantastic. Shouldn't you aim that your students find out things like she did, and let them reason using language and several expressions rather than to let them follow precisely what you planned?

Both participants talk about ideological and pedagogical issues such as "*Goal*", "*To whom they explain*?", "*Attractiveness of mathematics*". These questions are formed from the generic levels like *school* and *pedagogy*, supported by implicit sociological or physiological assumptions. Is there any valid connection between such theories and the technology in their argumentation? Participant 2 actually gives a suggestion of a certain DO technology (*"let them* *reason using language and several expressions rather than following the teacher*”). Of course, in practice, it might be a hard job to establish an effective DO technique addressed by this technology, however, in this discussion, they are in principle connected.

Now it’s Yamamoto’s turn to reply. For the planning of today’s lesson, he has made a small scale research on his students’ knowledge regarding solid bodies and its patterns. The students could imagine the pattern of a cube and cylinder but only 42 % could answer correctly regarding a cone:

> I wanted to make them realise that they can apply their knowledge about a circular sector to a solid body. By cutting a model, they realise the possibility using the concept of the plane figure they already know. Then they see the charm/convenience of mathematics.

Here, Yamamoto justifies the legitimacy of his DO against participant 2’s argument. First he describes his paradidactic organisation – the pre-research for the construction of his lessons. Thereafter he explains the DO technology (*make them realise that they can apply their previous knowledge*), which fulfil even the generic statement: “*Then they see the charm/convenience of mathematics*”. Thus, even in this argumentation, a generic didactic theory and the technology related to the observed didactic praxis are connected.

5.3. Reflections regarding a specific DO

Participant 3 has observed specific DO techniques. He firstly mentioned Yamamoto’s technique of “questioning” to diffuse the expression of the area of a cone $6 \times 6 \times \pi \times 1/3$ to the class:

> I wanted to point out that the teacher did not limit the dialogues between one student and him. We usually say; “discuss with each other”, “discuss with the whole class”. However, I think it is impossible to carry it out if the discussion is a “free talk”. The teacher must become a generator and connect different persons’ remarks. If one manages this technique, one can carry out the structured problem solving.

Here, he talks about the professional knowledge (DO technique) for managing a whole-class discussion. The whole-class discussion is the essential moment of the structured problem solving, which is, as it is described in the previous section, a shared didactic theory for the Japanese teachers. Thereafter he asks Yamamoto regarding making the students find out the idea of proportionality:

> My impression is this idea (1/3) is based on the concept: The area of a circular sector is proportional to the length of the perimeter. Without having this image, it would never happen that the students find out the 1/3. How did you do to make them find out that idea?

Yamamoto answers the question:

> Actually, when I did a pre-lesson at another class, it took 40 minutes to find out the 1/3. Then yesterday, in today's class, I asked the students "if you know the radius and perimeter of the arc of the sector, can you find out how big the middle angle is?" Then, they started to talk about the proportionality between the perimeter of the whole circle and the sector's. So I think they remember what we have done yesterday, and applied the idea.

Their dialogue is concerning very specific DO technique (to make the student get the idea for solutions autonomously) and technology (applying students' previous knowledge), related to the specific MO technology (proportional relation of the perimeters of the circle and circular sector). This argumentation is affected from the levels such as *theme* and *subject*. These argumentations, concerning the lower levels, show the participants very detailed paradidactic practices, which cannot be explained by the open lesson itself.

5.4. Reflections regarding the generic theory and specific technique

Participant 5 remarks on Yamamoto's technique of disposition of the blackboard:

> Every time I see Mr. Yamamoto's lessons, I admire his way to organise the blackboard. Today for example, you used different colors for different stuff: orange for the proportionality, blue for the perimeter of the circle, green for the arc and yellow for the answer. The theme of the year is students' ability of expressing themselves, however blackboard technique has not been described in the booklet. I think if the teacher does not

organise the blackboard properly, the students cannot learn about the expression properly. Can you tell me how one develops students' ability of expression by using the blackboard effectively?

Yamamoto replies how he usually plans the blackboard organisation.

The whole record of the blackboard will remain in the students' notebook. During the last lesson, I was conscious that what I would write on the blackboard would remain on their notebook. They could see it and get some hints from the note. So I plan the disposition of the blackboard carefully; which topic will be written in which place, writing a student's word directly, and so on.

Here, participant 5's question about the specific DO technique/technology perfectly links to a generic DO theory. The issue of blackboard organisation is connected to the issue of students expressing themselves. Yamamoto's response addresses that how blackboard organisation techniques, such as the clear presentation of the problem (and later, solutions from students) by the teacher are important to students' opportunities to develop their mathematical reasoning and communication. .

6. Discussion and conclusion

From the viewpoint of the scale of levels of didactic co-determination, the components of didactic knowledge that appeared during the post-lesson reflection are related to school, pedagogy, theme and subject. The absence of comments related to *discipline*, *domain* and *sector*, indicates that Japanese mathematics teachers have limited influence on these higher levels which are fixed by the national curriculum (*thematic autism*, see Barbé, et al, 2005). Thus, the discussion concerning MO remains focused on the teacher's specific didactic technique, as we saw in the participant 3's remarks.

Given that the context is an open lesson in a regional study-meeting, where the participants are from different schools, it is expected that some comments relate to upper levels, since generic didactic theory is often in focus at such large scale events. As *hanseikai* gives some examples of, Japanese teachers connect these generic theories explicitly to their teaching practice. Depending on the educational goal considered (here, raising students' ability to express themselves), they design their didactic practice to realise it, and the reflection session is a main moment for evaluating the extent to which it succeeded, and for sharing alternative strategies.

The dialectic between generic and specific comments, described in this, is an important asset of Japanese open lessons, as it enables teacher knowledge to be developed and shared beyond the single lesson, or even a particular theme or domain. For researchers, the dialogue between the teacher and the participants provides detailed knowledge of teachers' didactical theory blocks and how they govern, for them, the co-determination of MO and DO. Studying a post-lesson reflection session exposes many aspects of Japanese teachers' paradidactic practice, including the reasons underlying the planning of a lesson, which we cannot see during the lesson itself. The reflection session serves to enhance and share the theoretical block of the teacher knowledge. This and similar elements of Japanese paradidactic practice contribute to develop shared, essential knowledge about teaching, through genuine, professional scholarship.

References

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions at Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*. Switzerland: Springer International Publishing.

Corey, D. L., Peterson, B. E., Lewis, B. M., & Bukarau, J. (2010). Are there any places that students use their heads? Principles of high-quality Japanese mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(5), 438-478.

Etzioni, A. (1969). The Semi-professions and their Organization: *Teachers, Nurses and Social Workers*. New York: Free Press.

Jacobs, J. K., & Morita, E. (2002). Japanese and American teachers' evaluation of videotaped mathematics lessons. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 154-175.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: the paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education 16*(3), 185-209.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

About the "Mixture" of Discourses in the Use of Mathematics in Signal Theory

Reinhard Hochmuth & Jana Peters

Institute for Didactics of Mathematics and Physics, Leibniz Universität Hannover, Germany

Abstract. An important issue for research in university mathematics education is the use of mathematics in engineering. Here we focus on praxeologies in a course on system and signal theory (SST), which represents a typical module in electrical engineering studies in the third or fourth semester. In such courses, mathematics already studied in introductory mathematics courses will be applied, but also enriched by the introduction and development of new practices, in particular the so-called Dirac-impulse. We claim that the introduction and justification of the Dirac-impulse in SST is a convenient case where basic facets of epistemological relations between mathematics and engineering sciences might be illustrated and shown to be important for a detailed description and analysis of logos blocks of praxeologies. The background for our considerations regarding logos blocks of praxeologies that concern the introduction of the Dirac-impulse is given by philosophical studies by Wahsner and Borzeszkowski (1992, 2012) and a few illuminating remarks by Dirac.

Abstrait. Une question importante pour la recherche en éducation mathématique universitaire est l'utilisation des mathématiques en ingénierie. Ici, nous nous concentrons sur les praxéologies dans un cours sur la théorie du système et du signal (SST), qui représente un module typique dans les études d'ingénierie électrique au troisième ou quatrième semestre. Dans ces cours, non seulement applique-t-on les mathématiques déjà enseignées et apprises dans les cours d'introduction à la mathématique, mais on introduit et utilise aussi de nouveaux concepts mathématiques, en particulier ce que l'on appelle l'impulsion de Dirac. Nous affirmons que l'introduction et la justification de l'impulsion de Dirac dans SST est un cas pratique par lequel les facettes fondamentales des relations épistémologiques entre mathématiques et ingénierie pourraient être illustrées et démontrées importantes pour la description détaillée et l'analyse des logos blocs de praxéologies. Le contexte de nos considérations au sujet des logos blocs de praxéologies concernant l'introduction de l'impulsion de Dirac est donné par des études philosophiques de Wahsner et Borzeszkowski (1992, 2012) et quelques remarques éclairantes de Dirac.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique* Editorial, año

1. Introduction

The use of mathematics in engineering and sciences is an important topic for research in university mathematics education. This is partly because of high dropout rates and the search for measures optimizing teaching and learning of mathematics in other study fields. Here we focus on praxeologies in a course on system and signal theory (SST) representing a typical module in electrical engineering studies in the third or fourth semester.

In recent years several papers have analyzed mathematical practices in engineering. Generally there are two interrelated foci: The first one is on aspects of modelling and application problems, where typically an engineering problem is prepared such that mathematics from introductory higher mathematics courses has to be applied to solve the task. In most cases it is obvious that the modelling cycle used for school mathematics, which separates the world in a mathematical world and the rest of the world (see for example Blum & Leiss (2005)), is not appropriate for describing and analyzing such activities since the engineering problem is a priori formulated in mathematical terms. Therefore it has been suggested to use ATD for describing and analyzing the intertwined mathematical and engineering practices (see for example Hochmuth, Biehler and Schreiber (2014)). Moreover, Castela and Romo (2011) have introduced extended praxeological models, an idea which was adapted by Peters, Hochmuth & Schreiber (2017) to analyze tasks in a signal and system theory course. The institutional separation between mathematics and engineering in courses and curricula were also the starting point for investigations in (Barquero, Serrano, L. & Serrano V., 2013), where so called “study and research courses” are proposed for overcoming the dominant epistemology of “applicationism”. Our research connects in particular the observations by Barquero, Bosch & Gascón (2011) regarding the “distinction between mathematics and the rest of natural sciences” and contributes to another application of the scale of level of codeterminations (Bosch & Gascón, 2006) studying conditions that frame the use of mathematics in other sciences.

The second focus is on the use of symbols: symbols are often both representations of mathematical variables and representations of physical or engineering quantities. It is often not clear to novices how they have to interpret symbols in view of a task and which argumentations are required or forbidden, see for example (Tuminaro & Redish, 2007; Hochmuth & Schreiber, 2015 ; Alpers, 2017; Peters, Hochmuth & Schreiber, 2017).

Here we adopt a slightly different position: We relate the intertwining of mathematical and engineering ideas to its historical genesis process and the dissolving of certain fundamental epistemological problems. Often it does not seem to be important for an understanding of actual teaching and learning contexts to enlighten such issues in detail. In our praxeological analyses of the use of mathematics in SST we came across those issues, as we tried to substantiate technological and theoretical issues: In the analysis of text-books besides clear arguments that are based on techniques and technologies developed in higher mathematics or electrical engineering, we observed vague argumentations bobbing up at certain steps. We had the impression, that the vague steps arise at points that are significant both for an understanding what it means that an engineering practice is pragmatic and for a better understanding of switching between mathematics and engineering.

Therefore we began to think about incorporating basic observations from (Wahsner & Borzeszkowski, 1992; Borzeszkowski & Wahsner, 2012) that take into account the relation between mathematics and physics. They raise several epistemological issues which have to be resolved in any mathematically based theory intending to describe and calculate "nature". These epistemological issues are also relevant for engineering sciences, since they can be interpreted in relation to those issues as concretizations in view of subject related aims embedded within culture-historical as well as socio-economical processes.

After clarifying the mathematical context and focus of our paper as well as the theoretical framework in sections 2 and 3, we exemplarily investigate passages from a SST text-book introducing the Dirac-impulse. A sketchy praxeological analysis allows linking vague passages to fundamental epistemological issues concerning the relation between mathematics and physics, respectively engineering sciences. We support our observations by a few illuminating remarks by Dirac.

2. Context and focus

We analyze the introduction of the Dirac-impulse in (Fettweis, 1996) with a focus on specific steps in the justification of some of its characterizing properties:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ for } t = 0 \\ 0 \text{ for } t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t - t_0) = \varphi(t_0).$$

These properties are typically also introduced and used in quantum mechanics and go back to Dirac (1927), who was already aware of the problem that δ could not be a "normal" function and has to be interpreted in a specific way:

> Strictly, of course, $\delta(x)$ is not a proper function of x, but can be regarded only as a limit of a certain sequence of functions. All the same one can use $\delta(x)$ as though it were a proper function for practically all the purposes of quantum mechanics without getting incorrect results. (p. 625)

The mathematical knowledge of that time did not provide a consistent and well-defined framework for the Dirac-impulse, which was, by good reasons, not a real problem for Dirac, Heisenberg and Pauli in contrast to, e.g., von Neumann (Peters, 2004). Nowadays there are several possibilities to introduce the Dirac-impulse respecting the actual socio-mathematical norms in mathematics as a science. We remind of the following three possibilities:

a) In Functional analysis (see for example Schwartz (1947)) δ is considered as a distribution, that is a linear and continuous functional on so called test function spaces like $C_0^\infty(\mathbb{R})$ or $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
b) In Non-standard analysis (see for example Landers & Rogge (2013)) δ can be seen as a "normal" function from the hyperreal numbers $^*\mathbb{R}$ to $^*\mathbb{R}$. In the 19th and beginning 20th century there were some discussions (Purkert, 1990) about the usefulness of the $\varepsilon-\delta$-calculus for engineering students and it was proposed, for example by Weisbach (1860), to teach instead Leibniz's infinitesimal calculus, which can be seen as a predecessor of non-standard analysis. Nowadays, non-standard analysis is typically not taught in mathematic courses for engineers in Germany.
c) Another possibility, which is partly adopted in (Fettweis, 1996), considers distributions as limits of sequences of functions, which

converge in a specific way (Antosik, Mikusiński, & Sikorski, 1973). This approach can be elaborated on a level that is the most part compatible with higher mathematics taught in courses for engineers. Within this framework, integrals with respect to δ were introduced and interpreted in a symbolic way, as notions representing the result of limit processes.

Obviously the presentation in Fettweis is mathematically not complete and it could be argued whether and how it could be supplemented. In the following we do not want to discuss whether the introduction of more complete and formal mathematics would be useful from an engineering point of view. Instead we intend to demonstrate that certain appearing gaps can be linked to fundamental epistemological issues concerning the relation between mathematics and physics. This suggests that the gaps and their character are in the first instance not the deficit result of too little mathematics but the expression of a specific historic and institutional resolution of certain epistemological issues.

3. Theoretical framework

We combine a praxeological analysis with conclusions from historic-philosophical considerations based on a dialectic and materialistic point of view concerning the relation between mathematics and physics by Wahsner and Borzeszkowski (1992, 2012). We believe that those conclusions refer also to inherent characteristics of the relation between mathematics and engineering sciences. According to the status of our work in progress we use the praxeological approach for reconstructing the engineering content and inject philosophical considerations in the analyses of the logos-block focusing on the relation between "mathematics" (distribution theory) and "physical reality" (signals).

3.1. Anthropological theory of the didactic

In our analysis we address two concepts of ATD: First we outline a praxeological analysis of a SST-practice, where we focus the most elementary model of praxis/logos blocks. This praxeological model consists of the praxis block P containing tasks and techniques used to solve them and the logos block L containing the technological and theoretical discourse describing justifications, explanations and production of the elements of the praxis-block. This P/L-model could be refined into the so called 4T-model where the praxis block is differentiated into tasks T and techniques τ and the logos block is differentiated into technology θ and theory Θ, where theory forms a discourse on technology that is more elaborated and abstract (Chevallard, Bosch, & Kim, 2015). We forgo formulating tasks and techniques as well as technology and theory in detail because of limited space and since these details seem not necessary for representing the main point of this paper. Elements of the praxis block P, will be denoted by p_i, and elements of the logos block L, by l_i.

Second, for a more detailed understanding of technological-theoretical facets, that form the logos block, we give a rough allocation to higher levels of codetermination.

3.2. Epistemological-philosophical observations regarding physics

In philosophical and concrete historical studies, Wahsner and Borzeszkowski (1992, 2012) figure out those conceptual and experimental-objective preparations within physics that facilitate to use mathematics as mean for expressing, describing and analyzing dynamics in terms of laws and to link mathematics with measuring practices. The following both aspects are in particular important (Wahsner & Borzeszkowski, 1992, pp. 125-135):

a) Since only finite distances are measurable, conceptual contradictory identifications of infinite or infinitesimal quantities, which arise in mathematical structures, with finite quantities are enforced. The particular context dependent adequate but from a mathematical perspective inconsistent use of mathematical concepts is historically one of the most original achievements of physics.
b) Only effects of properties of objects are measurable and not dynamic interactional relations. This leads to the question, which behavior can be transformed to a property. Related answers could be found studying the complicated historical genesis of physical measured quantities.

Physical quantities are thinking-objects, which are constructed on the basis of real equalities, checked by specific instruments in specific experiments; they are tools for investigating real objects in contexts. Considering and treating physical quantities under the measurement aspect allows to formulate dynamics related laws in such a way that their assertions can empirically be proved.

In contrast to physics, quantities appear in mathematics merely within functional structured systems that presuppose their existence. This facilitates mathematics to be without inherent contradictions and formally consistent, but, at the same time, disable mathematics to make assertions about real objects and their behavior. Therefore mathematics needs physics (or another empirical science) to make statements about reality (p. 128). On the other hand, physics needs mathematics for measurements, calculations and expressing dynamic interactions by laws, that is: mathematics allows making basic relations calculable and measurable.

4. Praxeological analysis

In this section we present an ATD analysis of the introduction of the Delta-impulse in (Fettweis, 1996). The main ideas and results of this analysis are also relevant for related SST-books like Girod, Rabenstein and Stenger (2007).

4.1. General considerations on signals

Fettweis characterizes signal and system theory not as a technical but as a, in general, physical discipline. The author stresses the importance of physical understanding and argues that an increasing elaboration of mathematical concepts would not only go beyond the scope of the book, but would make the understanding of the physical reasoning of methodological issues increasingly harder. He constructs the relation between mathematics and physics as a dilemma between mathematical precision and the understanding of physical reasoning. This positioning between mathematical precision and the understanding of physical reasoning affects the praxeologies, especially their logos-blocks.

The focus on physical understanding leads Fettweis in particular to a general principle concerning two different but connected concepts of signals: “real signals x(t)" occur at communications transmission and are irregular. Furthermore they have the following properties:

(1) They are of finite duration, i.e. there exist t_0 and t_1 with $t_1 > t_0$, such that $x(t) = 0$ for $t < t_0$ and $t > t_1$.

(2) They are continuous for all $t \in (-\infty, \infty)$.

(3) They are sufficiently differentiable.

Following Fettweis (p. 5) real signals are characterized by irregularity and high diversity, so they are inappropriate for numerical and analytical calculations and are not usable as measurement signals. Therefore “idealized signals”, which will unavoidably violate some of the properties (1) to (3), are introduced. In spite of their simplicity, using idealized signals can cause difficulties, especially with respect to convergence. As an example Fettweis (pp. 8) considers the unit step function that satisfies none of the properties (1) to (3)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1/2 & \text{for } t = 0 \\ 1 & \text{for } t > 0 \end{cases}.$$

In such a case the idealized signal can be replaced by real signals, such that the specific difficulty does not arise any more. After an analysis using real signals the replacement can be reversed. This general principle is illustrated in Figure 1:

$$\begin{tikzcd} \text{real signals} \arrow[rr, bend left, "\text{analysis}"] & & \text{real signals} \arrow[d, "\text{limit process}"] \\ \text{idealized signals} \arrow[u, "\text{modify/replace}"] & & \text{idealized signals} \end{tikzcd}$$

Figure 1. Illustration of the interplay between idealized and real signals

The unit step function $u(t)$, for example, could be replaced by continuous, in $t = 0$ rapidly increasing real signals $f_n(t)$, c.f. Figure 2.

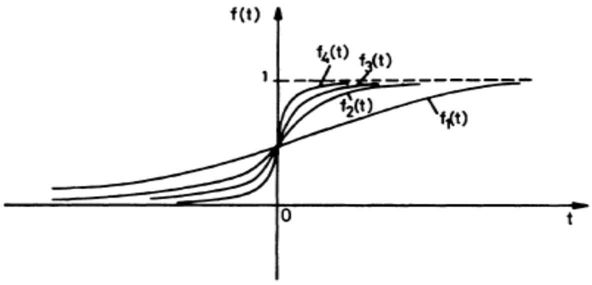


Figure 2. Function series approximating the unit step function

The approximation is symbolically expressed by $u(t) = \{f_n(t)\}$ and also written as limit process: $u(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$.

The general principle is justified by referencing the compliance with approaches in other physical disciplines (p.6), by a need of physics to use function series for approximations and by claiming that an adequate application of the principle generates unambiguous and correct results (p. 12). In the same paragraph Fettweis refers also to Distribution Theory as a mathematical domain. He explicitly refers the work of L. Schwartz, that is presented in a "very abstract and physically less appealing form" (p. 12) and the work of Antosik, Mikusiński, and Sikorski (1973), that could be seen as an elaborated mathematical basis for the presentation in Fettweis.

4.2. The Delta-impulse

In this section we provide a sketchy praxeological analysis of the introduction of the Delta-impulse. First we summarize elements of the praxis blocks p_i. Then we describe the technological-theoretical discourse with regard to the considerations in 4.1. We specify the elements of the logos block by l_i.

The idealized impulse $\delta(t)$ is defined by a series of real impulse-functions (p_1): $\delta(t) = \{f_n(t)\}$ with the following properties

(i) $f_n(t)$ has width $2\epsilon_n$ with $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$

(ii) All impulses f_n have the same normalized area: $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1$

This definition is illustrated by Figure 3:

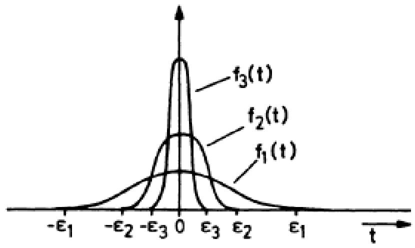


Figure 3. Function series representing the Delta-impulse

Illustrating properties of functions by graphical representations (p_2) is a common practice in engineering textbooks and in particular in SST. By idealizing (i) and (ii) the two properties a) $\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ for } t = 0 \\ 0 \text{ for } t \neq 0 \end{cases}$ and b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ are assigned (p_3) and the idealized impulse $\delta(t)$ is visualized by Figure 4 (p_2):

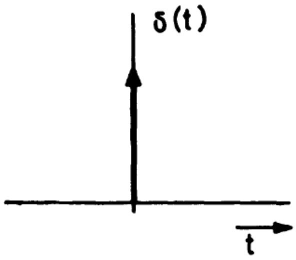


Figure 4. Visualization of the idealized Delta-impulse

The third important property of the Delta-impulse, the sifting property$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-t_0) = \varphi(t_0)$, is deduced as follows: $\delta(t)$ is replaced by a function series $\{f_n\}$ (p_1) according to Figure 3 (p_2). For narrower and narrower pulses $f_n(t-t_0)$ the function $\varphi(t)$ could be replaced by the value (t_0) (p_4). Using property (ii) (p_5) and referencing to Figure 5 (p_2), the sifting property follows.

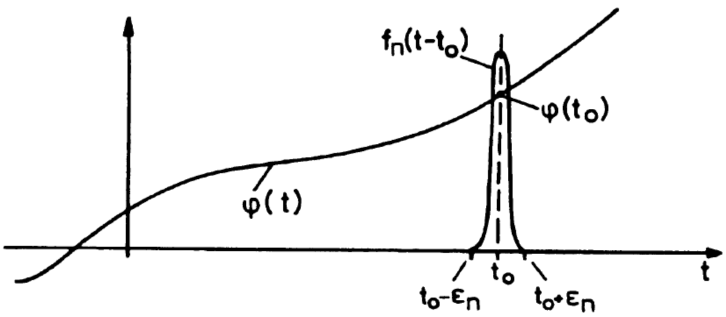


Figure 5. Sifting property

The technological-theoretical discourse is especially based on the general principle connecting idealized and real signals, illustrated in Figure 1. This provides justifications for p_1 and p_3 (l_1): The definition via a series of real impulses reflects the interplay between real and idealized signals. Furthermore it is argued that pulsed signals are very useful for engineering (l_2) (p. 12). The properties (i) and (ii) are directly linked to properties of pulsed signals: only the action of the signal matters, not the specific form (l_3). This is fulfilled, if the duration of the signal is very short, i.e. 2ϵ. The action of the signal corresponds to the area, in Fettweis also denoted by "Impulsmoment", illustrated in Figure 6. This refers to the idea of the integral as area from mathematics courses (l_4).

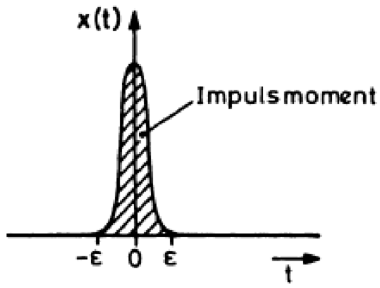


Figure 6. Example of a real impulse

The element p_2 is produced by the justifying characteristic of visualizations (l_5): In Figure 3 a limit-process of real signals is visualized and the corresponding result is shown in Figure 4. So the visualizations reflect also the idealization process. The illustrations act as ostensive metaphors. Dirac (1963) claimed: "The delta function comes in just from picturing the infinity as something, which approximates to them." Additionally the principle, that the exact course of the signal doesn't matter, the essential is, that it is pulsed is important for all figures (l_3). The ever shorter durations of the pulsed signals justify the replacement of $\varphi(t)$ by (t_0) (l_6). The properties a) and b), which are assigned in p_3, are idealizations of properties (i) and (ii), properties of real signals, which are transferred to properties of an ideal signal. Especially property b), which contradicts the understanding of the integral in higher mathematics courses, is not mathematically justified yet. Fettweis (p. 14) discusses this point explicitly and justifies the integration by referring to real signals.

Summarizing, the technological-theoretical discourse is a mixture of higher mathematics ideas (l_4), engineering reasoning (i.e. l_2 and l_3) and a principle concerning the interplay between real and idealized signals reflecting the connection of mathematics and physics in general (l_1). The justification and explanation of practices considering idealized signals like $\delta(t)$ are done on the level of real signals. This correlates with Dirac's (1958) hint, that one must exit the mathematical context for justification and do not interpret δ as mathematical symbol.

The reconstructed elements of the logos block and other justifications and explanations could be assigned to different levels of the scale of levels of codetermination: The justification of the principle in Figure 1 lies on the level of the discipline (physics). The technological-theoretical elements l_1, l_2, l_4 and l_5 could be assigned to domain (engineering), l_3 to sector (signal theory) and l_6 to the level of the subject (Delta-impulse). The local curriculum (level of university) and experience and propensity of the author of the textbook are also mentioned as a restriction for the content (Fettweis, p. iii). Finally we refer to a remark by Peters (2004, p. 99) that adapts a statement by Schwinger about Feynman-diagrams: "the δ-function 'was bringing computation to the masses'", which expresses the teaching and learning process related institutional aspect of the Dirac-impulse in a rather convincing way. Moreover this statement indicates aspects on the level of society.

4.3. Further remarks related to epistemological-philosophical issues

The Dirac-impulse represents an idealized signal. Via approximation sequences this idealized signal, which is neither observable nor measurable, was linked to real signals, which are in principle observable and measurable. The scheme in figure 1 represented the basic consideration that underlies specific and, regarding the SST-context, adequate identifications. In particular theoretical relations including δ as well as δ itself gain empirical meaning: idealized signals like δ become physical quantities in the sense of 3.2, which allows formulating relations like the sifting property and measurements. These interrelations (e.g.

allowing measurement, being element of a relation) imprint certain properties and induce techniques and technologies treating δ, which look purely mathematically and were historically important aspects for developing a systematic and axiomatic based mathematics for δ. From the physical point of view this might be helpful but is not necessary.

Furthermore, the mathematical theory as such does not allow injecting into δ physical meaning how it is enabled by, among others, the scheme in figure 1: For linking δ with measurable quantities, it has occasionally to be replaced in a SST adequate way, which necessarily transcends the formal mathematical context. In particular the inherent and specific identification of "finite" and "infinite" cannot mathematically be proved to be correct but could only be mathematically explored.

Moreover, the sifting property links a global continuous object φ to local values $\varphi(t_0)$. This is one of the issues of δ in equations, e.g. in transferring relations from discrete signals to continuous signals and vice versa. This gives the possibility for treating the dialectic between "point" and "continuum" in such a way that allows computation (δ appears in equations and calculus) and measuring.

5. Conclusion

We claim that a broad understanding of logos-blocks in praxeological reference models taking into account higher levels of codetermination is valuable, since it allows in particular identifying inherent issues, which have to be resolved in some way by any institutionalized didactical or pedagogical practice. Here the aim was amongst others to illustrate and identify the relevance of basic philosophical-epistemological ideas for enriching the logos-block of praxeologies in SST and how they contribute to a wider understanding of actual justifications of practices. We will move on in this direction.

References

Alpers, B. (2017). Differences between the usage of mathematical concepts in engineering statics and engineering mathematics education. In D*idactics of Mathematics in Higher Education as a*

Scientific Discipline – Conference Proceedings. khdm-Report 17-05 (pp. 137-141). Kassel: Universität Kassel.

Antosik, P., Mikusiński, J., & Sikorski, R. (1973). *Theory of distributions: the sequential approach.* Amsterdam [u.a.]: Elsevier Scientific Publ.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). 'Applicationism' as the dominant epistemology at university. In *CERME 7-Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1937-1948).

Barquero, B., Serrano, L., & Serrano V. (2013). Creating the necessary conditions for mathematical modelling at university. In *CERME8-Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 950-959).

Blum, W., & Leiss, D. (2005). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Sugarloaf". *ICTMA 12 Proceedings* (pp. 222-231).

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58,* 51–65.

Borzeszkowski, H. H. V., & Wahsner, R. (2012). *Das physikalische Prinzip: der epistemologische Status physikalischer Weltbetrachtung*. Königshausen & Neumann.

Castela, C., & Romo Vázquez, A. (2011). Des Mathematiques a l'Automatique: Etude des Effets de Transposition sur la Transformee de Laplace dans la Formation des Ingenieurs. *RDM, 31*(1), 79-130.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. *RDM, Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble*, 131-167.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *RDM 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Kim, S. (2015). What is a theory according to the anthropological theory of the didactic? In CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (pp. 2614–2620).

Dirac, P. A. (1927). The physical interpretation of the quantum dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing*

Papers of a Mathematical and Physical Character, *113*(765), 621-641.

Dirac, P.A.M. (1958). *The principles of quantum mechanics*. 4. ed. Oxford: Clarendon Press.

Dirac, P.A.M. (1963). Interview with T.S. Kuhn. Archives for the History of Quantum Physics, Niels Bohr Library, AIP, New York

Fettweis, A. (1996). *Elemente nachrichtentechnischer Systeme*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner Verlag.

Girod, B., Rabenstein, R., & Stenger, A. K. E. (2007). *Einführung in die Systemtheorie - Signale und Syteme in der Elektrotechnik und Informationstechnik*. Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag.

Hochmuth, R., Biehler, R., & Schreiber, S. (2014). Considering mathematical practices in engineering contexts focusing on signal analysis. *T. Fukawa-Connelly, G. Karakok, K. Keene & M. Zandieh. Proceedings of RUME17*, 693-699.

Hochmuth, R., & Schreiber, S. (2015). Conceptualizing Societal Aspects of Mathematics in Signal Analysis. *In S. Mukhopadhyay & B. Geer (Eds.), Proceedings of the Eight International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 2, pp. 610–622). Portland: Ooligan Press.

Landers, D., & Rogge, L. (2013). *Nichtstandard Analysis*. Springer-Verlag.

Peters, K. H. (2004). Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen: Eine historische Untersuchung über die Grundlagen der Physik im Grenzbereich zu Mathematik, Philosophie und Kunst. Dissertation, Universität Hamburg.

Peters, J., Hochmuth, R., & Schreiber, S. (2017). Applying an extended praxeological ATD-Model for analyzing different mathematical discourses in higher engineering courses. In *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings. khdm-Report 17-05* (pp. 172-178). Kassel: Universität Kassel.

Purkert, W. (1990). Infinitesimalrechnung für Ingenieure—Kontroversen im 19. Jahrhundert. In *Rechnen mit dem Unendlichen* (pp. 179-192). Basel: Birkhäuser.

Schwartz, L. (1947). Théorie des distributions et transformation de Fourier. In *Annales de l'Univ. de Grenoble,* Vol. 23, 7-24.

Tuminaro, J., & Redish, E. F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physics Education Research, 3*, 1-22.

Wahsner, R., & Borzeszkowski von, H.-H. (1992). *Die Wirklichkeit der Physik. Studien zur Idealität und Realiät in einer messenden Wissenschaft*. Frankfurt/M., Berlin, Berlin: Peter Lang.

Weisbach, J. L. (1860). *Die ersten Grundlehren der höhern Analysis oder der Differenzial-und Integralrechnung: Für das Studium der praktischen Mechanik und Naturlehre möglichst populär.* Braunschweig: Vieweg und Sohn.

Diseño de una actividad didáctica con base en un diálogo entre TAD y APOE

Rita VAZQUEZ
Academia de Matemáticas, UACM, México

María TRIGUEROS, Avenilde ROMO
ITAM, México, CICATA, México

Abstract. We present a didactical modelling activity based on the dialogue between TAD and APOS theories, illustrating its potentiality for the design and analysis of research experiences.

Resumen. Se presenta el diseño de una actividad de modelación basada en el diálogo entre las teorías TAD y APOE, ilustrando su potencialidad para el diseño y análisis de experiencias de investigación.

1. Introducción

El trabajo que presentamos continúa la investigación sobre el diseño de actividades didácticas basadas en modelación para la formación matemática de futuros ingenieros, y tiene como antecedente el artículo de Vázquez, Romo-Vázquez, Trigueros y Romo-Vázquez (2016) en el que se presentó un análisis praxeológico de la BSS (Separación Ciega de Fuentes). El análisis permitió identificar la BSS como una praxeología institucional, enmarcada en el Análisis de señales -institución P(DI)-, que actualmente está en una fase de rápida evolución y cuyo origen se remonta a un problema de la neurobiología: se sabe que, al mover una articulación, el cerebro recibe información mezclada tanto del cambio de posición de la articulación como de la velocidad al moverla, ¿es posible imitar la forma en que el cerebro separa estas informaciones? En su planteamiento actual, la BSS consiste en determinar "fuentes" a partir únicamente del conocimiento de mezclas (observaciones). Por ejemplo, separar señales cerebrales (fuentes) de las no cerebrales a partir de un encefalograma (observaciones). Así, el problema de la BSS es un problema de modelado inverso: su punto de partida son los resultados obtenidos en la medición (observaciones), se supone una manera de mezclado y se determinan las fuentes, mediante modelos matriciales y estadísticos.

El análisis de la BSS permitió identificar una praxeología local P_{BSS} en la que se asume que las observaciones son combinaciones lineales de las fuentes (modelo de mezcla instantánea sin ruido) de la forma $T(s)=As=x$, donde A es la matriz de mezcla, y s representa las fuentes y x las observaciones. Con el objetivo de que la praxeología P_{BSS} fuera objeto de enseñanza en un curso de Álgebra Lineal $E(AL)$ en una formación de futuros ingenieros, se operó una transposición. Para ello, se reconocieron elementos relevantes en $E(AL)$: concepto de vector en R^n, de matriz, de transformación matricial $T(x)=Ax$, de transformación matricial inversa $T^{-1}(x)$, de la matriz inversa y el concepto de señal. Para construir la praxeología transpuesta P_{BSSE} y los conceptos involucrados se diseñó la actividad didáctica que presentamos en la sección 3.

Cabe mencionar que además de la praxeología nuclear identificada, el análisis permitió situar a la BSS como una praxeología de nivel regional, que es relevante en la ingeniería y tiene aplicaciones en dominios fuera de $P(DI)$ (por ejemplo, la biomedicina o las telecomunicaciones) y que incluye técnicas y elementos tecnológicos de distintos niveles de complejidad, como se ilustra en la Figura 1. Esta organización praxeológica puede ser la base de otras transposiciones para producir actividades didácticas en condiciones institucionales distintas, por ejemplo, en cursos avanzados de ingeniería en los que estén disponibles técnicas (matemáticas) más complejas.

Para el diseño de la actividad y el análisis de su implementación, se utilizó como referente teórico los resultados del diálogo entre las teorías Antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999) y Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE) (Arnon, 2014). Esto permitió tomar en cuenta tanto la dimensión institucional de un proceso de estudio planteado a partir de una cuestión problemática -resultado del análisis praxeológico de la BSS- como la dimensión cognitiva a partir de la metodología de investigación de APOE, de manera integrada. De esta manera fue posible evaluar de forma puntual la construcción de las técnicas y de elementos tecnológicos presentes en la praxeología adaptada a $E(AL)$ y el trabajo de los estudiantes a lo largo de la puesta en práctica de la actividad.

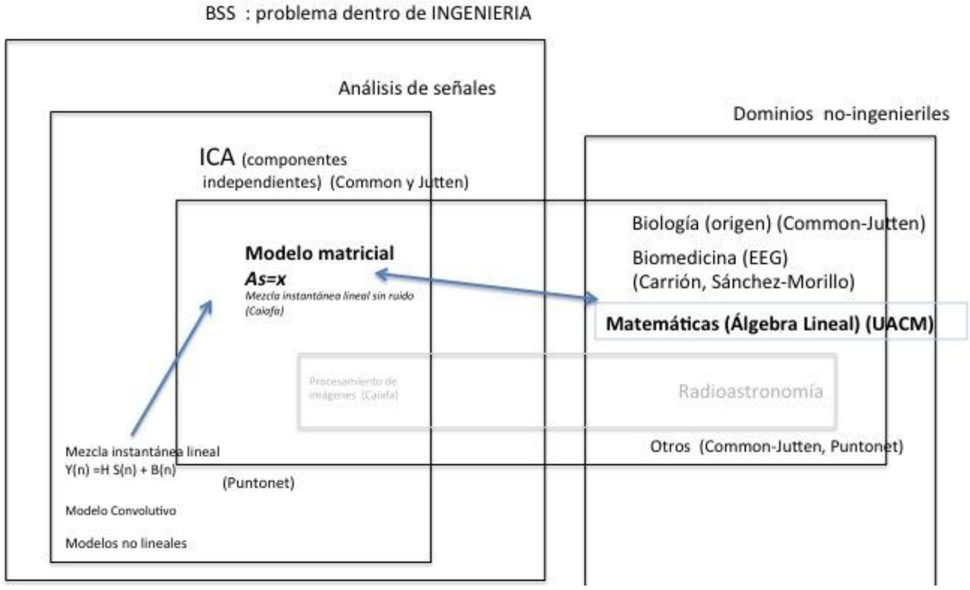


Figura 1. Niveles de organización de la BSS dentro de $P(DI)$

2. El diálogo entre TAD y APOE

2.1. Antecedente: tres modalidades de diálogo

En el diálogo establecido entre la TAD y APOE (Bosch, Gascón y Trigueros, 2011 y 2017) se plantearon tres modalidades de diálogo entre estas teorías, consideradas como praxeologías de investigación (PI). En la tercera modalidad, el diálogo parte de los componentes técnico y tecnológico de las dos PI, considerando que las construcciones incluidas en la Descomposición Genética (DG) de un concepto matemático pueden ser interpretadas de modo que resulten útiles para "caracterizar el desarrollo de las técnicas" (Bosch, Gascón y Trigueros, 2011, p. 97) así como para precisar los grados de completitud de las praxeologías (matemáticas). Los momentos de estudio, que en la TAD definen el proceso de construcción o reconstrucción de una praxeología, pueden conectarse desde el punto de vista institucional con las actividades que en APOE detonan la construcción de conceptos, diseñadas a partir de la DG a través del ciclo ACE de la misma teoría. Este ciclo se reformula para proponer una adaptación que se denominó los *momentos de estudio del* *ciclo ACE* (A-Actividades, C-discusión en clase, E-Ejercicios) (Bosch, Gascón y Trigueros, 2011 y 2017).

2.2. Un diseño didáctico basado en el diálogo TAD-APOE

Para diseñar la actividad didáctica se propuso una interpretación de los momentos de estudio del ciclo ACE en la que las fases de Actividades funcionan como un detonador para llevar a cabo Acciones o su interiorización en Procesos en forma de tareas matemáticas, que pueden asociarse a los momentos del primer encuentro, de exploración y de trabajo en la técnica, que permitan propiciar la construcción, por parte de los estudiantes genéricos de la institución, de algún elemento inmerso en la praxeología. La construcción de estos elementos -de naturaleza esencialmente matemática- constituye el objetivo del diseño didáctico, y se desarrolla y se evalúa con base en una DG preliminar de dichos elementos. Las fases de discusión en clase C y de ejercicios E propician la reflexión e incluyen actividades dentro de los momentos de trabajo de la técnica, técnico- tecnológico, de institucionalización y de evaluación del ciclo ACE mediante nuevas oportunidades de reflexión para lograr la interiorización de las Acciones en Procesos, la encapsulación de éstos en Objetos o la construcción de Esquemas considerados en la DG. Las actividades se desarrollan así a partir de iteraciones progresivas del ciclo, en las que las construcciones alcanzadas permiten llevar a cabo nuevas construcciones. En el desarrollo progresivo del ciclo ACE emergen los momentos de estudio del mismo, para dar lugar a un proceso de estudio equilibrado, en el que es posible evaluar la DG inicial.

Los antecedentes del diálogo, y el interés de diseñar actividades de modelación que acerquen las instituciones de la práctica con las de la formación matemática desde el primer año, tal y como se propuso con el análisis praxeológico de la BSS, llevan a plantear dos preguntas de investigación :

(1) ¿Cómo pueden intervenir los resultados del diálogo entre TAD y la teoría APOE en el diseño de una actividad didáctica basada en modelación? Y,

(2) ¿Es posible que el uso del diálogo entre teorías posibilite el aprendizaje de la noción de transformación matricial, tomando en cuenta las condiciones institucionales para su aprendizaje?

3. El diseño de la secuencia didáctica: de la BSS al curso de Álgebra Lineal

Para el diseño de la secuencia se consideró la praxeología "nuclear" que denotaremos P_{BSS} y que fue identificada a partir del análisis praxeológico: en ella, el tipo de tarea consiste en separar las señales bajo la hipótesis del modelo de mezcla lineal instantánea (Vázquez, Romo-Vázquez, Trigueros, Romo-Vázquez, 2016).

Para hacer intervenir la noción de señal se diseñó el "Problema de Espías": hay cuatro espías que desean descifrar una conversación entre diplomáticos, utilizando como modelo para simular su voz, un tipo simple de señales sonoras, conocidas como tonos puros, que matemáticamente se modelan mediante la función de onda $y(t)=a\cdot sin(2\pi\omega t)$, donde ω corresponde a la frecuencia del tono y a es la amplitud de la onda sonora. Así, las fuentes (voces) están representadas por tonos puros de distintas frecuencias, denotados $s_1,s_2,\ldots$ y las observaciones corresponden a registros de la mezcla de voces, por ejemplo, obtenidos con grabadoras posicionadas en distintos puntos de la sala de reunión y denotados como $x_1,x_2\ldots$ Las hipótesis del modelo se simplificaron, al no considerar el carácter aleatorio de las variables x_i y s_{i}.. Así, el tipo de tarea para P_{BSSE} se reformuló como: encontrar las señales origen, es decir, calcular $\boldsymbol{s}(t)=(s_1(t),...,s_N(t))^T$ a partir de conocer las señales de salida, es decir, $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),...,x_p(t))^T$, considerando, como hipótesis, que el proceso corresponde a una transformación lineal, es decir que $T(s)=As=x$, donde A es una matriz de Nxp y donde cada $s_i(t)$ es un tono puro de una frecuencia dada. Si bien en la formulación original A es un mapeo no conocido (una hipótesis que en $P(DI)$ lleva a generar técnicas estadísticas para estimar A^{-1}) fue posible operar una transposición para el contexto de tonos puros en la que A puede determinarse a partir de la relación entre la amplitud de la onda sonora y la distancia entre fuentes y observaciones. Para resolver el tipo de tarea T=separar tonos puros se reconoció una técnica que se basa en el cálculo de la inversa de una transformación matricial que a su vez comporta una sub-técnica para calcular la inversa de una matriz. Se hizo un análisis teórico y didáctico de los elementos señal (tono puro), transformación matricial directa, inversa e inversa de una matriz a partir del cual se propuso una DG preliminar tanto para la construcción de la transformación matricial, como de la matriz inversa. A partir de la DG y tomando como marco el diálogo entre las dos teorías se diseñó una actividad didáctica dividida en tres ciclos.

3.1. Un diseño en tres iteraciones del ciclo ACE

El **primer ciclo** parte de un momento del encuentro *M1* con la praxeología de separación de fuentes y tiene por objetivo comenzar a construir el modelo de la mezcla lineal instantánea como un Proceso, de modo que dé lugar a la necesidad de las transformaciones matriciales directa e inversa para poder abordar y resolver el problema de separación. Esto se logra a través de dos dispositivos principales: el momento del encuentro con *la cuestión problemática Q* y el uso de las *configuraciones de fuentes y observaciones* para comenzar a construir el modelo matemático de interés. El momento del primer encuentro se abre con el Problema de Espías, simulando en el aula la conversación entre tres personas que hablan y registrando la conversación con teléfonos celulares, ubicados en distintas posiciones del salón, y se plantea la cuestión: ¿cómo se puede identificar a los emisores si solo se cuenta con las grabaciones? Se da pie a un momento exploratorio *M2* en el que se discute sobre las variables que tendrían lugar en la construcción de una técnica para abordar la tarea, y se propone la realización de tareas en las que se hacen Acciones, de cambio de las configuraciones de fuentes y observaciones con el fin de que los estudiantes interioricen una configuración de fuentes y observaciones como un Proceso de mezcla lineal de fuentes.

El **segundo ciclo** consolida el momento exploratorio *M2*. Se evocan los Procesos conjunto y vector, así como función de una variable para que, al coordinarse con el Proceso mezcla de fuentes se construya la transformación matricial asociada a una configuración como un Proceso.

Esta construcción permite asociar una mezcla de *m* fuentes produciendo *n* observaciones al modelo matricial $As=x$, reconociéndolo como una transformación $T_A: R^n \rightarrow R^m$, la transformación aparece entonces como un elemento tecnológico, y como un Objeto, que permite el trabajo con el modelo. Al disponer de esta construcción surge la necesidad de una técnica para modelar el problema inverso, es decir, separar la mezcla de señales que se traduce en generar una transformación inversa $T_A^{-1}: R^m \rightarrow R^n$ tal que $T_A(x)=s$. Al mismo tiempo, surge la necesidad teórica de saber si puede o no existir esa técnica y bajo qué condiciones. Se inicia así con la construcción del concepto transformación matricial inversa, a partir de Acciones mediante las cuales los estudiantes exploran la posibilidad de expresar matemáticamente un modelo inverso para el modelo de mezcla lineal. Luego, la reflexión sobre las Acciones sobre el Objeto Modelo de mezcla y sobre el Objeto Transformación matricial hacen emerger la necesidad de contar con una técnica para calcular *la matriz inversa para A* (la matriz de mezcla). Aparecen en el ciclo nuevos momentos de primer encuentro, de exploración y de trabajo en la técnica en los que con base en la DG de la transformación matricial inversa se proponen actividades para construir la matriz inversa de *A*, que conforman el tercer ciclo.

En el **tercer ciclo** el objetivo es en primer término construir el concepto matriz inversa y en segundo ampliar la construcción de transformación matricial de manera que incluya la existencia de su inversa. En esta parte, el trabajo se separa momentáneamente del modelo original (mezcla de tonos puros) y se concentra en la construcción del objeto matemático (matriz inversa), lo que se pretende lograr como resultado de la coordinación del Proceso producto matriz-vector y el Proceso Sistemas de ecuaciones para calcular los coeficientes de una matriz inversa entrada por entrada -tomando la inversa en el sentido de la matriz que revierte el efecto de la matriz *A* en la transformación directa-. Este trabajo puede identificarse con un nuevo momento exploratorio y de construcción de la técnica del ciclo ACE, *M2* y *M3*. Se proponen Acciones de cálculo de la inversa entrada por entrada, haciendo variar las matrices (tanto en tamaño como en relación a la dependencia lineal de sus filas) para propiciar la reflexión sobre las condiciones necesarias para que la técnica pueda aplicarse. Es decir, para construir una condición de invertibilidad para una matriz, lo que se identifica como un momento de producción de discurso tecnológico-teórico *M4*. Luego, la discusión en clase y los ejercicios permiten abordar la viabilidad de la técnica, sus alcances y limitaciones para construir una ampliación o mejora de la técnica inicial. Esta ampliación, se logra a partir de actividades con base en la DG que proponen Acciones de resolución de sistemas de ecuaciones en la que los vectores b del sistema $Ax = b$ son los vectores canónicos y que, al coordinarse con el Proceso para calcular la inversa entrada por entrada se interiorizan en la construcción del Proceso asociado al algoritmo de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa y de Procesos asociados a las condiciones de su existencia, lo que resulta en un refinamiento de la técnica inicial. Cuando se han concluido las actividades de construcción de la matriz inversa, se regresa al modelo de transformación matricial y se proponen actividades que coordinan el Proceso matriz inversa con el proceso transformación matricial para llegar en primer término, a una construcción Proceso de la transformación matricial inversa y, luego, al coordinar éste con el Proceso mezcla de fuentes, construir el Proceso correspondiente al modelo de transformación matricial inversa para una mezcla de sonidos (tonos puros), que permite resolver el problema de separación de fuentes del siguiente modo: el estudiante genérico de la institución distingue de entre un conjunto de posibles configuraciones, aquéllas que llevan a un modelo matricial invertible, lo que lo posibilita, a partir de un vector muestra de las observaciones, resolver el problema de separación mediante la transformación matricial inversa. La secuencia de ciclos es progresiva, de modo que las construcciones del ciclo anterior sirven como base para propiciar las construcciones del siguiente. El problema de espías es el punto de partida de la secuencia, cuando se formula mediante el momento del encuentro *M1* y es también el punto de cierre, cuando se resuelve por completo para configuraciones específicas de fuentes y observaciones.

	Categorías del análisis
Ciclo 1	Momento del encuentro con P_{BSS} a través del problema de espías. Identificar elementos de la praxeología (tarea principal). Construir el modelo de la mezcla de señales como un Proceso.
Ciclo 2	Construir la transformación matricial asociada a una configuración como un Proceso, que permite asociar una mezcla de *m* fuentes produciendo *n* observaciones al modelo matricial $As=x$, reconociéndolo como una transformación $T: R^n \rightarrow R^m$ Emergencia de una técnica para calcular $T^{-1}: R^m \rightarrow R^n$ tal que $T(x)=s$.
Ciclo 3	Sistematizar el cálculo de la inversa a partir de coordinar los Procesos transformación matricial y sistema de ecuaciones. Construcción de la matriz inversa como Proceso. Construcción del algoritmo de Gauss-Jordan (refinamiento de la técnica). Construcción de las condiciones para la invertibilidad de *A*, a través de coordinar los Procesos independencia lineal y matriz inversa.
	Evaluación: resolver un problema de separación de tonos puros, que permite dar respuesta a la cuestión generatriz. Coordinación de los Procesos modelo de mezcla lineal, transformación matricial inversa y matriz inversa, para determinar, dada una configuración, si es posible revertir la mezcla de señales mediante $s=T^{-1}(x)$

Tabla 1. Categorías de análisis para el diseño, a partir de los momentos de estudio del ciclo ACE

4. Evaluación del diseño

Dada la imposibilidad de incluir la totalidad de actividades que forman la secuencia en esta comunicación, se eligió una actividad del ciclo I que llamamos *Construcción del modelo matemático para el problema de espías*, con el fin de analizar su pertinencia en relación a las preguntas de investigación.

4.1. La actividad de *Construcción del modelo matemático para el problema de espías*

Como antecedente a esta actividad se generó el momento del encuentro con P_{BSS} a partir de la simulación con grabaciones y voces, descrita anteriormente. Luego, a partir del trabajo con las configuraciones y los tonos puros, se reformuló la situación inicial:

En esta actividad se propone a los estudiantes suponer que hay tres fuentes y cuatro observaciones, de acuerdo a la configuración de la Figura 2.

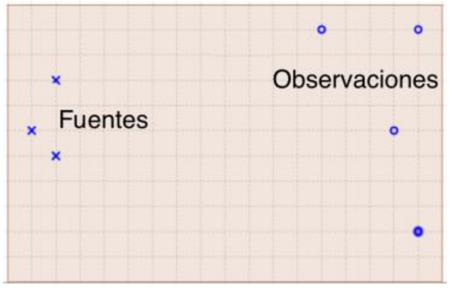


Figura 2. Una configuración de tres fuentes y cuatro observaciones

El problema de espías se reformula dando lugar a la cuestión Q_1.

Q_1: Suponiendo que las voces o fuentes son tres tonos puros de frecuencias 440Hz, 660Hz y 880Hz y que se cuenta con las observaciones en un instante.

a) ¿Cómo podría saberse qué tono corresponde a qué fuente?

b) Propongan un modelo para relacionar las variables x_i (observaciones) y s_i (fuentes).

c) ¿Cuáles son las hipótesis en su modelo?

La pregunta b) corresponde con un momento de exploración en el que surge la necesidad de generar una técnica inicial que permita resolver Q_1. La discretización permite al estudiante identificar para un valor de i y un valor de t_0 específicos, los valores de las funciones $s_i(t_0)$ y $x_i(t_0)$ como números reales, coordinando el Proceso de discretización con el Proceso de función de variable real. Este Proceso se puede coordinar con el Proceso vector haciendo posible identificar la función vectorial s que asigna a cada t_0 el vector $(s_1(t_0), s_2(t_0), s_3(t_0))$. Para lograr la interiorización, se proponen Acciones en las que las preguntas a), b)y c) se plantean de nuevo para configuraciones distintas, haciendo variar el número de fuentes, el número de observaciones y la distancia entre éstas. El germen de técnica inicial (la que permite responder la pregunta Q_1) evoluciona a partir de la interiorización de Acciones para plantear variables y relaciones entre éstas que modelen *cualquier* configuración de fuentes y observaciones. El trabajo de los equipos se socializa a partir de la discusión en clase, lo que da pie a acordar las variables y parámetros del modelo y establecer una notación común, que será usada por el grupo, por ejemplo:

$s_i = s_i(t)$ = fuente i, para $i = 1, 2, 3$

$x_j = x_j(t)$ = observación j, para $j = 1, 2, 3, 4$

d_{ij} = distancia de s_j a x_i (en total 4x3=12 distancias)

w_i = frecuencia del tono fuente s_i, i=1, 2, 3

Es posible argumentar durante la discusión en grupo a partir de evocar un Esquema de la Física, las dos hipótesis principales del modelo:

(1) La relación inversa entre distancia y amplitud:

$x_1 = a_{11}s_1 =(1/d_{11}^2)s_1 = (1/d_{11}^2)\ sen(w_1t)$

(2) El modelo supone que cada observación es una superposición de las señales fuente:

$x_1 = a_{11}s_1+ a_{12}s_{2+}\ a_{13}s_3$

Se requiere en estas dos hipótesis que los estudiantes hayan construido un Proceso de combinación lineal, que les permita identificar la mezcla lineal de las tres fuentes de la configuración como una combinación lineal de los tres tonos puros, donde los coeficientes estén dados por la relación entre distancia y amplitud. La ecuación en (1) es un modelo conocido, justificado desde la Física y que puede o no ser construido durante la actividad, esto dependerá de los Esquemas previos que los estudiantes tengan en relación al sonido.

En concordancia con la DG preliminar, propuesta para la transformación matricial, se requiere recurrir a una construcción Proceso de sistema de ecuaciones lineales y coordinarla con las construcciones relacionadas con la configuración de fuentes y observaciones, para reconocer el modelo de mezcla como un sistema lineal de 4x3, con coeficientes reales. Luego de hacer Acciones (primero sobre las dos observaciones restantes x_2 y x_3, y luego sobre otras configuraciones), la mezcla lineal de tonos se interioriza como un Proceso, que permite al estudiante, una vez que coordina este Proceso con el Proceso sistema de ecuaciones, construir un nuevo Proceso que permite asociar a una configuración de n fuentes y m observaciones, un sistema de m ecuaciones lineales con n variables, en el que los coeficientes de las ecuaciones están dados por los cuadrados de los recíprocos de la distancia entre fuente y observación.

Finalmente, la pregunta c) provoca la reflexión en relación a las condiciones en las que la técnica inicial tiene lugar. Esto corresponde a un momento de trabajo de la técnica, que se ha reconocido como uno que difícilmente se alcanza en enfoques tradicionales de enseñanza, y que como aquí se ejemplifica, puede favorecerse cuando se detona la construcción de Procesos a partir de la reflexión sobre las acciones presentes en la técnica inicial.

Las actividades del ciclo 2 y 3 diseñadas a partir de la DG, apoyan la construcción de un concepto matemático (la transformación matricial y su inversa) que muestra ser relevante para la formación matemática de futuros ingenieros, como ejemplo de un problema inverso, desde una perspectiva sistémica del producto matriz por vector.

Es importante mencionar que la secuencia completa ha sido implementada en un curso de Álgebra Lineal, a lo largo de seis sesiones, y sus resultados, ya analizados, son positivos y serán publicados en un próximo trabajo.

5. Conclusiones

En relación a la pregunta (1), la aproximación que aquí presentamos, cristaliza, en una experiencia didáctica específica, las posibilidades prácticas de los resultados teóricos de la interacción entre los enfoques de la TAD y APOE, sin violentar sus supuestos básicos, delineados en el diálogo entre estas teorías (Bosch, Gascón y Trigueros, 2011; Bosch, Gascón y Trigueros, 2017). Este proyecto constituye, en este sentido, la primera investigación diseñada completamente dentro de este enfoque de diálogo entre APOS y TAD, basada en modelización, que parte del análisis de una praxeología auténtica dentro de la ingeniería *P*(*DI*) y cuyo fin es la construcción de conocimiento matemático en la enseñanza de las matemáticas *E*(*M*), al operar una transposición que permite plantear la cuestión problemática inicial para un diseño didáctico. Las actividades en el diseño responden a los requerimientos de la DG y de la institución en que se implementa *E*(*AL*).

En relación a la pregunta (2) se muestra en la descripción del diseño cómo los resultados del diálogo entre las teorías permiten proponer actividades específicas para que los estudiantes logren las construcciones consideradas en la DG a lo largo de un proceso de estudio bien balanceado: en el primer ciclo, el diseño de actividades para el momento de exploración del ciclo ACE, en el que se incluyen tareas que requieren de Acciones para identificar el papel de las variables que entran en juego en el problema y la construcción de Procesos que conducen al reconocimiento de las configuraciones que posibilitan la construcción de la matriz de mezcla y a la identificación de su papel en la transformación de las señales, juega un papel esencial en la construcción del modelo matemático de interés. La reflexión grupal y la discusión en clase permiten hacer las construcciones (Acciones, Procesos, Objetos) que sustentan el aprendizaje de estos conceptos matemáticos, a la vez que permiten la puesta en práctica de habilidades que pueden desarrollarse a través de la modelización. Aunque en esta comunicación sólo se reportan resultados sobre el ciclo 1 de la secuencia didáctica, pudo observarse para las actividades de los ciclos 2 y 3, la emergencia de los momentos exploratorio y de desarrollo tecnológico enmarcando la construcción de un concepto matemático (la transformación matricial y su inversa) que muestra ser relevante para la formación matemática de futuros ingenieros, como ejemplo de un problema inverso, desde una perspectiva sistémica del producto matriz por vector. En las tareas propuestas para abrir un momento del primer encuentro con el cálculo de la matriz inversa, los estudiantes lograron interiorizar Acciones para iniciar una técnica de cálculo de A^{-1} a partir de resolver sistemas de ecuaciones relacionados con una configuración específica de fuentes y observaciones. Luego, en un nuevo momento exploratorio se logró hacer un refinamiento de la técnica inicial, produciendo una técnica más eficiente, que es el algoritmo de Gauss-Jordan. Los momentos *M4* y *M5* aparecieron para establecer las limitantes de la técnica y su utilidad para resolver el problema de separación revirtiendo el efecto de la transformación matricial, así como para identificar condiciones de invertibilidad de una matriz. Así, los estudiantes lograron en su mayoría una construcción Proceso que permite calcular la inversa de una matriz, a partir de la DG propuesta y pudieron utilizar esta construcción para resolver un problema de separación de tonos puros. Esta perspectiva da un giro a la tradición didáctica de la enseñanza del algoritmo para calcular la inversa, resaltando el enfoque funcional y conectando las construcciones matemáticas con Esquemas no matemáticos, como los relacionados con el sonido.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Nueva York: Springer.

Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Tehory of Didactics, ATD. En Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.) *Networking of theories as a Research Practice in Mathematics Education.* (67-84), Suiza: Springer

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En Bosch, . (Eds.) *Un panorama de la TAD*. (77-116), Barcelona: Centre de Recerca Matemática.

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics, 95*(1), 39–52

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Vázquez, R., Romo-Vázquez, A., Trigueros, M., and Romo-Vázquez, R. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática, 28*(2), 31-57.

Detecting and sharing praxeologies in solving interconnecting problems: some observations from teacher education viewpoint

Margo Kondratieva

Faculty of Education and Department of Mathematics and Statistics,

Memorial University, Canada

Abstract. This paper discusses praxeologies available at different levels of schooling in view of a problem, which permits multiple solutions ranging from elementary to more advanced mathematical approaches. Solutions of the problem produced by mixed groups of K-12 teachers included numerical, pictorial and algebraic methods, and allowed observing possible paths within a finalized activity of study and research. They also gave some insights regarding teachers' readiness to support the continuity of students' praxeological development, and more generally, the potential within teachers' educational backgrounds to pursue the new paradigm of questioning the world.

Résumé. Ce texte discute les praxéologies disponibles à différents niveaux de la scolarité pour résoudre un problème qui permet des résolutions multiples, depuis des approches élémentaires aux plus avancées. Les résolutions proposées par un groupe mixte d'enseignants de l'école élémentaire jusqu'au lycée ont employé des méthodes numériques, graphiques et algébriques, et permettent d'observer les parcours possibles d'une activité finalisée d'étude et de recherche. Elles nous laissent aussi percevoir la capacité des enseignants pour soutenir la continuité du développement praxéologique des élèves, et plus généralement le potentiel résultant de la formation des enseignants à poursuivre le nouveau paradigme du questionnement du monde.

Resumen. Este texto discute las praxeologías disponibles en diferentes niveles de la escolaridad para resolver un problema que permite múltiples soluciones, desde enfoques más elementales hasta los más avanzados. Las resoluciones propuestas por un grupo mixto de profesores de primaria hasta bachillerato utilizan métodos numéricos, gráficos y algebraicos, y permite observar los posibles recorridos de una actividad de estudio e investigación. Nos dejan también entrever la capacidad de los profesores por mantener la continuidad en el desarrollo praxeológico de los alumnos y, más en general, el potencial que les da la formación a los profesores para continuar el nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo.

Liste des éditeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

1. Background.

1.1. The paradigm of questioning the world.

While mathematical content is present at all levels of education, mathematics "suffers cultural rejection" and the majority of "people flee away from the subject as long as they no longer obliged to do it." (Chevallard, 2012) Yves Chevallard proposed that the cause of this phenomenon is the dominance of the didactic paradigm of "visiting monuments", where curriculum is defined in terms of work O that students need to study, while they often have little motivation to do so, particularly when they see no relevance of mathematics to real life and no connections within the subject. He put forward the new paradigm of "questioning the world", in which the work O, (and mathematical *praxeologies*, consisting of *praxis* blocks Π and *logos* blocks Λ, that is, theory justifying related practices Π), is studied in the consequence of inquiring into some deliberately selected questions Q. These questions produce motivation for the learner and thus generate *activities* and even *programs of study and research* within which their individual *study and research path* is not defined and not known ahead of time.

Chevallard (2011) distinguishes between *open* and *finalized* programs of study and research. In the latter case the questions Q are selected in order to give students an opportunity to meet specific mathematical *praxeologies,* still leaving some freedom for the choice of possible study paths. While the idea of using guiding questions is not foreign for teaching of mathematics, Chevallard (2012) warns that "in too many cases, the so-called inquiry-based teaching resort to some form of 'fake inquiries', most often because the generating questions Q of such inquiry is but a naïve trick to get students to meet and study work O, that the teacher will have determined in advance".

For the open programs of study and research, neither answers nor methods are known in advance. This vision requires of students "to be receptive towards yet unanswered questions", "be ready to study from scratch" and have "the capacity to locate resources and the knowledge necessary to take advantage of them". Since the studies may not be limited to a single domain of human knowledge, the following question is essential for the learning of mathematics: "What are the mathematics of the matter?"

Depending on mathematical background, available mathematical praxeologies and the degree of creativity of the inquirer, the answer to the above question could be attempted at different levels of sophistication and by various means including explicit observation, physical experimentations, pictorial, algebraic or pure logical reasoning. Several ideas may contribute to the answer and thus produce meaningful connections, including the ones within mathematics itself.

Consistent with the idea of gradual mathematics curriculum development, there exist different praxeologies within different educational institutions such as primary, secondary and tertiary schools. In principle, each level of education prepares the learner for the following one, however the links and relationships between them sometimes are not as obvious. For example, praxeologies that are present at the primary level are not necessarily a subset of the ones found at the university level, while the processes of explicit observation and physical experimentation occur at the levels beyond the elementary one. Despite the theoretical existence of links between different educational institutions, teachers practicing at just one level may forget about various connections with both previous and forthcoming material. This concern about connectivity of the subject in its teaching in view of students' praxeological development, could be addressed particularly by the approach presented in the next section.

1.2. Problems with multiple solutions and interconnecting problems.

If what Chevallard (2012) called 'fake inquiry', defines the work that needs to be studied with fake or no motivation at all, 'real inquiry' naturally allows several passages to come to an answer. In this respect problems with multiple solution paths could be viewed as a proper didactic tool for training students. Indeed, any solution defines the work O that students could meet during their activity of study and research with the view that there exist a broader work O' for a given problem and thus work $O \subset O'$ has a potential to be extended. Observing learners involved in a finalized activity that allows multiple solution paths might give an insight of what potentially could happen in an open program of study and research.

The value of tasks that allow multiple solutions has been recognized in mathematics education (Leikin & Levav-Waynberg, 2008; Sun & Chan, 2009). Inspired by other works on multiple solution tasks and own practices, Kondratieva (2011) proposed to consider a special class of such tasks, namely, interconnecting problems. The latter are defined as problems that obeys the following conditions: (1) allow a simple formulation; (2) allow various solutions at both elementary and advanced levels; (3) may be solved by various mathematical tools from different mathematical branches, which leads to finding multiple solutions, and (4) can be used in different grades and courses and understood in various contexts.

Within *problems to solve* that call to find an answer, *problems to prove* the answer, play a special role because many aspects of proofs such as “explanation, exploration, justification of conjectures and definitions, empirical reasoning, diagrammatic reasoning, and heuristic devices” (Hanna & De Villiers, 2012, p. 3) are in the core of mathematical thinking. Proofs essentially constitute the logos that corresponds to mathematical practices. The ability of students to prove is a developing skill “beginning with the perceptions, actions and reflections”, and building on “physical, spatial and symbolic aspects of mathematics” eventually enabling the learner to possess “more sophisticated thinkable concepts that have a rich knowledge structure” (Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva & Cheng, 2012, p. 45). Consequently, theoretical part of praxeologies develops along with students’ engagement in more sophisticated practices from proper reflection on them and the desire to “know why”, converging finally to logical necessity of certain conclusions.

Interconnecting proving problems may be used as means to identify and compare praxeologies specific to different grade level, including verbal, visual, empirical, generic, inductive, symbolic and deductive reasoning. Influenced by daily practice, primary and secondary teachers might have distinct views on the appropriate ways and means of mathematical argumentation (Lin, Yang, Lo, Tsamir, Tirosh, Stylianides, 2012). Teachers dealing with very young students use little symbolism and may be reluctant to accept other modes of argumentation (Simon & Blume, 1996). In contrast, secondary teachers often reject verbal and visual proofs as being invalid (Biza, Nardi & Zahariades, 2009) as they believe that all proofs must be formal algebraic (Dreyfus, 2000).

The goal of this paper is to discuss praxeologies available at different levels of schooling in view an interconnecting problem that was offered to K-12 teachers, and get some insight regarding their readiness to question the world.

2. Data Collection and Findings

Since 2007 I had been teaching a graduate course at Memorial University (Canada), designed for in-service K-12 teachers and focusing on mathematical thinking (Mason, Burton & Stacey, 1982). One assignment is to discuss given interconnecting problem in groups. Participants are required to construct at least 3 different solutions at various levels of sophistication. The instructor produces a summary of all solutions and a whole class discussion follows aiming at re-connection of different areas of mathematics in terms of the problem in hands. Randomly formed groups combine primary and secondary teachers registered for the course. I hypothesized that the mixed group discussions would allow the participants to learn from and reflect on each other's praxeologies and beliefs (Kondratieva, 2013).

The following is an example of an interconnecting problem: Fred runs half the way and walks the other half. Frank runs for half the time and walks for the other half. They both run or walk at the same speed. Who finishes first? Explain your answer (Mason et al, 1982).

The data was collected in five different years. The class size varied from 12 to 18 students. Participants' on-line discussions, final solutions and individual journals have been analyzed. The types of solutions proposed by teachers varied from numerical examples and actual experimenting with walking and running to various graphical representations, algebraic and pure logical derivations. A possible scenario within one mixed group of top students consisted from the following stages: (1) answering the question using concrete numerical values; drawing corresponding graphs, reasoning with them and agreeing upon the answer; (2) expressing concerns about the validity of these methods to reach the conclusion and introducing a partly algebraic approach; (3) searching for algebraic expressions for total time in each case; comparing two expressions for time; (4) claiming that the algebraic approach is "the most certain but least human" and calling for logical/structural reasoning.

Some groups' study paths contained an evidence of connections between the secondary school approaches (algebraic, graphical, logical) and primary level activities (experimental and numerical), however, this required presence in the group of a good student familiar with secondary school practices and a good student with similar knowledge of the primary level. Some groups focused on concrete approaches (see Solution 1 below), treating examples with different sets of values for the length of race and speeds of running and walking as being different solutions. On the other hand, some groups of secondary teachers (10-12 grades) had hard time to go beyond an algebraic approach (Solution 2) and saw little value in looking at concrete numerical situations or their visual representations.

3. Praxeologies available at different levels of schooling

3.1. Analysis of two typical solutions and related praxeologies

Let us take a look at the two most typical solutions proposed by the teachers.

Solution 1. Consider the following example. Let the speed of the running be 4 miles per hour and the speed of the walking be 2 miles per hour. Let Frank run for 2 hours and walk for 2 hours. The total distance he covers in 4 hours is $4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$ miles. Then the time, that Fred needs to cover the same distance, is $\frac{6}{4} + \frac{6}{2} = 4.5$ hours. Thus, Frank finishes first.

Solution 2. Let d be the length of the race and $v_1 \neq v_2$ be the speeds of running and of walking respectively. Since Fred moves with each of the speeds an equal amount of distance, $\frac{d}{2}$, we have $v_1 t_1 = v_2 t_2 = \frac{d}{2}$, and so his total time of walking and running is $t_1 + t_2 = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) =$

$\frac{d}{2}\left(\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}\right)$. Let Frank move with each of the different speeds an equal amount of time, t. Then we have $v_1 t + v_2 t = d$, so his total time is $2t = \frac{2d}{v_1+v_2}$. To compare the times we look at the ratio $\frac{t_1+t_2}{2t} = \frac{(v_1+v_2)^2}{4v_1 v_2}$. One can observe that $(v_1+v_2)^2 - 4v_1 v_2 = (v_1 - v_2)^2 > 0$, and so $\frac{t_1+t_2}{2t} > 1$, that is the time of Frank is always less than the time of Fred.

Let us single out theoretical elements available at each level and related to the above solutions. At the Elementary (pre-algebraic) level, the theory required in this problem consists in defining (constant) speed as a ratio of the distance to the time spent to cover this distance (given as numerical values). This requires attention to the units of measurements: if *du* is a distance unit (e.g. km or mile) and *tu* is a time unit (e.g. hour, minute, second) then the speed will be measured in the compound unit *su=du/tu*. Rearranging numbers is the definition of speed, we see that the distance is a product of speed and time, and time is a ratio of distance and speed. Solution 1 gives an example of reasoning with concrete values. From the mathematical point of view, students perform arithmetic operations with numbers and justify their actions referring to facts such as "division is the inverse operation to multiplication".

This concrete reasoning may be supplemented by a picture (see Figure 1), where speed of each sportsman is plotted as a function of time. Here we have another theoretical element at the pre-algebraic level: if one side of a rectangle is equal to a constant speed and another side is equal to the time traveled with such speed then the distance travelled is represented as the area of this rectangle. The length of a race travelled with two different speeds is represented by the area of two rectangles.

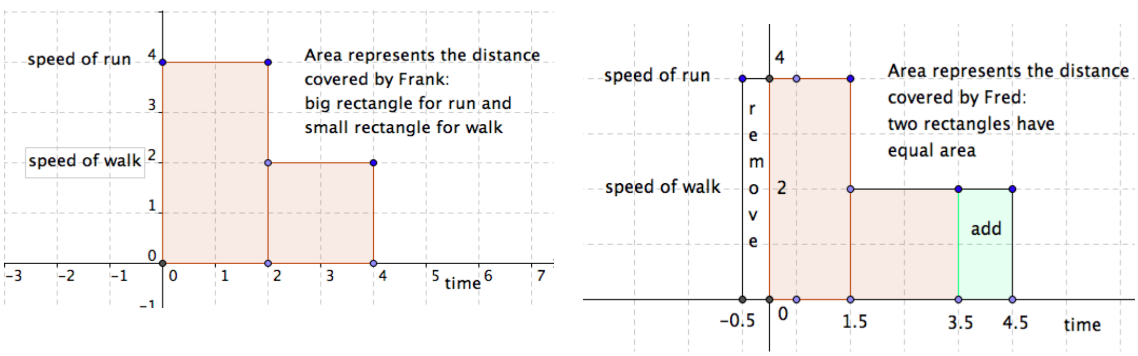


Figure 1. Speed as a function of time for Frank's and Fred's courses.

In our problem, rectangles representing Franks' journey have equal width (along the time axis), while rectangles representing Fred's journey have equal area. The following observation is an attempt to generalize the situation available at the elementary level: Assuming that the running speed is greater that the walking speed, the rectangle which represents running will always be taller than the rectangle that represents walking. Since in Frank's case both rectangles have the same width, the taller rectangle will always be bigger (Fig 1, left). When we redistribute the area from the bigger rectangle to the smaller one (in Frank's case) to make the areas of the two rectangles equal (in Fred's case) the width of the part that we remove is always smaller than that of the part we add, so the time of Fred will always increase compare to the time of Frank (Fig 1, right).

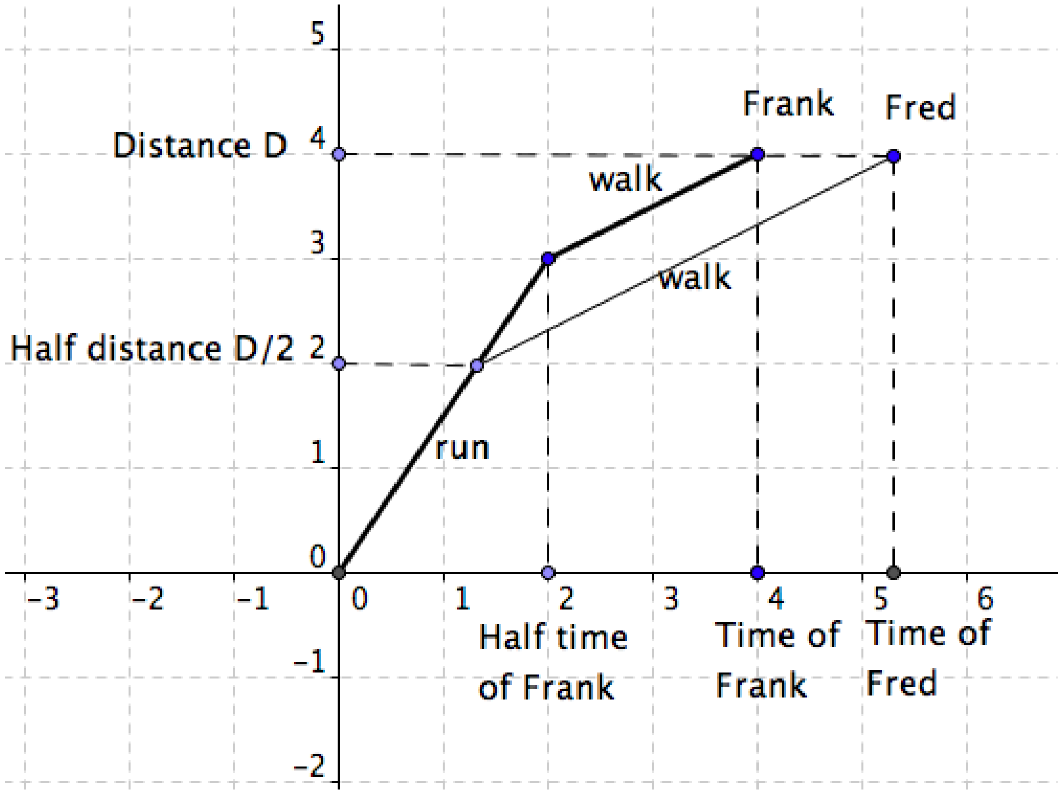


Figure 2. Distance as a function of time for Frank's and Fred's courses.

Figure 2 utilizes another theoretical component and its geometrical representation: For a constant speed, the graph of the distance as a function of time is a straight line with the slope equal to the speed. This pictorial representation again illustrates the fact that Frank finishes first. These graphical approaches along with logical attempts to generalize concrete numerical situations lead to the following structural insight: “Frank runs for *over half* of the course, while Fred only a half. Since Frank runs a further distance than Fred, he will finish the race first.” We conclude that working with concrete numbers even at the elementary level may lead to solutions that fully justify the answer.

At the secondary (algebraic) level, working with concrete numbers no longer suffice for the theory, which now consists in algebraic manipulations of formulas. At this level working with concrete numbers rather belongs to students’ praxis, while the algebraic approach is a way to build a theoretical explanations based on this praxis. Solution 2 gives an example of an algebraic approach available at the secondary school level. One surprising discovery can be made by analysing this derivation: Regardless whether the running speed is less than or greater than the walking speed, the answer will be the same.

3.2. The continuity of praxeological development

At the tertiary level, algebraic calculations become the field of praxis, while theory may include the reference to general inequalities such as AM > GM > HM, where AM, GM and HM stand respectively for arithmetic, geometric and harmonic means of a set of ($n \geq 2$) distinct numbers. In this case the problem situation itself could be generalized in the following way. Let d be the total distance. Suppose Fred moves with each of n different speeds an equal amount of distance, $\frac{d}{n}$, while Frank moves with each of n different speeds an equal amount of time, t. Then for Fred we have $v_1 t_1 = v_2 t_2 = \cdots = v_n t_n = \frac{d}{n}$, and so his total time is $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{d}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{d}{HM(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$. For Frank we have $v_1 t + v_2 t + \cdots + v_n t = d$, so his total time is $nt = \frac{nd}{v_1 + v_2 + \cdots + v_n} = \frac{d}{AM(v_1, v_2, \ldots, v_n)}$. Now, since for distinct numbers $v_1, v_2, \ldots, v_n$, the harmonic mean $HM(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ is always less than arithmetic mean $AM(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, we conclude that Frank is finishing first.

We summarize praxeologies available at each level in the following table:

Level / Praxeologies	Primary/elementary (Pre-algebraic)	Secondary (Algebraic)	Tertiary (Analytic)
Praxis	Physical action; specific arithmetic and pictures.	Specific and generic arithmetic and pictures.	Symbolic calculations, use of algebraic rules, equations and inequalities.
Logos	Generic arithmetic and pictures.	Symbolic calculations, use of algebraic rules, equations and inequalities.	General analysis of equations and inequalities; axiomatic approach.
Development of	sense of generic structure.	symbolism.	formalism.

Table 1. The continuity of praxeological development.

The last line in Table 1 indicates the major direction of praxeological development. Observe that what may count as an explanation (theoretical element) at a lower level becomes part of students' praxis at the next level. Thus, at the elementary level, generic arithmetic and figures may "explain" the results obtained in any concrete case if the students start to see more general structure of many concrete examples. Note that some algebraic formulas (in our case, from basic kinematics, i.e. $d = vt, v = d/t, t = d/v$) may appear even at the elementary level, and students use them to make explicit calculations while sensing their more generic structure. Then at the secondary level, these generic arithmetic calculations become a part of the praxis that at its tern is "explained" by symbolic calculations and the use of algebraic rules. At the tertiary level, algebraic calculations become a part of practical tools, and then the theory involves elements of analysis, in particular, the study of more general inequalities. We suggest that the continuity of praxeological development described above, in addition to an advance from punctual to local, regional and global praxeologies (Chevallard, 1999), could be critical for students' grasp (with understanding!) of mathematics.

3.3. Some observations with implications for teacher education

In order for teachers to support a continuing development of their students they need to be familiar with the range of praxeologies at least at the level adjacent to the level of their primary expertise (as a part of their horizon knowledge). Based on my observations, this was not always the case in the first place, and moreover, the teachers did not always possess a sufficient understanding of this need. However, when they collaborated on solving interconnecting problems in mixed groups, it was often evident that an exchange of different praxeologies occurred.

Note that pictorial and structural explanations discussed above are available at any of the three levels and may provide a common ground for the group discussion and lead to some interesting discoveries such as geometric interpretation of the AM-HM inequality (due to the fact that Figure 1 basically represents the algebraic Solution 2, which is a particular case of the method discussed for the tertiary level and involves this classical inequality). However, pictorial approach was not a popular solution, and if it occurred, many teachers stopped short of generalizing beyond concrete examples (e.g. of working with 'generic' units of measurement), confirming that people often tend to substitute empirical arguments for proofs (Lin et al, 2012).

Further, teachers were not always strong in generalizing their solutions, which perhaps was a consequence of some 'defective' praxeologies that focus mostly on the praxis component at their grade level, such as, working with numbers without seeing more general algebraic and/or structural pattern, or working with formulas without observing their relations to other representations.

My data illustrate that indeed a good question (such as a problem with multiple solution paths) in principle allows students to reason using tools of their own choice and employ mathematics in order to explain their answer. Being typical for a research setting, this behaviour is not common for school mathematics where the focus is on learning specific techniques to solve certain types of problems rather than on finding and justifying one's own solutions, let alone comparing and generalizing them or arriving to new questions. An exposure to the inquiry paradigm triggered the following teacher's revelation:

> I think that the beauty in problem solving is that there are so many ways a problem can be solved. It is evident in our different approaches that we may be teaching math at different levels which I feel will enhance our learning experiences. This is how problem solving should be happening in our classrooms: in collaboration not in isolation.

However, it remains to be seen what percentage of mathematics teachers really welcomes this opportunity to "question the world", and if their existing praxeologies are developed enough to meet this challenge. If teachers' justification deficiencies show up so clearly in this finalized version of inquiry, their success seems to be problematic in case of open programs of study and research.

References

Biza, I., Nardi, E, Zahariades, T. (2009). Do images disprove but do not prove? Teachers' believes about visualization. In Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., DeVilliers, M. (Eds.), *Proc. of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 59-64). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-226.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81–108). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2012) Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. 12th Int. congress of math education. Seoul, Korea.

Dreyfus, T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians. In Gagatsis, A. (Ed.), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 11-25). Nicosia: The University of Cyprus.

Hanna, G., DeVilliers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. In Hanna, G., DeVilliers, M. (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI study* (pp. 1-12). Springer.

Kondratieva, M. (2011). The promise of interconnecting problems for enriching students' experiences in mathematics. *Montana Mathematics Enthusiast*, 8 (1-2), 355-382.

Kondratieva, M. (2013). Changing teachers’ beliefs in the process of collective production of proofs. In Lindmeier, A. M., Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 91). Kiel, Germany: PME.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers’ knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 8(3), 233-251.

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lo, J.-J., Tsamir, P., Tirosh, D., Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. In Hanna, G., DeVilliers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*. *The 19th ICMI study* (pp. 327-346). Springer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. London: Addison Wesley.

Simon, M.A., Blume G.W. (1996). Justification in mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 3-31.

Sun, X., Chan, K., (2009). Regenerate the proving experiences: an attempt for improvement original theorem proof construction of student teachers by using spiral variation curriculum. In Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., DeVilliers, M. (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 172-177). National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

Tall, D. O., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive development of proof. In Hanna, G., DeVilliers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study* (pp. 13-50). Springer.

Modelización e indagación en la propuesta de un REI codisciplinar de matemáticas e historia

Gemma Sala
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona, España

Berta Barquero
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona, España

Vicenç Font
Facultad de Educación, Universidad de Barcelona, España

Abstract. This paper starts from the discussion of the notions of inquiry and modelling and in which sense these constructs are questioned and integrated into the *paradigm of questioning the world* and, in particular, through the proposal of the *study and research paths* (SRP). In particular, we focus on underlying the epistemological and pedagogical models that inquiry-based and modelling approaches offer and how they can be understood in the framework of the anthropological theory of didactics. We particularly focus on analysing the case of a codisciplinary SRP linking mathematics and history, which has been experienced at the Secondary school level, to show how inquiry and modelling appear as two inseparable processes in the construction of mathematical-historical codisciplinary knowledge.

Resumen. Este trabajo parte de la discusión de las nociones de indagación y de modelización y en qué sentido estos constructos son cuestionados e integrados en el paradigma de *cuestionamiento del mundo* y, en particular, a través de la propuesta de los *recorridos de estudio e investigación* (REI). En particular, discutiremos los modelos epistemológicos y pedagógicos subyacentes que las propuestas de modelización e indagación ofrecen y cómo estos pueden ser reformulados en el ámbito de investigación de la teoría antropológica de lo didáctico. Nos centraremos entonces en analizar el caso de un REI codisciplinar de matemáticas e historia, que ha sido experimentado a nivel de Secundaria, para mostrar cómo indagación y modelización aparecen como dos actividades indisociable en la construcción del conocimiento codisciplinar matemático-histórico.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Introducción

En este trabajo nos centramos en discutir y caracterizar las nociones de indagación y modelización en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, en adelante). Partiremos de distintas investigaciones que se han centrado en proponer modelos analíticos y descriptivos de las actividades escolares de indagación y modelización, para mostrar cómo es necesario proponer un *modelo epistemológico y didáctico integrado* de indagación y modelización cuando nos situamos en el *paradigma pedagógico del cuestionamiento del mundo* y, en particular, a través del diseño, experimentación y análisis de la propuesta de los *recorrido de estudio e investigación* (REI).

Como afirman Michèle Artigue y Morten Blomhøj (2013) en su trabajo sobre la conceptualización de Educación Matemática basada en Indagación (IBME), dependiendo del enfoque en que nos situemos hay distintas conceptualizaciones de qué es la indagación y cómo esta conceptualización se incluye en las actividades de enseñanza. En particular subrayan que, dada la importancia de ligar la enseñanza basada en indagación con situaciones reales, enfoques como los propuestos desde el ámbito de la modelización son de especial interés, ya conducen a una valiosa comprensión de la indagación como un proceso más general con diferentes realizaciones particulares en diferentes disciplinas y contextos (contacto con la realidad extra-matemática, procesos de matematización como vehículo de construcción conceptual o de modelos, procesos de construcción de modelos matemáticos explícitos, entre otros). También destacan el paralelismo entre los modelos descriptivos y analíticos de ambos procesos:

> The modelling process can be described a cycling process where reflections along the process can leads to changes in previous sub-processes and thereby initiate new loops in the modelling cycle. The similarity with the diagram [referring to Harlem (2012, p.5) and Blomhøj (2004, p.148)] is striking. Working with modelling in mathematics and in other subjects can thereby lead to valuable understanding of inquiry as a more general process with different particular realization in different disciplines (Artigue y Blomhøj, 2013, p. 805)

En este trabajo se destaca también que las herramientas y propuestas concretas de la TAD ofrecen un marco especialmente acorde para la IBME (*Inquiry-Based Mathematics Education*). En particular, a través de la propuesta de los *recorridos de estudio e investigación* (REI) como modelos didácticos en un paradigma de cuestionamiento del mundo (Chevallard 2015), permite dar un papel primordial a ambos procesos: *modelización* e *indagación.* En el marco de la propuesta de los REI, las matemáticas pasan (en términos generales) a ser interpretadas como herramientas de modelización esenciales en el estudio de cuestiones y producción de respuestas e indagación y, por su parte, una de las dialécticas esenciales que pretende abarcar es la de la indagación con el estudio.

En este trabajo, nos proponemos discutir cómo se interpretan los procesos de modelización e indagación dentro del marco de la TAD, es decir, construir un modelo epistemológico de referencia desde el cual describir y analizar dichos procesos. Nuestra hipótesis principal de partida es que este trabajo nos permitirá:

> (1) poner de manifiesto los distintos puntos de contacto entre ambos procesos y (2) mostrar la necesidad de construir un modelo descriptivo y analítico común que dar sentido e integrar modelización e indagación dentro de un paradigma mucho más amplio.

De esta manera, se podrán analizar prácticas educativas desde una perspectiva holística, que integre indagación y modelización, que permita determinar de qué manera ambos ciclos, además de ser indisociables, se retroalimentan creando distintas condiciones para el desarrollo óptimo de un REI. Para mostrar dicha complementariedad, nos centraremos en analizar el caso de un REI codisciplinar de matemáticas e historia, que ha sido experimentado a nivel de Secundaria, para mostrar cómo indagación y modelización aparecen como dos actividades inseparables en la construcción del conocimiento codisciplinar matemático-histórico. Terminaremos por destacar los aportes esenciales de la articulación indagación y modelización en la dinámica del REI codisciplinar analizado que creemos pueden ser más extrapolables,

2. Indagación y modelización en la propuesta de los REI

2.1. La modelización matemática en la TAD y su papel en los REI

En trabajos anteriores (García, Gascón, Ruíz-Higueras & Bosch 2006, Barquero, Bosch & Gascón 2013) se caracteriza el modelo epistemológico de referencia sobre la modelización matemática, tal como se concibe en la TAD, y que aparece generalizando la noción clásica del "ciclo de modelización" tal como lo proponen, por ejemplo, Morten Blomhøj (2004) (ver figura 1). En términos generales, consideraremos los procesos de modelización como *procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente*. Este proceso parte de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y que constituyen la "razón de ser" de las organizaciones matemáticas que va a ser necesario (re)construir a modo de respuesta. Más concretamente, podemos destacar tres características esenciales sobre la concepción de la modelización que van a ser desarrolladas en los próximas secciones:

(1) Los sistemas y modelos tienen una estructura praxeológica (en el mismo sentido que Floriane Wozniak (2012) define como *praxeologías de modelización*),

(2) Los procesos de modelización se pueden describir como una secuencia de cuestiones y respuestas que describen (a) la propia estructura de un ciclo de modelización y (b) las posibles conexiones entre praxeologías. Por ello, vamos a encontrar su descripción en el próximo apartado en estos términos.

(3) La actividad de modelización aparece como un proceso *continuo* y recursivo que puede representarse como una estructura articulada de cuestiones y respuestas o de praxeologías de modelización de complejidad creciente.

Como señalan Berta Barquero, Marianna Bosch y Josep Gascón (2011), los REI aparecen como un dispositivo didáctico privilegiado para dar cabida a la actividad de modelización en la enseñanza actual de las matemáticas. La modelización matemática tiene un papel esencial en este proceso por varios motivos. En primer lugar, la producción de "respuestas provisionales" a la cuestión inicial C_0 (punto de partida de un

REI) requiere la construcción de modelos, su utilización y el cuestionamiento de su ámbito de validez, generando así nuevas cuestiones que, a su vez, requieren un nuevo proceso de modelización. Durante la evolución de un REI el cuestionamiento de estas respuestas provisionales que se van obteniendo se incorpora en todo momento a la actividad de modelización. Este cuestionamiento es el *motor* del proceso de modelización y, por lo tanto, de la estructura arborescente y articulada de los REI. En segundo lugar, los REI permiten explicitar, institucionalizar y evaluar el proceso global de modelización. Esto es posible dado que el proceso de estudio generado por los REI tiene cierta continuidad en el tiempo, logrando superar la atomización y aislamiento tradicional del estudio escolar de las matemáticas.

2.2. Propuesta de modelo analítico sobre la indagación

Recientemente, el proceso de indagación es descrito por Wynne Harlen (2012) en el marco del proyecto Fibonacci como un proceso cíclico, como lo es el proceso de modelización, de construcción de comprensión mediante la recopilación de pruebas para probar las posibles explicaciones y las ideas tras ellas de una manera científica. Son destacables las similitudes que existen entre ambos procesos —el de indagación y el de modelización.

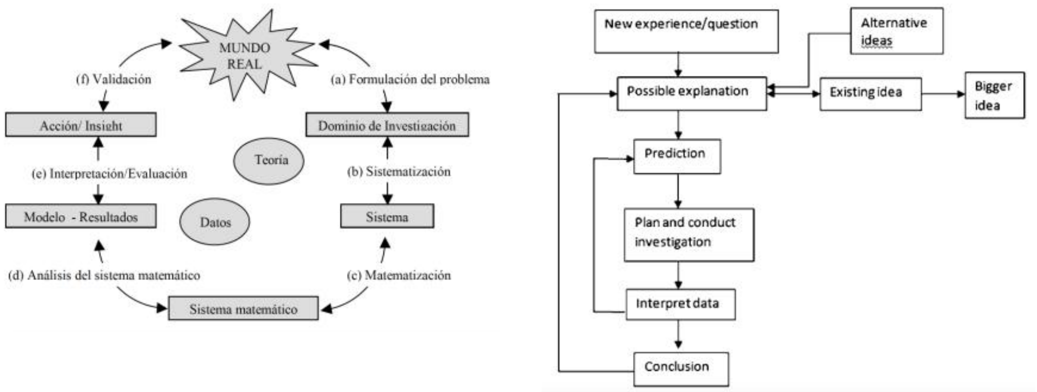


Figura 1. Descripción de proceso de modelización matemática (Blomhoj, 2004, p. 148) [derecha] y del de indagación (Harlen, 2012, p. 5) [izquierda]

En el trabajo de Gemma Sala (2016) se caracteriza la competencia de indagación a partir de su descomposición en distintos subprocesos que componen un proceso completo de indagación: (1) problematizar; (2)

buscar posibles respuestas; (3) formulación de hipótesis; (4) planificar; (5) recoger, clasificar, elaborar, interpretar datos; (6) validar resultados; (7) comunicar resultados y dar respuesta a la pregunta. En este trabajo se utiliza esta caracterización para evaluar en qué grado el alumnado desarrolla las habilidades necesarias para llevar a cabo estos subprocesos en la implementación de ciertas secuencias didácticas basadas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la indagación en diversos contextos socio-culturales. En todas estas secuencias didácticas la modelización matemática aparece como un elemento central, inextricablemente ligado al proceso de indagación, que permite hallar respuestas a la situación problemática. A partir de esta caracterización se ha elaborado un esquema para definir de manera gráfica el proceso cíclico de la indagación, como se puede observar en la figura 2.

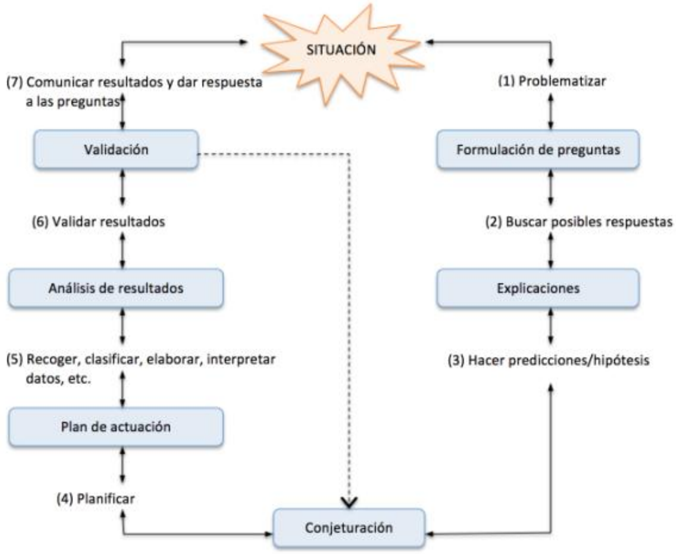


Figura 2. Descripción del proceso de indagación Sala (2016, p. 67)

En las próximas secciones vamos a centrarnos en analizar el caso de un REI codisciplinar entre historia y matemáticas para mostrar la descripción paralela, aunque complementaria, en términos de modelización (en el sentido de la TAD) y en términos de indagación. Esto nos llevará a constantemente referirnos a los elementos centrales que describen la dinámica de un REI. Nos proponemos mostrar, en conclusión, hasta qué punto ambos procesos se articulan, cómo y cuando, para generar una dinámica rica de los elementos herbartianos base de un REI (Chevallard, 2011).

3. Análisis de un REI codisciplinar bajo el prisma del modelo integral de indagación y modelización

La propuesta didáctica que nos centramos en analizar parte de una situación arqueológica real basada en el descubrimiento de unas ruinas romanas en el centro de Badalona —una ciudad muy cerca de Barcelona, Catalunya— por el equipo de arqueólogos del Museo de Badalona, hace algunos años. La cuestión inicial que se plantea es sobre *¿qué esconden estas ruinas?*[1] (C_0). Investigaciones arqueológicas iniciales (Padrós & Moranta, 2001) explican que estas ruinas podrían corresponder a un antiguo edificio perteneciente a la ciudad clásica *Baetulo* —el nombre romano de Badalona. El problema real que inició la indagación fue averiguar a que tipo de edificio público podrían corresponder estas ruinas romanas descubiertas. Su implementación se realizó al finalizar el curso 2014-15 con un grupo de 30 estudiantes de primero de la ESO (12-14 años) en un instituto concertado de Badalona (Catalunya, España) (Sala, 2016). Desde el inicio, el proyecto se presentó como codisciplinar entre matemáticas e historia, por ello en la experimentación participaron conjuntamente los profesores de matemáticas e historia, junto a la primera autora de este trabajo que actuó de diseñadora y observadora. Los estudiantes, desde el inicio organizados en equipos de investigación de 3 personas, fueron guiados al desarrollo de un proceso completo de indagación que se estructuró en las fases siguientes caracterizadas por las siguientes cuestiones:

Fases previstas	*Cuestiones propuestas*
Formulación de las primeras cuestiones derivadas y conjeturas respuesta a C_0	C_1: ¿A qué clase de edificio romano (teatro, circo, anfiteatro, etc.) pueden corresponder las ruinas (especialmente el fragmento de muro curvilíneo)? ¿Qué primeras hipótesis podemos formular sobre de qué tipo de edificio se trata?
Definición de un plan de búsqueda, análisis y validación de hipótesis y respuestas	C_2: ¿Qué patrones de construcción se seguían en la época romana para construir los distintos tipos de edificios?

[1] Los dossiers de trabajo sobre "¿Qué esconden estas ruinas?" están disponibles en el blog creado para su experimentación: https://ruinesdebaetulo.blogspot.com.es/

Ampliación de sus herramientas de análisis y validación de sus investigaciones	C_3: ¿A qué época corresponde el tipo de edificio que correspondería a las ruinas? ¿Existen cánones de construcción que podamos consultar y simular?

A continuación, vamos a describir el estudio de las distintas fases. Para ello vamos a explicitar la estructura de los pares de cuestiones derivadas y respuestas parciales (C_i, R_i) que caracterizaron las etapas delimitadas, su dinámica dentro de un proceso de modelización e indagación y, los distintos medio-media integrados para hacer evolucionar esta dinámica.

En esta primera fase de la indagación, se inicia con la cuestión C_1 que genera a su vez distintas cuestiones que fueron propuestas por los distintos equipos de investigación y así integradas en sus primeros informes. En esta primera fase se formulan diversas conjeturas (algunas de ellas como explicaciones a preguntas parciales formuladas) que serán validadas en la segunda fase.

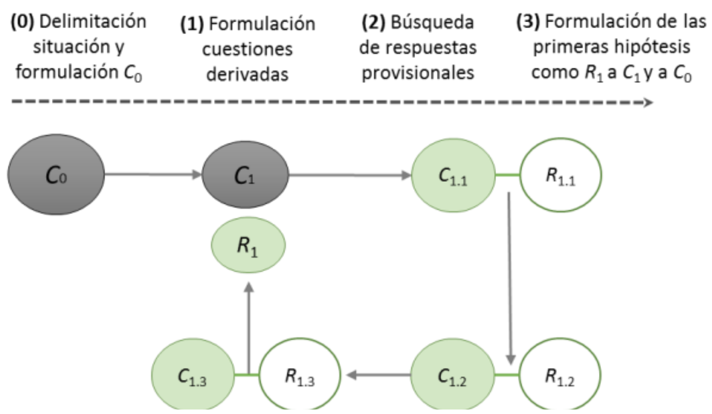


Figura 3. Descripción de la primera fase del REI

$C_{1.1.}$: ¿Qué formas geométricas pueden encajar con la forma del fragmento de muro del edificio descubierto por los arqueólogos (un muro curvilíneo de 1.5 metros de altura)?

$R_{1.1}$: Los estudiantes proponen distintas formas geométricas que pueden encajar con el contorno del muro. Para ello buscan información sobre qué formas tenían todos los tipos de edificios públicos romanos ($\boldsymbol{R_{1.1}}$). Aparecen así las primeras propuestas de modelos geométricos: rectángulos, circunferencias y elipses, que corresponden a las formas más comunes de los edificios romanos.

$C_{1.2.}$:¿Cómo podemos simular y hacer pruebas con las diferentes formas geométricas?

$C_{1.3.}$: ¿Cómo podríamos contrastar las diferentes formas geométricas con la realidad? ¿Qué conclusiones sobre el posible edificio se pueden inferir del análisis de la información de las ruinas, especialmente acerca el muro parcial romano descubierto?

$R_{1.2.}$ y $R_{1.3.}$: Simulación con materiales diversos (cuerdas y palos, yeso, transportador para usar en la pizarra, reglas largas, etc.) de las formas geométricas, con diversos métodos vivenciales, contrastando con la maqueta de medidas reales del muro parcial descubierto en el suelo de una plaza pública al lado de la escuela.

Al finalizar esta primera fase, todos los grupos concluyen que lo más probable es que las ruinas encontradas se correspondan con una circunferencia o a una elipse (R_1), aunque aún no disponen de herramientas de validación suficientes. Así, esta primera fase, termina con la *formulación de las primeras conjeturas* como respuesta a C_0.
La segunda fase gira en torno al estudio de C_2, centrada en proponer qué patrones de construcción se seguían en la época romana y si éstos se corresponden (o no) con las primeras hipótesis realizadas (R_1). En esta fase se solicita a los estudiantes que planifiquen cómo van a proceder y que consensuen la mejor forma de organizar su investigación. Empiezan por proponer la búsqueda en distintos *media* (internet, libros de historia, etc.) de respuestas existentes sobre qué tipo de formas geométricas seguían las construcciones romanas y, en particular, si había algún tipo de edificación romana en forma de circunferencia o elipse. Esto les lleva a recoger, seleccionar y clasificar información histórica y arqueológica susceptible de ser matematizada. En particular queremos destacar aquí dos respuestas que tomaron mucha relevancia, la primera dada por los estudiantes y la segunda introducida por las profesoras guía.

$R^{\diamond}_{2.1}$: Los teatros romanos correspondían a una semicircunferencia; los anfiteatros a una elipse y los circos a un rectángulo con dos semicircunferencias en cada extremo.

$R_{2.2}^{\diamond}$: Canon arquitectónico de *Vitruvius* (arquitecto de la Roma antigua) para la construcción del tipo de edificios identificados de la época (teatro, anfiteatro o circo).

Esta búsqueda de respuestas existentes en distintos medias fue de gran importancia y los estudiantes procedieron a ver si dichas respuestas podían ser incoporadas en su investigación y cómo. Es en estos momentos donde la dialéctica medio-media estás más viva, y en que las profesoras toman decisiones, como por ejemplo, poner a disposición de los distintos equipos de investigación un enlace para consultar una traducción (en facsímil) del libro que describe el canon original de *Vitruvius*, así como, las instrucciones en Geogebra para simular su construcción. De aquí se generaron nuevas cuestiones (ver descripción a continuación de la Figura 4) y, tal como lo interpretamos, llevan a procesos de modelización más complejos donde, a diferencia de la etapa anterior, los modelos matemáticos pueden ser explícitamente formulados, simulados y se hace una primera propuesta de validación de estos ($R_{2.3}$).

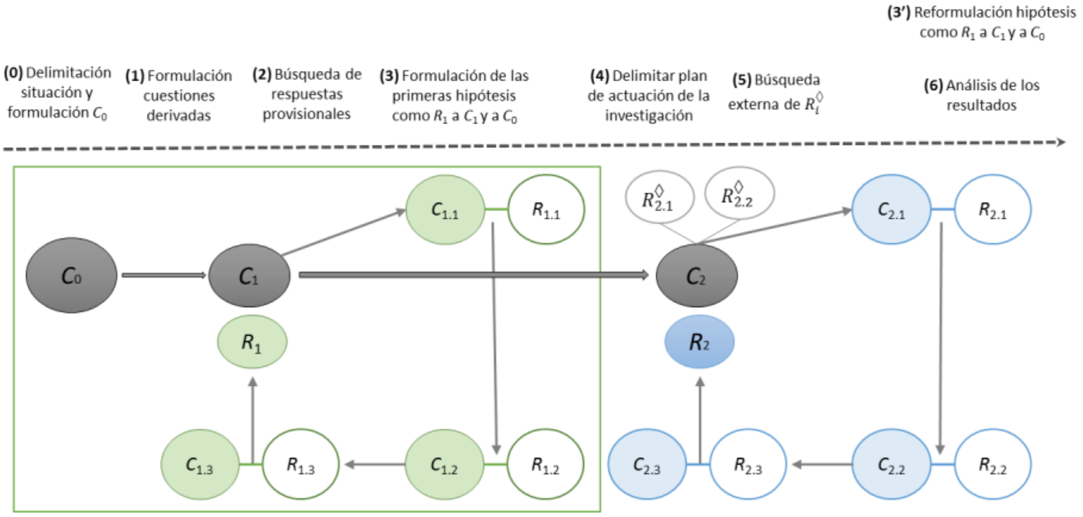


Figura 4. Descripción de la segunda fase del REI

$C_{2.1}$: Si nos basamos en el manual del canon arquitectónico de *Vitruvius* para la construcción de diferentes tipos de edificios públicos, ¿qué modelos geométricos resultan?

$R_{2.1.}$: Construcción y simulación del modelo con Geogebra.

$C_{2.2}$: Siguiendo las instrucciones del canon de *Vitruvius*, ¿qué modelo de edificio que concuerda más con nuestras conjeturas iniciales?

$R_{2.2.}$: Construcción y simulación del modelo con Geogebra.

$C_{2.3}$: ¿El modelo construido encaja de forma adecuada en el plano 2-dimensional de la zona donde se hallaron las ruinas?

$R_{2.3.}$: Contraste del modelo simulado con el plano bi-dimensional de las ruinas. Superposición de la forma geométrica simulada y el plano. Ajuste de los parámetros.

Al finalizar esta segunda fase, los distintos grupos terminan por reformular sus conjeturas sobre el tipo de edificación que parece corresponder a las ruinas encontradas. La mayoría defiende que lo más probable es que las ruinas encontradas correspondan a un teatro. Es importante notar que la R_2 corresponde a una reformulación (o refinamiento) de las primeras conjeturas dadas en R_1, y así los grupos lo plasman en su informe de final de fase. Cada equipo termina por exportar una imagen de su modelo construido con Geogebra que fue trasladada, encajándola en el mapa de la zona. Una vez el modelo fue insertado correctamente tuvieron de comprobar que las medidas y las proporciones, según la escala definida en del mapa, se adecuaban aun a las proporciones de *Vitruvius*, con el objetivo de contrastar y evaluar la validez del modelo usado.

En esta tercera y última fase del proceso de indagación (ver figura 5), cuando los equipos habían propuesto R_2, se les planteó una nueva cuestión C_3 con el objetivo no solo de que surgieran más herramientas de validación de sus respuestas, sino también de cuestionar la validez de los procesos de indagación y modelización seguidos.

C_3: ¿Cómo lo hacen los expertos arqueólogos para confirmar sus hipótesis? ¿Qué técnicas de validación usan para confirmar sus conjeturas?

Esto llevó al grupo-clase a buscar respuestas externas en informes de arqueólogos o técnicas generales arqueológicas. En dicha búsqueda encontraron un artículo del museo de Badalona en el cual el equipo experto narra el proceso arqueológico que siguió y, en particular, cómo confirmaron su sospecha de que se trataba realmente de un teatro ($R^{\diamond}_{3.1}$). Esta consistía en aproximar cuál era la capacidad del teatro y contrastarla con la población total de la localidad. Si dichas aproximaciones no se alejaban demasiado, entonces planeaban dónde realizar una nueva excavación para validar que la edificación seguía la forma supuesta con los valores correctos de los parámetros que la definen.

Con el objetivo de reproducir las mismas técnicas de validación que los expertos, los alumnos plantearon cuestiones de la siguiente naturaleza que les llevaron a nuevos ciclos de modelización e indagación.

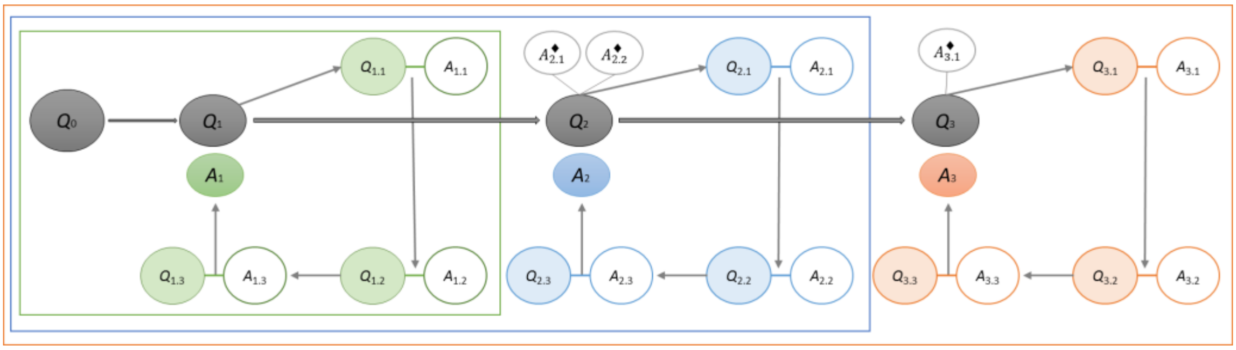


Figura 5. Descripción de la tercera fase del REI

$C_{3.1}$: Si se trataba de un teatro, según las dimensiones reales que se infieren del modelo construido (a escala) y teniendo en cuenta las indicaciones de *Vitruvius* (distancia entre las gradas para el público, disposición de las mismas, etc.) ¿qué capacidad ofrecía el edificio?

$C_{3.2}$: ¿La capacidad calculada era suficiente para albergar las necesidades de la ciudad? ¿Cuántos habitantes tenia *Baetulo*?¿Acudía gente de todas las clases sociales al teatro o solo los adinerados?¿Qué ajuste en los parámetros de nuestro modelo se debe realizar, según estos datos?

$C_{3.3}$: El “nuevo” modelo, por lo que respeta a la capacidad del teatro, ¿es compatible con las necesidades de la ciudad teniendo en consideración la información histórica y los resultados del equipo de expertos del museo? ¿Su situación en el mapa permitiría que fuese más grande?

El trabajo realizado en esta última fase resulta interesante por distintas razones. Incorpora nuevas herramientas de validación de todo el proceso de modelización basadas en la comparación con respuestas y procesos científicos externos realizados por los arqueólogos. Además, al terminar esta fase se programó una entrevista con la responsable del equipo del museo de Badalona que había realizado el descubrimiento, el estudio y la posterior redacción del informe de los expertos. Ella les confirmó algunos de las resultados aproximados por los estudiantes: el teatro tenía más capacidad de la que cabria esperar, teniendo en cuenta la población de *Baetulo* en la época. Seguramente, era visitado por habitantes de las ciudades vecinas. Esto es coherente con su situación dentro del plano de la ciudad, muy cercano a una de las puertas de la antigua muralla, para facilitar la entrada y salida. Finalmente, tras una puesta en común para compartir el trabajo realizado por todos los equipos de investigación, cada equipo confeccionó un informe de la indagación con el objetivo de exponer sus resultados y dar respuesta a las preguntas y a la situación problemática inicial.

4. Algunos aportes de la articulación indagación y modelización en la dinámica de los REI

Sobre la dialéctica de las cuestiones y respuestas (C_i, R_i). Una dimensión esencial en la que la indagación insiste es la de la *problematización* (o formulación de cuestiones). *Per se*, no se trata de una tarea ni responsabilidad fácilmente asumible por los estudiantes, así que a lo largo del REI se fueron habilitado distintos dispositivos donde formular y compartir cuestiones (informes de investigación, puestas en común, etc.). Como diseñadores y responsables de la experimentación queremos notar que pensar cada etapa o fase en términos de un proceso de modelización nos ha ayudado a platear y compartir con los estudiantes un conjunto de cuestiones centrales para avanzar en el proceso de estudio: ¿qué modelos se proponen? ¿cómo se puede trabajar con ellos? ¿cómo se pueden validar?. A medida que avanzaba la experimentación, este conocimiento compartido sobre cómo hablar y analizar los procesos de modelización se convertía en una fuente de formulación de nuevas cuestiones, tanto por nuestra parte como por parte de los propios estudiantes. Por otro lado, queremos destacar la importancia de asumir las respuestas como no definitivas, otorgándoles un estatus de hipótesis reformulables a lo largo de todo el proceso de indagación. Esto lleva a entender las respuestas como respuestas provisionales siempre abiertas a ser cuestionadas y reformuladas. Rompiendo con la visión más estática de la construcción de conocimiento matemático y, en concreto, de la visión simplista de la actividad de modelización como aplicación de conocimientos preestablecidos, sin tener que ser validada, cuestionada o modificada.

Sobre la dialéctica de los medios-media e la dialéctica indagación-estudio. Hemos destacado en distintas ocasiones la importancia de las distintas etapas de búsqueda, recogida y análisis de datos en medios externos. Aunque podemos decir que esto corresponde a la búsqueda de $R_j^\diamond$, no se insiste explícitamente en la necesidad de que estas obras externas sean cuestionadas, deconstruidas y reconstruidas de acuerdo con las necesidades del proyecto iniciado. En el análisis presentado vemos que es en estos momentos cuando la construcción de las praxeologías de modelización toma un rol esencial. Se heredan respuestas (modelos previos existentes) y se cuestiona bajo qué hipótesis se construyen, qué variables se escogen, qué modelos resultan, se simulan, se contrastan, etc. Iniciar procesos de modelización es en estos momentos esencial para poder cuestionar la validez de estas respuestas pre-existentes e integrarlas dentro del medio didáctico de los estudiantes. Buen ejemplo de ello son los del ciclo de modelización vivido alrededor de C_2.

Referencias

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquirí-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*, 797-810.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of modelling at university level. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 33*(3), 307-338.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling-a theory for practice. In B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp.145-160). Gothenburg: NCM, Gothenburg University.

Bosch, M. & Winsløw, C. (2016). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 35(3), 357-401.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon.

http://yves.chevallard.free.fr /spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à réfonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En C. Margolinas, M. Abboud- Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.) (pp.81-108) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In S.J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Dordrecht: Springer.

García, F., Gascón, J., Ruíz-Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 38* (3), 226-246.

Harlen, W. (2012). Inquiry in science education. In S. Borda Carulla (Eds.), *Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school*. http://www.fibonacci-project.eu

Padrós, P. & Moranta, L. (2001). La ciutat i la memòria: el teatre romà de Baetulo. Carrer dels Arbres, *3a època, 12*, 15-31.

Sala, G. (2016). *Competència d'Indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària* (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona, España. Accesible en: http://www.tdx.cat/handle/10803/388035

Research and study paths at the university: a praxeological model of reference related to costs calculation

Diana Patricia Salgado

Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur. Argentina

María Rita Otero y Verónica Parra

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Argentina

Abstract. This work fits within a wider research whose general objective is teaching mathematics to non-mathematicians at the university, taking central assumptions of the Anthropological Theory of Didactics. This work proposes a *praxeological model of reference* related to a micro-entrepreneurship costs calculation. The generative question *How to calculate micro-entrepreneurship costs?* links mathematical and economic praxeologies. This model allows to go through a part of the study programme of a university calculus course.

Resumen. Este trabajo se encuadra dentro de una investigación más amplia cuyo objetivo general es enseñar matemática para no matemáticos en la universidad, adoptando presupuestos centrales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se propone un *modelo praxeológico de referencia* sobre el cálculo de costos de un micro-emprendimiento. La pregunta generatriz *¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento?* involucra praxeologías matemáticas y económicas. Este modelo permite cubrir una parte del programa de estudios de un curso de Cálculo del nivel universitario.

Résumé. Ce travail fait partie d’une recherche plus large dont l’objectif général est l’enseignement des mathématiques pour non mathématiciens à l’université dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique. On propose un *modèle praxéologique de référence* sur le calcul de coûts d’une micro-entreprise. La question génératrice est *Comment calculer les coûts dans une micro-entreprise?* Elle associe plusieurs organisations mathématiques et économiques. Ce modèle permet de couvrir une partie du programme d’études d’un cours de Calculus du niveau universitaire.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introduction

This work is part of a didactic research developed at university level, in a mathematics course corresponding to Enterprise Administration and Public Accountancy. The institution is a public Argentine university, Universidad Nacional del Sur (UNS), with a departmental organization, so that mathematics courses of all majors are lectured exclusively by the Mathematics Department. Also, the courses are developed in a four-month form and particularly the mathematics ones have a theory-practice modality.

Mathematics teaching characteristics at UNS satisfy the conditions that the ATD describes as *visits to works*; i.e., the sense loss of the studied mathematics and the immediate oblivion are confirmed. One of the objectives of the didactic research that is being realised refers to the analysis of the possibility conditions to deal with this phenomenon at least locally, taking the developments of the ATD such as the notions of research and study paths (RSP) and praxeological model of reference (PMR).

The RSP proposed begins with a question related to economy: *How to calculate micro-entrepreneurship costs?* It would be possible through this RSP not only to study different institutional culture works, but also to produce the emergence of other researches. One of our specific objectives is to detect which these “works” are and which of them are linked to the proposed curriculum.

In this PMR the mathematical and economic organizations giving answer to the generative and derived questions are presented. Particularly, the RSP would allow rebuilding mathematical organizations related to two-variable Calculus and an important part of the institutional proposed curriculum. Also, it would be possible to manage the involved organizations integration.

2. Previous Researches

Different Calculus teaching researches are related to the didactical phenomenon of mathematical content disconnection, rigidity and atomization of mathematical organizations (Trigueros, 2005; Lucas, 2015). At university level and from ATD point of view, some investigations propose an inquiry based calculus teaching (Barquero, 2009; Serrano, Bosch & Gascón, 2007).

Costa, Arlego and Otero (2013) design and implement a teaching by RSP in the context of an Engineering Faculty in Argentina. Recovering the vectorial calculus sense and *raisons d'être* was attempted in this path, integrating physic notions. The path permitted the approach to mathematical organizations included in the institutional curriculum.

On the other hand, M.R. Otero et al. (2013) promote and analyse the possibility conditions of a teaching in the sense proposed by the ATD at university level.

The PMR proposed in this work shows different paths in a teaching by RSP, in a regular math course at university level, integrating two-variable Calculus and Economy notions. Some results obtained in the RSP implemented can be found in Salgado, Otero and Parra (2017).

3. Theoretical framework

The reference knowledge analysis involved in a Research and Study Path (RSP) is an action the didactic researcher must be able to realise. This knowledge integrates the praxeological model of reference (PMR) (Chevallard, 2013) consisting in an always provisory and open analysis of the organizations or praxeologies of one or more disciplines the researcher would meet, or meet again, studying a question Q. What he must know or give himself the liberty to learn about Q is not identified with what a professor knows or with the way he would answer Q. On the contrary, the researcher must adopt a precognitive posture, "ask the world" in which he is situated.

A PMR elaboration importance lies in its utility as a tool of didactic and praxeological analysis. Following up on the praxeological analysis implies formulating didactics questions as: Where does this "work" come from? Why is it there? How has it been learned by the institution? Which transformations has it suffered? On the other hand, all didactic analysis implies considering how is the praxeology pretended to teach so that it leads to identify the structure and the studied work functioning (Lucas, 2015).

4. Study programme at the reference institution

The proposed RSP pretends to go through the contents of the first year subject Matemática IIC (MIIC), second four-month period, in the degree of Enterprise Administration and Public Accountancy at the UNS. This subject study programme is divided in four modules:

1. Sequences and series
2. Lineal equations system. Matrix Algebra
3. Functions of several variables
4. Extremes of several-variable functions. Linear Programming.

The main objective of MIIC is to acquire notions related to the more-than-one variable functions analysis, placing an emphasis in its application to administration and economic concrete problems. The programme is developed in two theoretical and two practical weekly classes of two hours each. The evaluation modality includes the approval of partial exams and a final one.

5. Praxeological model of reference related to costs calculation

5.1. Generative question analysis

The PMR described in this work allows us to delimit and analyse the possible research and study paths that arise from the question Q_0*: How to calculate micro-entrepreneurship costs?* We will see that the elaboration of a possible answer to Q_0 results in the study of different mathematical and economic organizations, for example, a mathematical organization (MO) related to differential Calculus and other economic one (EO) linked to costs calculation.

The starting question Q_0 allows the emergence of multiple economic questions as, for example, What is micro-entrepreneurship about?, Which are the generated costs?, Which is the purpose of doing a cost calculation?, among others.

A first questioning belongs to the notion of micro-entrepreneurship. If its definition and central characteristics are looked up in the Internet, one can find statements such as: micro-entrepreneurship is an earning generating company owned and run by its own entrepreneurs, who work at these companies, in general, without employees. It is an individual or family project requiring very low capital investment.

The notion of micro-entrepreneurship is associated to the idea of micro-credits, born in Bangladesh in the 70's when the economist Muhammad Yunus gave economic aid to a group of poor women to carry out a small business. This initiative led to the foundation of a social bank orientated to the poorest so they could go out of their misery.

A second questioning comes from the notion "costs", understood as all the money needed to produce and commercialise products. Not everything that is an expense represents a cost. An important part corresponds to the necessary capital in order that the micro-enterprise could work. The capital is the value of what is possessed, whereas the cost is the value of what the company uses to generate a product.

Finally, the questioning about "why" a costs calculation must be done is very important for the micro-entrepreneur. In general, a costs study and calculation are needed to fix sale prices. Most enterprises fix their prices, principally and exclusively, taking into account costs, but also costs determination is elementary for decision making because it allows: business results and marginal contribution determination, level of competitiveness evaluation, etc.

5.2. Possible answers to the generative question

The first stage in the construction of an answer to Q_0 refers to the different hypotheses analysis that will determine, for example, the variables of the system. De Renolfi and Cardona (2007) affirm that different alternatives require the application of different types of costs, it does not exist an only one cost but different ones for different purposes. These authors consider that different hypotheses related to costs calculation exist; namely, H_1: costs behaviour following an independent variable, H_2: costs relation to the possible product allocation, H_3: calculation extension, H_4: costs considering the relationship to the moment of the calculation and H_5: the relationship to the decision making. Taking into account the above-mentioned hypotheses, different costs considering each one are described below:

H_1: costs behaviour following an independent variable. This hypothesis is considered when the system to model refers to an enterprise whose objective is to fix the article sale price, to cover the minimal cost. Under H_1, the cost depends on one or more independent variables, for instance, production, level of activity, supplies, etc. In this case, costs are classified as fixed (FC) and variable (VC) costs. As a consequence, the total cost is the addition of both: C=FC+VC, which represents a first answer to Q_0. A fixed cost is that whose amount is constant, whatever the value of the independent variable. This doesn't mean that it is invariable in the long-term; for example, rent, insurances, etc. A variable cost is the one modified in relation to the independent variable value; for example, raw material, direct manpower, etc.

H_2: Considering costs relation to the possible product allocation, costs are classified as direct and indirect. Direct ones are those identified in every produced article, either in its physical aspect, or in its value. They are produced when the activity is carried out; for example, supplies, manpower related to the activity, etc. Indirect costs are those related indirectly to the articles. They are produced independently of the realization or not of a certain activity; for example, taxes, fuel expenses, etc. In this case, the cost (C) is given by the addition of the direct (DC) and indirect (IC) costs: C=DC+IC, which represents a second answer to Q_0.

H_3: considering the calculation extension, costs are classified as total and partial. Total ones are those involved in the totality of a certain activity, while partial ones are those referring to a specific aspect of the activity. In this case, the cost (C) is given by the addition of the total (TC) and partial (PC) costs: C=TC+PC, which represents a third answer to Q_0.

H_4: considering the relationship to the moment of the calculation, costs are classified as real and estimated. Real costs also called historical or retrospective, are those in which the enterprise incurred in the past. They are used to evaluate past actions and to control the management of the enterprise. Estimated costs, also called future or prospective, are those that could happen in a future situation.

H_5: considering the relation to the decision making, costs are classified as marginal, incremental, relevant and opportunity costs. Marginal costs are those required to increase the production in a unit. Incremental costs refer to how much the cost was raised on having increased the activity at a certain level. Relevant costs are those that have a special opportunity for every decision making. Finally, opportunity costs refer to the value of the rent that might be obtained if the resource was used in its better alternative.

The unitary cost is not included in this classification. It represents the production cost of an article and it is important to fix the sale price. However, searching the Internet how to calculate the costs of a micro-entrepreneurship, principally the fixed, variable, total and unitary costs, are mentioned.

5.3. Construction of two models

After realising a costs analysis, the micro-entrepreneur performs a calculation of total production costs; he puts up all data in tables - considering hypotheses H_1 to H_5, or even a combination of them- and performs simple arithmetic operations to answer Q_0, by adding the registered information. This leads to consider both an MO related to arithmetic operations and an EO referred to costs according each hypothesis.

Supposing that one wants to calculate the total costs, it is necessary to determine the fixed and variable costs. Whereas the fixed ones can be calculated monthly, the variable ones, by produced unit. Table 1 shows a list of costs if only one product is manufactured:

Fixed	**per month**	**Variable**	**per unit**
Gas	F1	Materials	V1
Electricity	F2	Labels	V2
Rent	F3	Package	V3
Taxes	F4		
Fixed Costs per month	FC=F1+F2+F3	Total Variable Costs	VC=V1+V2+V3

Table 1: Costs in the manufacturing of an article

The total fixed monthly costs FC emerges from the addition of all fixed costs. The total variable costs per unit VC is the addition of the different manufacturing expenses. If x is the number of manufactured products in a month, the total cost is $C = FC + VC.x$, with FC, VC positive real numbers.

If on the other hand, two articles are manufactured, variable costs are calculated per unit (see Table 2).

Fixed	**Per month**	**Variables**		**Per unit**	**total per unit**
Gas	F1	Art.	Materials	V11	VC1=V11+V12+V13
Electricity	F2	1	Labels	V12	
Rent	F3		Package	V13	
Taxes	F4				
		Art.	Materials	V21	VC2=V21+V22+V23
		2	Labels	V22	
			Package	V23	
Fixed Costs	FC=F1+F2+F3+F4				

Table 2: Costs in the manufacture of two articles

The fixed monthly cost FC emerges from the addition of all fixed costs. VC1 and VC2 are the variable costs to manufacture articles 1 and 2, respectively. If x and y are the number of articles 1 and 2 manufactured in a month, respectively, the total cost is given by $C = FC + VC1.x + VC2.y$, with FC, $VC1, VC2$ positive real numbers.

5.4. Derived questions from Q_0: answers according to the models

The search of an answer to Q_0 originates more questions, such as:

Q_1: How many articles can one make with a certain amount?

Q_2: Which is the marginal cost?

Q_3: How does the total cost change considering a modification in the variable costs?

Q_4: Which are the maximum and the minimum cost?

In order to answer Q_1 to Q_4, it is necessary to answer Q_5: How do we reply to each of Q_1 to Q_4?

Considering a numerical model, where the micro-entrepreneur performs a regular register of the costs, one can deduce conclusions from these data in tables; such as, estimating short term costs, calculating marginal costs, analysing the cost variation, determining how many articles can one manufacture with a certain budget, etc. From specific data, estimations or exact calculation will possibly be done in order to answer Q_1 to Q_4, among other questions.

Considering a functional algebraic model, if the micro-entrepreneurship, for example, is engaged in the production of two articles, the model $C = FC + VC1.x + VC2.y$, with FC, $VC1, VC2$ positive real numbers, can be written as:

$$C(x, y) = c_1 x + c_2 y + FC,$$

with FC representing fixed costs, c_1, c_2 variable ones, and $C(x, y)$ cost function with variables x and y. It will be showed that this model also allows us to answer Q_1 to Q_4.

Up to here, two possible paths are observed. They allow to find answers not only to the generative question, but also to the derived ones.

Considering the functional algebraic model, one can answer Q_1. Supposing a certain amount of money for expenses, the answer will indicate which the production with this budget is.

If one has an amount of K monetary units to carry out the project and to use it completely, one models this situation by the equation $C(x, y) = K$, which represents a level curve of the surface whose equation is $z = C(x, y)$. The curve corresponds to a set of points in the XY plane for which $z = K$, with K a positive constant. From an economic point of view, this is an *isocost curve* (Mochón and Beker, 2003). Every point (x, y) belonging to it brings a production level for which the cost is constant. In this way, this analysis that answer Q_1 allows to get into an EO related to Costs and an MO referred to two-variable Calculus and Analytic Geometry in the plane.

With regards to Q_2: *which is the marginal cost?*, this means: how much the cost varies given an increase in the production in one unit? In the case of the functional algebraic model in two variables considered here, the question can be reformulated as: *Given a fixed number of manufactured articles of one type, how does the cost change if an increase in the number of manufactured units of the other type happens?*

The rate of change of a variable in relation to another, here, how does *C* change for an increment of *x* or of *y*, requires to get into the "work" of derivative. In this way, given the function $z = C(x, y)$, one can answer

Q$_2$ by taking partial derivatives: $\frac{\partial C}{\partial x}$ and $\frac{\partial C}{\partial y}$, which calculated in a point (x_0, y_0), represent the approximated change of *C* for each unit increase in *x (y)* keeping *y (x)* fixed, which are called marginal costs.

For example, $\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, y_0)$ represents the approximated change of C for each unit increase in *x*, keeping *y* fixed, at the moment in which the production level is $x = x_0$ and $y = y_0$.

The question *Q*$_3$: *How does the total cost change considering a modification in the variable costs?* states that c_1 and c_2 change. If c_1 and c_2 depend on the production, for example, $c_1 = f(x)$ and $c_2 = g(y)$, $C(x, y) = f(x).x + g(y).y + FC$, then the approximated changes of C are given by: $\frac{\partial C}{\partial x} = f'(x)x + f(x) = c_1'(x)x + c_1$ and $\frac{\partial C}{\partial y} = g'(y)y + g(y) = c_2'(y)y + c_2$.

In this way, answering *Q*$_2$ and *Q*$_3$, one gets into an EO related to Costs, specifically Marginal costs, and an MO referred to two-variable Differential Calculus.

Finally, considering the functional algebraic model, an answer to *Q*$_4$: *Which are the maximum and the minimum cost?* can be found studying an MO referred to two-variable Differential Calculus.

The search of an answer to *Q*$_4$ can generate more questions: How to calculate maximum (minimum) cost?, What techniques to employ?, What constraints do the variables have, if any? These questions are solved using techniques to find relative or absolute extremes of cost function $C(x, y)$. If there are constrains, one employ techniques of constrained optimization. In this case, the variables take positive values, then, one has at least the constraints: $x \geq 0, y \geq 0$.

Another possible constraint is that of fixing the production in *a* units which leads to search for the extremes of $C(x, y)$ restrained to the constraint $x + y = a$, with a positive integer, or the constraint could be an inequality $x + y \leq a$, if the production is up to *a* units. One can use techniques of extremes calculation to solve this kind of problems, for example, the method of the Lagrange multipliers -constraints given by one or more equalities- or techniques of linear programming -linear constraints, given by inequalities and linear cost function-.

It is easily seen that considering the functional algebraic model the search of answers to questions Q_2 to Q_5, leads to the study of an MO referred to two-variable Differential Calculus, which includes dealing with functions of two variables, the calculation of partial derivatives and extremes. The generative and derived questions are shown in Figure 1, as well as the possible organizations to rebuild in the RSP.

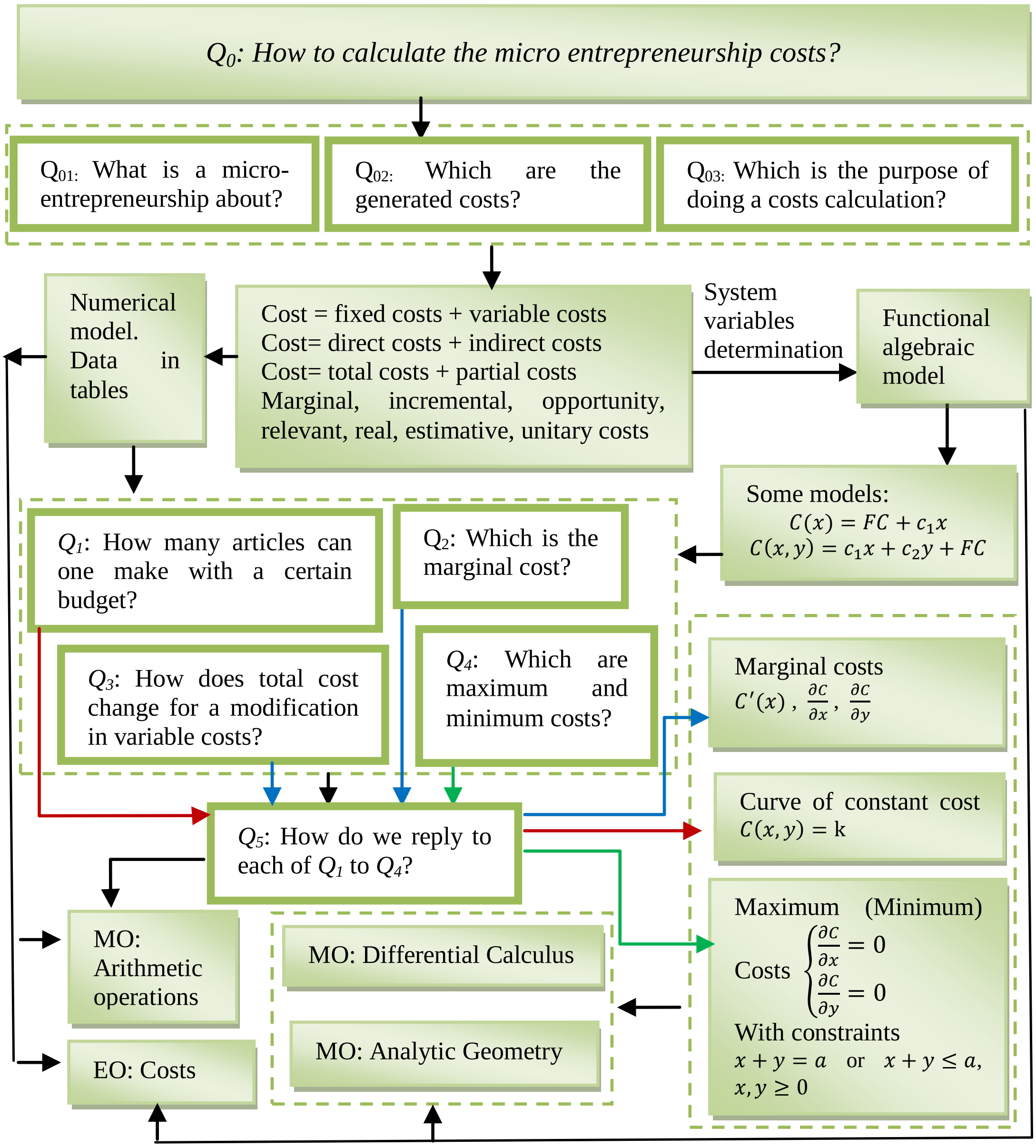


Figure 1: Generative and derived questions. Possible MO and EO to rebuild in the SRP

6. Discussion

This PMR shows that Q_0 is open and generates multiple questions that can result in the study and research of mathematical and economic organizations.

Firstly, two possible paths are observed in order to search an answer to Q_0, one path using a numerical model and another, a functional algebraic one. In the first one, adequate costs are considered according to the micro-entrepreneur objectives, which leads to meet an EO related to Costs and an MO referred to arithmetical operations. In the second one, the variable number determination will imply the one or more variable functions study. Therefore, to answer the derived questions, for instance, one will get into the MO study related to two-variable differential Calculus. Another possible path is to consider firstly the numerical model and then to decide to take the functional model.

In the mathematics university level course where the RSP is performed, Q_0 would allow, at least, rejoining an MO relative to two-variable Calculus and an EO referred to Costs. The answers to questions Q_0 to Q_5, using the functional algebraic model, could lead to the study of an MO related to two-variable differential Calculus, which are part of modules 3 and 4 of MIIC programme study. In this way, it would be possible to go over the institutional proposed curriculum using a different pedagogy.

7. Conclusions

In this work we have presented a PMR belonging to an RSP related to a micro-entrepreneurship costs calculation. Possible paths are detected; namely the one using a numerical model and functional algebraic one. Besides, it is shown that these paths would allow going through a part of the reference institutional proposed curriculum.

References

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Chevallard, Y. (2013). *Analyses praxéologiques: esquisse d'un exemple*. IUFM Toulouse, Francia. http://yves.chevallard.free.fr

Costa, V., Arlego, M. & Otero, M. R. (2013). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 7(14), 20-40.

De Renolfi, M. C. & Cardona, G. (2007). *Costos forestales* (Serie didáctica Nº 30). Universidad Nacional de Santiago del Estero. Argentina.

Lucas, C. (2015). Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional (Tesis Doctoral). Universidad de Vigo.

Mochón, F. & Beker, V. (2003). *Economía: principios y aplicaciones*. Buenos Aires: McGraw Hill Interamericana.

Otero, M. R., Fanaro, M.A., Corica, A.R., Llanos, V.C., Sureda P. & Parra, V. (2013). *Teoría antropológica de lo Didáctico en el aula de matemática*. Tandil, Buenos Aires: Dunken.

Salgado, D., Otero, M.R. & Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional*, 56(1), 84-108.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas. Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. *Actas del II Congreso Internacional sobre la TAD*. Francia. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/25-Serrano_Bosch_Gascon_congres_TAD_2.pdf

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-31.

What knowledge do in-service teachers need to create SRPs?

Britta Eyrich Jessen

Department of Science Education, University of Copenhagen, Denmark

Klaus Rasmussen

University College Metropol, Denmark

Abstract. In this paper we present ideas regarding what elements of the anthropological theory of didactics in-service teachers need to design study and research paths and realise them in their classrooms. Based on preliminary experiences from other projects we try to identify crucial notions and how they can be transposed in order to support Danish in-service teachers, who has very diverse didactical knowledge.

Résumé

Dans cet article, nous présentons des idées sur les éléments de la théorie anthropologique du didactique en cours qui ont besoin pour concevoir des parcours d'étude et de recherche et les réaliser. Sur la base des expériences préliminaires d'autres projets, nous essayons d'identifier les notions cruciales et comment elles peuvent être transposées afin de soutenir les enseignants danois, qui possède des savoir faire didactiques très diverses.

Resumen

En este artículo presentamos ideas sobre qué elementos de la teoría antropológica de lo didáctico los profesores necesitan para diseñar recorrido de estudio e investigación y realizarlos. Sobre la base de experiencias preliminares de otros proyectos, tratamos de identificar nociones cruciales y cómo se pueden transponer con el fin de apoyar a los profesores daneses, que tiene un conocimiento didáctico muy diverso.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

1. Introduction

During the last 10 years emphasis has been put on inquiry based teaching methods in mathematics and science education. In this paper we will discuss how Study and Research Paths (SRP) can support in-service teachers engagement in realising inquiry based teaching in their own classrooms.

A report by Rocard and colleagues (2007) concluded that much teaching in science and mathematics in Europe was taught as transmission of knowledge, even though the disciplines encompass a dimension of inquiry as one way to knowledge construction. Therefore, it was suggested that teaching should reflect the inquiry approach as well. EU has funded several projects to promote this. One of those projects was Primas, which offered a guide for professional development providers. It argued that teachers have difficulties changing the teaching paradigm if no further structures of action research are offered to support this change (Primas, 2013). But change to what? Artigue and Blomhøj (2013) have made an effort to conceptualise what is meant by inquiry based teaching in mathematics. They argue that the inquiry approach to mathematics is part of how to do mathematics, referring to Polya (1945) and his characteristic of problem solving processes. From a generic perspective Dewey (1938) have promoted an approach to teaching, which was based on students own actions. Artigue and Blomhøj list a number of theoretical approaches to the teaching of mathematics capturing those ideas; including ATD and SRP.

Throughout the last decade SRPs have been realized at different levels of school systems in several countries. These realizations have often been developed and conducted by researchers in their own classrooms (e.g. Barquero, Bosch and Gascón, 2013; Florensa, Bosch and Gascón, 2016 and Otaki, Miyakawa and Hamanaka, 2016). But also constraints and conditions for the implementation of SRPs have been studied (Barquero et al., 2013; Barquero, Bosch and Romo, 2015; Rasmussen, 2016). Rasmussen (2016) and Barquero et al. (2015) both study challenges of engaging pre-service and in-service teachers respectively in SRP based teaching. However, the presented experiments often draw on ATD theory in great detail, something which is not always realistic for in-service teachers to engage in, having no interest in particular didactic research and only limited time available. This leads to the research question of this paper:

What didactic transposition of ATD notions is needed to engage in-service teachers in creating and realising SRP based teaching?

In this paper, we will consider what notions, tools and concepts are needed for the average teachers to engage in SRP-based teaching. Do they need to be able to create praxeological analyses to design and realize a SRP? Is the idea of and dynamics in a question-answer map sufficient for the teachers to navigate in this kind of teaching? We will discuss and present our considerations during the design process of a course for in-service teachers having very different educational backgrounds and didactical knowledge. We focus on teachers of secondary education, but we regard the considerations as having wider generality when disseminating ATD knowledge to teachers of all age-levels.

2. Theory and background

Study and research Paths (SRP) is the design tool for teaching proposed by ATD, initially as a way to design cross disciplinary student work, which was a new requirement in French Secondary school (Chevallard, 2004). Furthermore, SRP is a way to realise the teaching paradigm of "questioning the world", which is an ATD alternative to transmission of knowledge. Chevallard (2015) argues that learners should develop a questioning attitude to the world:

> "[…] this receptive attitude towards yet unanswered questions and unsolved problem, which is normally the scientist's attitude in his field of research and should become the citizen's attitude in every domain of activity." (Chevallard, 2015, p. 177).

This attitude can be said to capture elements of the inquiry process which Rocard and colleagues (2007) suggested to be the point of reference of teaching. A SRP is initiated by a generating question, Q_0, posed by the teacher, which in turn lead students to pose derived questions, $Q_{i,j}$, addressing elements of the original question they need to explore further.

The generating question, Q_0, should be formulated so students understand the question, but the answer requires that students engage in study and research processes. The study process is when students study media to acquire knowledge regarding a certain topic. Media can be textbooks, webpages, online video, data materials or other resources from which students draw knowledge. The research process is when students gather the new and already acquired knowledge in the development of partial answers to the generating questions. These processes has been characterised as the de- and reconstruction of knowledge (Barquero et al., 2013, p. 334) and describes the essential idea of learning processes in a SRP. Students are expected to continue questioning the knowledge at stake leading to further derived questions. Those questions and their relations can be depicted in tree diagrams as figure 1.

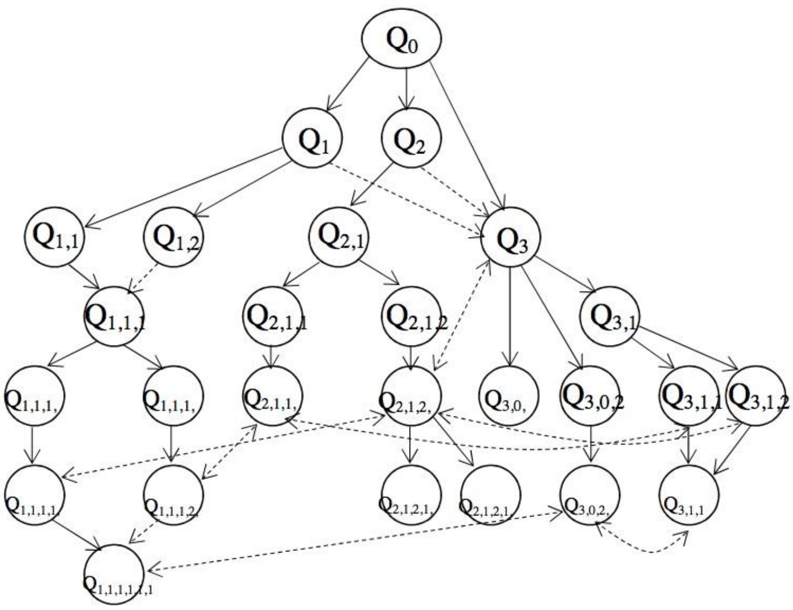


Figure 1: Tree diagram (Jessen, 2017, p. 18)

It is evident that an open generating question might lead to very different answers – even within a particular class having similar prerequisites if no other scaffolding of the study and research process is provided. Different ideas have been experimented such as letting SRP be a workshop that runs parallel with another mathematics course (Barquero et al., 2013), rubrics for formative assessment known by the students (Florensa et al., 2016, side questions posed to the teachers (Rasmussen 2016), teachers poses the first derived questions (Jessen, 2014) and to each Q_0 a list of media was suggested to the students (Jessen, 2017).

Jessen (2017) further experimented with Q_0's aiming at elements from curriculum, called study and research activities (SRA). Chevallard (2004, p. 6) argues that there is a risk of SRA not supporting students' development of the rationale behind the mathematics they use to develop answers to questions. Instead SRA perpetuate the unhelpful transmission of knowledge. However, Barquero, Serrano & Ruiz-Munzón (2016) try to categorise different kinds of SRA ranging from those with no potential of study and research processes to those being small versions of SRP, i.e. a branch of the tree diagram. Jessen (2017, p. 98) argues that SRA have the potential of engaging students in study and research processes if the generating question of each SRA fulfils the criteria of being an open question, that require students to engage in both study and research processes. The potential of the generating questions in this regard can be visualised in an a priori analysis of possible derived questions depicted in a tree diagram showing possible paths and their relations.

Detected challenges regarding the implementation of SRPs might hinder teacher engagement with SRP based teaching. Barquero et al. (2013) discuss the ecology of SRPs at tertiary education. Jessen (2017, p. 156) argues that the back wash effect of exit examinations might hinder its realisation in upper secondary education. Furthermore, teachers' lack of tradition for collaboration regarding their professional development hinders their adaptation to SRP based teaching (Jessen, 2017, p. 182). Otero, Llanos, Parra, and Sureda (2014, p. 24) points out, that students attitude towards mathematics teaching as being something where the teacher pose the questions and they answer, represent another challenge in realising SRP based teaching.

2.1. Who do we want to engage in SRP based teaching?

Secondary education is in Denmark divided between two different institutions and carried out by teachers educated at two separate institutions. Primary and Lower Secondary teachers study at university colleges for 4 years, where they are specifically prepared to become teachers. That is; the whole pre-service education is geared towards them becoming part of the teacher profession. Upper secondary teachers, on the other hand, study two disciplines at universities for 5 years, which do not put them on track for a career as teachers. The upper secondary teachers are expected to study a major and a minor in order to teach both disciplines. During the first year of employment after the master degree the candidates are supposed to complete a practicum; teaching half the time and study learning theories and pedagogy the other half. The practicum part has had minor structural changes through out the years and the theoretical part takes up more time than earlier.

Primary and Lower secondary teachers' education has been through five major reforms during the last 30 years. Consequently teachers currently employed have very different educational prerequisites for carrying out their job. The most senior primary and lower secondary teachers gained quite extensive disciplinary knowledge, but their education had little didactic depth. Teachers more recently educated obtain "only" a fair knowledge of three disciplines but more substantial didactic knowledge is integrated. Teachers of the more recent variety specialize in teaching age groups, grade 1-6 or grade 4-10, while the "older" have formal competence in all age levels. Consequently, the group of teachers we are considering in this paragraph are the ones engaged at teaching grades 7-10, which correspond most closely to lower secondary education.

Given this background, our primary concern is that the average teacher might not have sufficiently depth, command and overview of mathematics and its didactics to be comfortable letting their students embark on the exploratory voyage of SRP.

2.2. What Danish experiences have been accumulated so far?

In the Danish context SRP has been experimented and reported in master theses addressing upper secondary teaching, after being introduced in a master course. Recently, a development project, using ATD theory, and aiming at easing the transition in mathematics from lower to upper secondary education was conducted. (Jessen & Winsløw, 2017). The course introduced in-service lower secondary teachers to SRP as modelling activities. The teachers were provided with two generating questions and asked to try to develop an a priori analysis formed as a mind map, where they used the idea of technique to formulate all possible strategies students would take. Eventually, the teachers were provided with tree diagrams and suggested derived questions relevant for the Q_0's. After the course the teachers should realise the activities in their own classrooms.

The experimentation proved to be difficult because the teachers felt insecure with the openness of the generating questions and wanted to make sure that all students got on "the right path". Hence, they needed further ideas on how to manage the SRP and scaffold the students learning during SRPs. Most teachers ended up altering the design into a less inquiry based method. Similar findings were reported by Barquero, Bosch & Romo (2015, p. 813) regarding an online in-service teacher course on SRP based teaching.

SRPs have also been experimented in pre-service teacher education for lower secondary teacher education within the interdisciplinary ASTE project (Rasmussen, 2016). Nevertheless it has not been a major feature in the overall education, and it remains to be seen whether the now graduated teachers attempt to implement SRP in their own practice. The ASTE students were not taught ATD theory, but course elements were taught through SRPs.

3. Proposal for knowledge to be taught

Barquero, Bosch & Romo (2015) present in-service teachers at their online course for ATD notions as praxeology, mathematical organisations, SRP, tree diagrams, "role play" where teachers imitate students and finally create a lesson plan for the SRP teaching. The activity they engage the participants in, is called SRP-TE – study and research paths for teacher education. Due to the Danish teachers' educational backgrounds we consider this model out of reach for most Danish teachers given the constraints of most in-service courses: limited time and the fact that many expect to receive several "ready to use" teaching proposals from the in-service training. The experience from

Jessen & Winsløw (2017), reported above, made us consider to employ a rather transposed version of the ATD theory.

We have an in-service teachers course for upper secondary teachers at the University of Copenhagen. The course runs from mid August 2017 until mid March 2018. The teachers meet 7 times of 4 hours during the period. There were no requirements with respect to the teachers' didactical prerequisite and we have enrolled 47 teachers with very different backgrounds. One teacher has 20 years work experience from private companies but no teaching experience, another one has an additional university education as mathematics counsellor (see further in Jankvist & Niss, 2016). The aim of the course is to teach the participants how to meet new requirements from the 2017 curriculum for upper secondary mathematics. In the didactical principles, it is stated that parts of the teaching should be inquiry based and compel "students autonomously discovery of 'new' mathematical theorems […] to pose mathematical questions […] that can be answered (solved) by students" (Ministry of Education, 2017, p. 21). Hence, the participants where taught to develop, experiment and evaluate SRP based teaching.

3.1. Transposed knowledge on SRPs

The first two course sessions were devoted to introduce the notions of SRP and SRA as well as a special form of lesson plan.

When introducing SRP and SRA the participants were presented a generating question and the idea of study and research processes. Instead of using the notion of *media*, it was discussed which *resources* could support the study process. The term 'media' is colloquially associated with newspapers, television programs etc. We wanted to emphasise of the wide ATD meaning of *media*. Instead of presenting tree diagrams as results of a priori analyses presenting an epistemological reference model, we posed the following generating question:

> Q_0: Look at the arbitrary triangle with side lengths a, b and c. If the sides are enlarged with a certain amount, how much bigger area will the triangle cover?

The teachers were asked to produce a *mind map* similar to figure 1, which they had been introduced to. They were asked what solution strategies they could find based on their mathematical knowledge and possible resources. Also, they should describe strategies and questions, which they could imagine their students would use:

> ”What does enlargement mean?”, “How can we determine the area of a triangle if we do not know the height?”, “What does $\sin(A)$ mean, if A denotes one of the angles of the initial triangle?”, “What can we say if we look at right angled triangles?” and “What does Heron’s formula tell us?”

These questions were posed as derived questions. The participants created the maps in groups and they were shared and discussed in plenum. After this, the maps were named *knowledge maps* and presented as the main guidance tool for the teachers when realising a SRP. Next, an experimentation with SRA on exponential functions (Jessen, 2017) were undertaken with its *sharing sessions* and *media*. After this the participants were asked to create their own *knowledge map* and plan how to teach linear functions based on the following question:

> Q_0: In a lower secondary class three friends chooses different career paths. One do not wish to attend school anymore, another wants to become a nurse and the last wants to be a upper secondary school teacher. How old are the students when the nurse has had a total income larger than the friend who does not pursue an education? How old are the friends when the teacher has had a total income larger than the others?
>
> Below you find a scheme where you can see years of education and which average annual income it gives rise to.

Years of education	9	12	14	16	18	21
Income (dkr)	210.000	310.000	365.000	370.000	490.000	530.000

Table 1: The relation between years of education and average annual income in Danish currency.

The participants engaged nicely in the development of *knowledge maps* presenting a variety of ideas including strategies using ICT.

However, the tendency of expecting students to develop particular answers from research processes alone made the participants doubt in the viability of the design. They had difficulties imagining how to navigate in the knowledge map: When should they directly answer students' questions? What questions were they "allowed" to answer and which ones should the students answer? If students should be assisted to discover "more than one" paths in the knowledge map, how can the teacher then interact with the students?

At the second course session, some teachers remained insecure with respect to the SRP in linear functions, others had tried it in their own classes before the second session, and with positive experiences. Others had tried to design their own SRPs or SRA. One group had been curios about prerequisites of students coming fresh from lower secondary. Hence they had designed and run a SRA starting from:

> Q_0: If we have a linear function on the form $f(x) = ax + b$, what happens with the graph if we double the coefficient and the constant?

The teachers observed through several different approaches, the students realised that both graphs intersect the x-axis in the same value, though not all could explain why. The teachers thus gained valuable insightof the students prerequisites. This insight was later used in the design of a SRP regarding piecewise linear functions.

3.2. Lesson plans and navigation

Our inspiration for the special form lesson plan stems from Østergaard (2016) who deal with the issue of how to relate the theoretical and the practical part of teacher training at university colleges. The participants of the in-service course were introduced to preparing a plan in which they were to write down information regarding: Where the teaching was planned to be realised, title of the lesson, concrete learning goals, broader goals, students expected prerequisites, Q_0, media suggested to students, additional media which students might find on their own; and a time schedule indicating teacher activities (including questions they might ask the students) and expected students activities (e.i. derived questions, partial answers etc.). As appendices additional work sheets, datatables and the knowledge map should be fashioned. The time schedule was created together with the knowledge map and referred to the map with respect to students' expected strategies and derived questions. In the time schedule a column had to be reserved for observation notes, which should be used during the evaluation and improvement of the lesson.

Filling in the time schedule based on the knowledge map support the teachers' ideas of how to navigate in the classroom without ruining the potentials of the generating question. Based on the knowledge map teachers formulate questions, which can be characterised as generating questions that support the development of a certain path in the map, or the question initiate a particular SRA, if the teacher considers it needed.

At the time of writing, we have no record on the realisation yet. The following course sessions the participants are developing SRPs on the introduction of vectors in two dimensions, probability theory and discrete mathematics according to the Danish curriculum.

4. Concluding remarks

What is worth noticing from the Danish experiences, though they are limited, is that upper secondary teachers relatively fast got the courage to realise SRPs, once the theoretical terminology was downplayed and transposed (c.f. 3.1 and 3.2). On the other hand; lower secondary teachers were somewhat more reluctant, though they had more time and theory introduced (c.f. 2.2).

This suggest that for in-service teachers, who are not accustomed to extensive usage of theoretical notions, we should consider the transposition of ATD notions and language even more.

It is striking how both groups of in-service teachers have focus on the research process and have difficulties in designing and exploiting the study process. This is despite the fact that inquiry based teaching and modelling has been elements of curriculum for both educations for almost a decade. But if we look at the other approaches to inquiry based teaching presented by e.g. Artigue and Blomhøj, the emphasis of the study process is unique for the ATD approach and therefor in-service courses might need to enlighten this aspect in particular.

References

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*, 797-810.

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 809-815).

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 33 (3),* 307-338.

Barquero, B., Serrano, L., & Ruiz-Munzon, N. (2016). *A bridge between inquiry and transmission: The study and research paths at university level*. Paper presented at the First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Montpellier, France. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337885

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr /spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 173-187). Cham: Springer International Publishing

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J. & Mata, M. (2016). SRP design in an elasticity course: the role of mathematical modelling. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the first conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, 191-200. Montpellier.

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2015). A framework for designing a research-based "maths counsellor" teacher programme. *Educational Studies in Mathematics, 90(3),* 259-284.

Jessen, B. E., & Winsløw, C. (2017). Matematikbroen: brobygning for elever gennem efteruddannelse for lærere. *Mona*, *3*, 39-59.

Jessen, B. E. (2017). *Study and Research Paths at Upper Secondary Mathematics Education – a Praxeological and Explorative Study*. PhD thesis, University of Copenhagen.

Jessen, B. E. (2014). How can study and research path contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? *Annales de didactique et des sciences cognitives*, *19*, 199-224.

Ministry of Education. (2017). *Matematik A/B/C, stx - Vejledning*. Copenhagen, Denmark.

Otaki, K., Miyakawa, T. & Hamanaka, H. (2016). Proving activities in inquiries using the internet. In *Procedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Otero, M. R., Llanos, V. C., Parra, V., & Sureda, P. (2014). Pedagogy of research and questioning the world: teaching through research and study paths (rsp) in secondary school. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*, *8(1)*, 7-32.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Primas (2013). *Guide for professional development providers*. Retrieved from: http://www.primas-project.eu/artikel/en/1300/professional-development/view.do

Rasmussen, K. (2016). The direction and autonomy of interdisciplinary study and research paths in teacher education. *Journal of Research in Mathematics Education*, *5(2)*, 158-179.

Rocard, M, Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007). *L'enseignement scientique aujourd'hui: une pédagogie renouvelé pour l'avenir de l'Europe*. Commission Européenne, Direction générale de la recherché, Science, économie et société

Østergaard, K. (2016). *Teori-praksis-problematikken i matematiklæreruddannelse: belyst gennem lektionsstudier*. PhD thesis, Roskilde University. http://forskning.ruc.dk/site/files/5

L’organisation et la gestion de données au cycle 4 : quelles difficultés ?

Anne Crumière et Gisèle Cirade

UMR EFTS, Université Toulouse Jean Jaurès (ESPE), France

Abstract. Teachers’ initial training give many opportunities to uncover difficulties met by practitioners; indeed, those to the which beginners are confronted reveal the general difficulties met in the practice of the craft. Our investigation is focused on the case of data organisation and data management in cycle 4 in France (12-15-year-old students); we consider both mathematical praxeologies and praxeologies for the direction of the study, in order to bring out some of the conditions and constraints that weigh in on the profession. For this sake, we draw on observations realized in the frame of the initial training of mathematics teachers, with the aim to highlight some problems of the profession.

Résumé. Les occasions ne manquent pas, en formation initiale de professeurs, de repérer des difficultés rencontrées par les praticiens ; en effet, celles auxquelles se heurtent les débutants constituent des révélateurs de celles qui sont éprouvées dans l’exercice du métier. Nous centrons ici notre recherche sur le cas de l’organisation et de la gestion des données au cycle 4 (élèves de 12-15 ans), en étudiant à la fois les praxéologies mathématiques et les praxéologies de direction d’étude afin de mettre en évidence certaines des conditions et des contraintes qui pèsent sur la profession. Nous nous appuyons pour cela sur des observations réalisées dans le cadre de la formation initiale des professeurs de mathématiques pour mettre au jour certains problèmes de la profession.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d’enseignant*

Editorial, año

1. Introduction

Le secteur « Organisation et gestion de données » a été introduit dans les programmes du collège dès 1996 (Ministère de l'Éducation nationale, 2004). Reconduit à chaque nouveau programme depuis cette date, il prend de l'ampleur, notamment avec l'introduction de l'échantillonnage, de l'estimation et des intervalles de fluctuation au lycée, tout en ayant pourtant beaucoup de mal à exister en tant que tel. Nous essayons de mettre en évidence dans cette communication certaines des conditions et des contraintes qui pèsent sur la profession concernant l'enseignement de ce secteur au cycle 4. Nous nous appuierons sur des observations réalisées dans le cadre de la formation initiale des professeurs de mathématique.

2. Choix d'un support d'activité d'étude et de recherche

Commençons par examiner ce que dit le programme du cycle 4 à ce sujet. L'introduction du domaine « Organisation et gestions de données, fonctions » indique que, « au cycle 4, les élèves apprennent à utiliser une représentation adaptée de données pour en faire une interprétation critique » (Ministère de l'Éducation nationale, 2015, p. 372), avant de présenter les quatre attendus de fin de cycle. Nous nous arrêterons sur le premier d'entre eux, « Interpréter, représenter et traiter des données » :

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
Interpréter, représenter et traiter des données	
Recueillir des données, les organiser. Lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique. Calculer des effectifs, des fréquences. » Tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes). Calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique. » Indicateurs : moyenne, médiane, étendue.	Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données. Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web. Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs (par exemple, des données mises sur l'environnement numérique de travail par les élèves dans d'autres disciplines) ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées. Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique : résultats d'élections, données de veille sanitaire (par exemple consultations, hospitalisations, mortalité pour la grippe), données financières relatives aux ménages (par exemple impôts, salaires et revenus), données issues de l'étude d'un jeu, d'une œuvre d'art…

Figure 1. Extrait du programme du cycle 4. (p. 373)

On peut dégager divers types de tâches relatifs à cet attendu de fin de cycle en distinguant deux cas, selon que le type de tâches est relatif à des données (recueillir des données, organiser des données, lire des données, calculer des effectifs et des fréquences) ou qu'il est explicitement rattaché à une série statistique (calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion, dans le cas des indicateurs suivants : moyenne, médiane, étendue). On notera que recueillir des données et organiser des données est une reprise d'étude du cycle 3.

2.1. La recherche d'un support d'activité

Après un travail autour de l'organisation mathématique de ce secteur, il a été proposé aux élèves professeurs [1] un atelier sur l'organisation didactique, où les équipes avaient à considérer la consigne suivante [2] :

1. Toutes les observations mentionnées dans cet article ont été réalisées dans le cadre de la formation des élèves professeurs de 2e année à l'ESPE Toulouse Midi-Pyrénées. Les deux auteurs enseignant dans cette formation, l'accès aux observations a été facilité.

2. La promotion est partagée en deux groupes : les « novices » en TAD, ils sont initiés progressivement en début d'année aux notions liées à l'organisation mathématique et les ex-M1, ces étudiants ont suivi une unité d'enseignement de didactique des mathématiques l'année précédente. Une formulation légèrement différente a été proposée au groupe des « novices » , mais les différences sont inessentielles pour ce que nous regardons ici.

« Choisir un énoncé pour démarrer une “activité” permettant de faire émerger dans la classe l’organisation mathématique ponctuelle autour du type de tâches “Déterminer une médiane”. »

Commençons par examiner les trois propositions que nous avons reproduites en annexe (équipes A, B et C). Les énoncés s’appuient sur des situations du monde extramathématique : l’équipe A propose de recueillir les pointures des 29 élèves de la classe, l’équipe B considère le poids de 15 judokas et l’équipe C la taille de 11 vidéos. Mais dans chacun de ces cas, aucune question problématique n’est posée [3], les énoncés sont guidés par un découpage en questions très fermées, les données sont peu nombreuses et les calculs afférents peuvent être réalisés à la main. De plus, ces trois situations ne permettent pas de mettre en avant les raisons d’être de la médiane, qui constitue ici un enjeu *imposé par le professeur* mais non par l’étude d’une question.

De façon générale, peu d’équipes ont suivi les recommandations du programme figurant dans la colonne « Exemples de situations, d’activités et de ressources pour l’élève », que nous reproduisons ici partiellement :

> Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique : résultats d’élections, données de veille sanitaire (par exemple consultations, hospitalisations, mortalité pour la grippe), données financières relatives aux ménages (par exemple impôts, salaires et revenus), données issues de l’étude d’un jeu, d’une œuvre d’art... (p. 373)

On notera que le programme est renforcé par la ressource thématique intitulée « Interpréter, représenter et traiter des données », qui mentionne notamment que « cette partie du programme s’appuie largement sur l’étude de situations authentiques issues de la vie courante, de mesures obtenues dans d’autres disciplines par les élèves eux-mêmes, de données scientifiques ou économiques disponibles sur Internet » (Ministère de l’Éducation nationale, 2016, p. 6). Sur quatorze équipes, seules deux envisagent de se situer dans un tel contexte, en proposant de travailler sur

3. L’équipe B a proposé de déterminer la répartition des combattants en deux poules qui soit la plus équitable possible. Il y a bien une question problématique, mais qui ne correspond pas aux pratiques usuelles dans les compétitions de judo.

les salaires. Mais, dans les deux cas, la situation porte sur une petite entreprise, avec 9 employés dans un cas et 12 dans l'autre. La ressource thématique, quant à elle, renvoie à des données bien plus amples :

Exemple
Source : Salaires dans le secteur privé et les entreprises publiques
Le salaire mensuel net moyen en France en 2013, dans le privé ou en entreprise publique, s'est établi à 2202 euros. Le salaire mensuel net médian pour la même année s'élevait à 1772 euros.

Figure 2. Extrait de la ressource thématique susmentionnée. (p. 5)

Pour terminer, notons sans le commenter ici des remarques récurrentes de la part des équipes pour justifier leur choix de l'énoncé : l'effectif total doit être raisonnable et sa parité a de l'importance.

2.2. Le travail sur un support d'activité

Dans un autre atelier, il a été proposé aux élèves professeurs de mener eux-mêmes une étude statistique à partir de la consigne suivante [4] :

> Quand on dit qu'une commune française n'a pas beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en a combien ? On considérera le fichier Excel disponible sur la page suivante du site de l'INSEE : https://www.insee.fr-/fr/statistiques/2864136 et on utilisera les connaissances statistiques au programme du collège. Le fichier Excel contient des données sur la population des communes françaises.

Au cycle 4, on peut envisager une technique s'appuyant sur le calcul des fréquences cumulées [5]. Un premier geste consiste à classer les communes dans l'ordre croissant ou décroissant de leur population ; compte tenu de la nature de la question, on choisit le tri croissant. Les premières communes qui apparaissent n'ont pas beaucoup d'habitants, mais le problème se pose de savoir où « arrêter le curseur ». On peut alors dénombrer les communes qui ont moins de N habitants, en prenant

4. Dans un premier temps, on leur avait demandé de « préciser comment il faudrait faire pour savoir si une ville de 7000 habitants, c'est une ville qui a beaucoup d'habitants ou une ville qui n'a pas beaucoup d'habitants. »

5. On notera que la ressource thématique susmentionnée indique : « Les notions de fréquences et de fréquences cumulées, de moyenne et de médiane sont introduites dès la classe de 5e, celle d'étendue en classe de 4e, dans des situations qui leur donnent du sens. » (Ministère de l'Éducation nationale, 2016, p. 2)

quelques valeurs de *N*, mais on voit assez vite que travailler avec les effectifs n'est pas très probant : on a par exemple 3391 communes qui ont moins de 100 habitants, mais est-ce peu ou beaucoup ? C'est par rapport au nombre de communes de la France qu'il va falloir se positionner, en calculant la *proportion de communes* qui ont moins de *N* habitants : c'est la notion de fréquence (cumulée) qui apparaît ici pertinente. Il y a 35868 communes, et donc 3391/35868 ≈ 9,5 % des communes qui ont moins de 100 habitants.

On peut aussi regarder quelle *proportion de la population totale* comptent les communes de moins de *N* habitants, toujours en prenant quelques valeurs de *N*. Si, par exemple, on considère les communes de moins de 1000 habitants, on constate qu'elles rassemblent 14 % de la population française tout en représentant 26042/35868 ≈ 73 % des communes françaises. Il faudra considérer les communes de moins de 400 habitants pour constater qu'elles rassemblent 5 % de la population française tout en représentant 16015/35868 ≈ 47 % des communes françaises : on peut convenir que ce sont des petites communes.

Nous reproduisons ci-dessous les propositions de deux équipes, D et E (voir figures 3 et 4). L'équipe D propose une réponse construite, mais qui s'appuie sur deux notions, *moyenne* et *médiane*, permettant uniquement de démarrer l'enquête, avant de mentionner que la détermination des quartiles (et des déciles) permettrait d'« affiner cette réponse ». Le calcul des fréquences cumulées, qui relève du programme du cycle 4 (voir note 5) et s'avère ici très pertinent, n'est pas même mentionné.

Qu'est-ce qu'une commune française qui n'a pas beaucoup d'habitants ?
Pour déterminer d'abord de façon large à quelle moitié (supérieure ou inférieure) appartient une commune (en termes de nombre d'habitants), il convient de commencer par calculer la moyenne et déterminer la médiane de la série statistique. La moyenne est de 1798,4 (à 0,1 près) et la médiane est 437. On peut donc dire qu'en dessous de 437 habitants, la commune fait partie des 50 % de communes ayant le moins d'habitants.
Pour affiner cette réponse, nous pouvons calculer les quartiles. On s'aperçoit au vu des tableaux que le premier quartile vaut : 196. (hors programme explicite du collège mais peut-être introduit à cette occasion, de même que les déciles).
On peut donc dire qu'une ville avec moins de 196 habitants est une petite ville.

Figure 3. Proposition de l'équipe D.

La proposition de l'équipe E est caricaturale : le tableau fournit la liste des indicateurs (de position et de dispersion) que semblent connaître les membres de l'équipe. Notons tout de même que la dernière ligne donne la fréquence des villes de plus de 7 000 habitants (mais rien n'est mentionné sur l'obtention de ce résultat).

Moyenne (population)	1789	
Mediane	437	
QUARTILES		
Q1	196	
Q2	437	
Q3	1083	

DECILES		
D1	102	
D2	108	
D3	169	
D4	239	
D5	327	
D6	451	
D7	628	
D8	909	
D9	1467	
D10	3195	
Ecart-type	2205	
Fréquence villes +7000hab	0,03943	

Figure 4. Proposition de l'équipe E.

Pour compléter notre propos, considérons maintenant quelques-unes des remarques faites par l'ensemble des équipes sur la consigne proposée :

– On peut proposer un tel sujet à travailler en classe à des élèves de collège, d'abord en petit groupe puis à débattre en classe entière, à condition d'avoir préparé en amont les questions de relance. Maintenant, avec le programme de collège où il n'y a plus les quartiles, le sujet nous semble loin des attentes actuelles.

– Les élèves ne vont-ils pas perdre du temps à regarder le nombre d'habitants dans certaines villes ?

– Le fichier n'est-il pas trop imposant au niveau des données pour un élève ?

Ces deux propositions et ces remarques permettent de dégager un certain nombre d'obstacles rencontrés par les élèves professeurs. Dans leur ensemble, les équipes se focalisent d'emblée sur les éléments technologiques les plus « savants » mathématiquement parlant (moyenne, médiane, quartiles, déciles, etc.), qui constituent autant d'éléments attracteurs. Aucune équipe n'a évoqué le traitement des données ni le calcul des fréquences et des fréquences cumulées. On notera à ce sujet la difficulté qu'ont eue les élèves professeurs à traiter les données [6] : pour un certain nombre d'entre eux, cela a été l'occasion de rencontrer la fonction « Trier » du tableur.

Proposer des situations riches comme celle des « petites communes » peut conduire la classe à prendre des chemins variés, et le rôle de directeur d'étude est alors crucial pour faire avancer l'étude. Or la *gestion de l'étude*, dont la maîtrise constitue un objectif essentiel dans leur formation, reste d'une grande difficulté pour les professeurs stagiaires [7] et ils ont l'impression qu'en proposant des activités très fermées et guidées, ils parviennent à avoir une plus grande maîtrise du temps et de l'avancée de l'étude, et par ce biais une meilleure *gestion de classe*. Cette dernière est bien souvent la principale préoccupation des professeurs stagiaires et il est très difficile pour eux d'entendre que cette gestion est très étroitement liée à la robustesse des activités qu'ils proposent et à leur gestion de l'étude, avec la relance par le biais des questions cruciales.

6. La taille des données (communes de France) est adaptée à des élèves professeurs ; cette enquête a déjà été proposée dans des classes de collège, mais à l'échelle d'un département.

7. Très majoritairement, les élèves professeurs qui sont en deuxième année de formation à l'ESPE sont *professeurs stagiaires* : il s'agit pour eux d'une formation *en alternance*, la moitié de leur temps de travail étant consacré à un *stage* dans un établissement scolaire (collège ou lycée), l'autre moitié à la formation à l'ESPE.

La remarque « Les élèves ne vont-ils pas perdre du temps à regarder le nombre d'habitants dans certaines villes ? » est révélatrice de certaines contraintes qui pèsent sur la formation : chaque activité doit conduire à un seul objectif et il n'y a aucune place pour l'émergence de plusieurs organisations mathématiques ponctuelles et leur amalgamation. Il est vrai que de ce point de vue, si chaque organisation mathématique ponctuelle doit donner lieu à une activité, le temps de l'horloge va défiler très vite ! Or, dans le cas que nous venons de présenter, quand on détermine, par exemple, le nombre d'habitants de la ville où on habite, on travaille sur le type de tâches « Lire des données sous forme de données brutes » et on consolide ses « capacités à prélever de l'information sur divers supports » (Ministère de l'Éducation nationale, 2016, p. 2).

Cette étude statistique a aussi été l'occasion de mettre en avant un certain nombre de manques chez nos professeurs stagiaires. On constate par exemple qu'ils ont beaucoup de difficultés à travailler avec un grand nombre de données. Derrière des remarques du style : « C'est impossible de traiter autant de données ! », « Les élèves n'y arriveront pas », c'était leur propre difficulté avec l'outil tableur qu'ils dissimulaient derrière les compétences de leurs élèves ; on retrouve ici ce que Gisèle Cirade (2006, p. 188) appelle une « difficulté-écran ». Par ailleurs, les gestes propres à l'enquête (Chevallard & Ladage, 2011) sont absents de l'équipement praxéologique de nos élèves professeurs : dans le cas de l'enquête sur les petites communes, *a priori* aucun groupe n'a consulté la notice accompagnant le fichier sur le site de l'INSEE ou cherché un article à propos de la définition d'une « petite commune », d'une « grande commune ».

3. Contraintes liées aux mathématiques

Revenons au secteur « Organisation et gestion de données ». Les élèves professeurs ont eu beaucoup mal à développer l'organisation mathématique et il faut dire que, même si ce secteur occupe une place non négligeable dans les programmes du secondaire, il est souvent laissé de côté, car jugé « trop facile » et donc non prioritaire : dans les progressions, ce qui relève de la statistique descriptive est bien souvent traité en fin d'année, « si on a le temps ». Il est vrai qu'un professeur est amené à traiter des données tout au long de l'année, mais l'organisation mathématique propre à l'étude d'une série statistique est rarement enjeu de l'étude. Pour la plupart, tout au long de leur cursus universitaire, les élèves professeurs actuellement en formation n'ont jamais eu de cours de statistique, ou seulement par le biais d'une option pour appréhender des concepts plus théoriques tels que ceux que l'on rencontre en statistique inférentielle pour la validation de modèles. On a là un phénomène analogue à celui qui a été identifié par Yves Chevallard et Floriane Wosniak (2011) en probabilités, où l'infrastructure fréquentiste du calcul des probabilités est laissée de côté depuis de nombreuses années à l'université au profit d'une infrastructure de ce calcul que l'on peut qualifier d'ensembliste ; elle est parfois qualifiée de non rigoureuse par les enseignants en raison d'une méprise sur le travail de mathématisation à mener. Ces savoirs, qui ne sont pas enseignés dans les cursus universitaires, tout en étant essentiels pour les mathématiques enseignées au secondaire, pourraient être qualifiés de *savoirs oubliés*.

Dans le cas que nous considérons, on peut ajouter que certains éléments technologiques sont « non stabilisés ». Une étude des manuels du cycle 4 met en évidence un flou persistant concernant certaines notions (données, valeur, caractère, série), comme nous allons le voir.

3.1. À propos de la notion d'effectif

Considérons tout d'abord la notion d'*effectif*. On reproduit ci-dessous quatre définitions proposées dans des manuels [8] de cycle 4 :

> [C4, Delta]. Dans une série de données, l'**effectif d'une donnée** est le nombre de fois où elle apparaît. L'**effectif total** est le nombre de valeurs de la série statistique. (Lambotte, 2016, p. 208).
>
> [5e, Indigo]. Dans une série de données : L'effectif d'une donnée est le nombre de fois où cette donnée apparait. L'effectif total est la somme de tous les effectifs. (Barnet, 2016, p. 152)
>
> [C4, Transmath]. Lors d'une enquête, une liste de données a été relevée. L'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois où cette donnée apparaît

8. Les manuels sont repérés entre crochets par le niveau (C4 pour cycle 4 (élèves de 12-15 ans) ou l'un des trois niveaux de classe : 5e, 4e, 3e) et la collection.

dans la liste. L’**effectif total** est le nombre total de données dans la liste. (Carlod, 2016, p. 194)

[C4, Kiwi]. Dans une série statistique, l’**effectif** d’une valeur est le nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série. L’**effectif tota**l est la somme de tous les effectifs. (Beltramone, 2016, p. 68)

Sur ces quatre manuels, trois définissent l’effectif d’une *donnée* et un l’effectif d’une *valeur*. Mais qu’est-ce qu’une donnée ? Qu’est-ce qu’une valeur ? Aucun manuel ne propose de poser, même de façon informelle, le vocabulaire classiquement utilisé en statistique (population, individu, caractère, valeur) avant d’énoncer les définitions (effectif, fréquence, etc.). Revenons à la définition d’effectif, en nous appuyant sur un ouvrage rédigé par Gérard Chauvat et Jean-Philippe Réau (1995). On y lit notamment que « l’**effectif total** de la population est le nombre *N* d’individus qui la constitue » (p. 10), que, « dans la pratique, la contingence est constituée des observations, c’est-à-dire des valeurs observées du (ou des) caractère(s) de la population au(x)quel(s) on s’intéresse » (p. 11) et qu’« on appelle **effectif** de la valeur v_i le nombre de fois où elle a été observée » (p. 13).

Dans le manuel [C4, Delta], une *donnée* correspond visiblement à ce qu’on appelle classiquement une *valeur* et l’effectif total est défini comme étant le nombre de *valeurs*, alors qu’il s’agit ici des *valeurs observées*. Le manuel [5^{e}, Indigo] donne une définition de l’*effectif total* qui le rend tributaire de celle des effectifs des valeurs et qui, en fait, renvoie plutôt à une propriété. Le manuel [C4, Transmath] impose que les données soient fournies sous forme d’une liste : que faire dans le cas où l’on connaît la distribution des observations ? Ces différents flous dans les définitions des manuels confirment une certaine *péjoration* du savoir statistique.

3.2. À propos de la notion de médiane

Poursuivons notre enquête en nous intéressant à la médiane. Nous reproduisons ci-dessous deux définitions proposées dans des manuels de cycle 4 :

> [C4, Maths Monde]. La médiane d'une série statistique est un nombre tel qu'il y ait autant de valeurs inférieures ou égales à ce nombre que de valeurs supérieures ou égales à ce nombre. (Lanata, 2016, p. 71)
>
> [C4, Delta]. La médiane d'une série de valeurs est une valeur telle que : au moins 50 % des valeurs lui soient inférieures ou égales ; au moins 50 % des valeurs lui soient supérieures ou égales. (Lambotte, 2016, p. 209)

Essayons alors de déterminer la médiane de la série suivante [9] : (1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2). Dans le cas de la première définition, on peut montrer qu'il n'existe pas de nombre *m* tel qu'il existe *autant* de valeurs observées $\leq m$ que de valeurs observées $\geq m$. Dans le cas de la seconde définition, on peut montrer qu'il existe bien une valeur *m* qui convient : $m = 2$. Mais si l'on utilise cette définition dans le cas de la liste (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6), on peut montrer que les valeurs $m = 3$ et $m = 4$ conviennent, alors que le manuel propose de définir *la* médiane d'une série de valeurs. La situation n'est pas simple, d'autant que les définitions qui sont proposées ne sont pas des plus opérationnelles.

Les documents foisonnent sur la médiane. On peut par exemple citer un texte proposé par l'inspection pédagogique régionale de mathématiques de l'académie de Strasbourg, qui fait le point sur « les difficultés soulevées par la définition de la médiane et des quantiles », en « classes de premières L, ES, S » (Meyer). On peut aussi noter qu'une ressource produite dans le cadre de l'accompagnement des programmes de mathématiques publiés en 2008 propose une définition exploitable (Ministère de l'Éducation nationale, 2007, p. 11) :

> La définition qui est retenue en collège pour la médiane d'une série est celle qui est adoptée dans le programme de seconde. Elle s'appuie sur la pratique :
>
> Médiane (empirique) : *La série des données est ordonnée par ordre croissant. Si la série est de taille impaire (2n+1), la médiane est la valeur du terme de rang n+1. Si la série est de taille paire (2n), la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et n+1.*

9. Pour simplifier, on ne considère qu'un petit nombre d'observations, avec les valeurs observées déjà rangées dans l'ordre croissant.

D'autres définitions sont parfois utilisées ; par exemple, la médiane est le deuxième quartile.

L'enseignement des quartiles relevant depuis 2016 du programme de la classe de seconde, cette autre définition (la médiane est le deuxième quartile) n'entre pas en concurrence avec la définition empirique énoncée plus haut au cycle 4, sauf peut-être par le biais des calculatrices et des tableurs, ainsi qu'en témoigne un article posté par Yohan Cecere sur le blog Kwyk Actu (2017). Si l'on travaille dans un environnement numérique anglo-saxon, le calcul de la médiane s'appuiera sur la définition de la médiane comme le deuxième quartile d'une série. Des professeurs stagiaires ont été déstabilisés lorsque des calculatrices dans la classe ont donné des réponses différentes pour la médiane.

4. Conclusion

Le travail sur l'enseignement du secteur « Organisation et gestion de données » au cycle 4 que nous venons de présenter permet de révéler des *difficultés récurrentes* rencontrées par les professeurs dans l'exercice de leur métier, même si l'enquête que nous avons menée est partie de celles qui étaient rencontrées par les élèves professeurs, avec notamment la mise en évidence de difficultés « écran » chez nombre d'entre eux. Nous considérons qu'il y a là un problème de la profession, qu'il faut étudier. Nous avons mis en évidence une *péjoration* du savoir lié à ce secteur, qui conduit à une instabilité de certaines notions et à de nombreuses imprécisions ou inadéquations, les définitions proposées dans les manuels relevant parfois de la technique ou n'étant pas du tout opérationnelles. Ce savoir, qui est pourtant stabilisé depuis longtemps, demanderait à être retravaillé en vue de son enseignement dans le secondaire. On est face à un savoir qui nous semble « oublié ».

Références

Barnet, C. (Éd.). (2016). *Mathématiques, cycle 4, 5^e^ (collection Mission Indigo).* Paris : Hachette.

Beltramone, J.-P. (Éd.). (2016). *Mathématiques, cycle 4 (collection Kiwi).* Paris : Hachette.

Carlod, V. (Éd.). (2016). *Mathématique, cycle 4 (collection Transmath).* Paris : Nathan.

Cecere, Y. (2017, 27 juin). *Quartiles et médiane : pourquoi ma calculatrice se trompe ?* Kyik Actu. http://blog.kwyk.fr/2017/06/quartiles-et-mediane-pourquoi-ma.html

Chauvat, G. & Réau, J.-P. (1995). *Statistique descriptive.* Paris : Hachette.

Chevallard, Y. & Ladage, C. (2011). Enquêter avec l'Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & didactique, 5*(2), 85-116.

Chevallard, Y. & Wozniak, F. (2011). Un cas d'infrastructure manquante : statistique et probabilités en classe de troisième. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 831-854). Barcelone, Espagne : CRM.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM. Les mathématiques comme problème profesionnel* (Thèse de doctorat). Marseille : Université de Provence.

Lambotte, L. (Éd.). (2016). *Mathématiques, cycle 4 (collection Delta).* Paris : Belin.

Lanata, F. (Éd.). (2016). *Mathématiques, cycle 4 (collection Maths Monde).* Paris : Didier.

Meyer, E. (s.d.). *Les difficultés soulevées par la définition. de la médiane et des quantiles. Classes de premières L, ES, S.* https://www.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/mathematiques/Inspection/Documentations/medquan_E_Meyer.doc

Ministère de l'Éducation nationale. (2004). *Enseigner au collège. Mathématiques. Programmes et accompagnement.* Paris : CNDP.

Ministère de l'Éducation nationale. (2007). Organisation et gestion de données au collège. Dans *Ressources pour les classes de 6^{e}, 5^{e}, 4^{e}, et 3^{e} du collège.*

Ministère de l'Éducation nationale. (2015). Programmes pour les cycles 2, 3, 4. *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015.*

http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400

Ministère de l’Éducation nationale. (2016). *Interpréter, représenter et traiter des données.* http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Traitement_des_donnees/03/6/RA16_C4_MATH_doc_maitre_564036.pdf

Annexe 1. Production de l'équipe A

Activité 1 *:(Créé de toutes pièces)*

Nous nous intéresserons à l'étude des pointures de chaussures au sein de la classe.

Etape 1 : Recensons les pointures existantes au sein de la classe dans le tableur suivant.

NB : si classe d'effectif pair : au départ, le professeur ajoute sa pointure.

NOM	Elève 1	Elève 2	Elève 3	...	...	...	...	...	...
Pointure	37	35	39	...	...	...	...	...	...

Etape 2 : Rangeons ces pointures par ordre croissant.

NOM	Elève 2	Elève i	Elève j	...	...	...	...	...	...
Pointure	35	35	36	...	...	...	...	...	...

Etape 3 : Nous sommes 29. Quelle est la plus petite pointure? Combien d'élèves ont cette pointure? Combien d'élèves ont une pointure supérieure ou égale?

Etape 4 : Quel est le 15ème élève de ce tableau ordonné? Quelle est sa pointure ?

Combien d'élèves ont une pointure supérieure ou égale à lui ? Calculer le pourcentage d'élèves ayant une pointure supérieure ou égale à lui.

Combien d'élèves ont une pointure inférieure ou égale à lui ? Calculer le pourcentage d'élèves ayant une pointure inférieure ou égale à lui.

Etape 5 : Est-ce que ces deux pourcentages sont supérieurs ou égaux à 50 ?
Peut-on trouver une autre pointure qui vérifie cela ? Essayer avec deux autres pointures ?

Annexe 2. Production de l'équipe B

Activité :

L'organisateur d'une compétition amicale de judo souhaite répartir les combattants en deux poules. On souhaite que cette répartition soit la plus équitable possible. La première poule est dite des « légers » et la seconde est dite des « lourds ».
On a donc relevé le poids en kg de chacun des judokas :

62 – 98 – 78 – 95 – 68 – 59 – 74 – 81 – 102 – 71 – 80 – 61 – 65 – 72 - 65

1) Peut-il y avoir autant de judokas dans chacune des deux poules ?
2) a) Calculer le poids moyen des judokas.
   Peut-on utiliser ce poids pour répartir les judokas dans les deux poules ?
   b) Quel est le poids du judoka que l'on peut placer indifféremment chez les « lourds » ou chez les « légers » ?
3) Le compétiteur le plus lourd (102 kg) décide de se retirer de la compétition.
   a) Combien y aura-t-il de judokas dans chacune des deux poules ?
   b) Quels poids limites peut-on donner pour définir la catégorie des lourds et celle des légers ?

Annexe 3. Production de l'équipe C

Modification de l'énoncé

1. Voici la liste des tailles, en Mo, des vidéos que Claire a prises avec son téléphone portable. Déterminer la valeur de la série telle qu'au moins 50% des valeurs de la série lui soient inférieur.
   (Question d'aide : ranger par ordre croissant la liste)

   485 Mo 480 Mo 520 Mo 430 Mo
   270 Mo 380 Mo 295 Mo 385 Mo
   415 Mo 390 Mo 280 Mo

2. Le tableau ci-dessous présente la répartition des tailles des vidéos dans le téléphone de Karl.
   a. Calculer l'effectif cumulé croissant ?
   b. Déterminer la valeur de la série telle qu'au moins 50% des valeurs de la série lui soient inférieur.

Taille des vidéos (en Mo)	150	160	180	210	230	240	280
Effectif	2	5	7	4	3	2	4

3. Voici les tailles des vidéos dans les téléphones de Célia et Joris.

a. Téléphone de Célia

190 Mo 280 Mo 975 Mo 380 Mo
395 Mo 850 Mo 165 Mo 630 Mo
295 Mo 185 Mo 320 Mo 525 Mo

b. Téléphone de Joris

465 Mo 750 Mo 580 Mo 1265 Mo
850 Mo 910 Mo 215 Mo 930 Mo
1040 Mo 350 Mo

(Question d'aide : classer par ordre croissant)

a. Peut-on prendre une valeur de la série telle qu'au moins 50% des valeurs de la série lui soient inférieur ?
b. Proposez une solution.

The formulation of policies building on scholarly knowledge - a study of actors in the noosphere

Louise Windfeldt

Dep. of Science Education, University of Copenhagen, Denmark

Abstract. Governmental grant-schemes build on scholarly knowledge and are formulated in political environments. This formulation introduces changes in the knowledge that affect the implementation of the grant-scheme and the subsequent outcome. In a previous study of the transformation and transposition of scholarly knowledge of plant genetic resources into a national grant-scheme significant constraints and conditions were identified. These are examined using didactic levels of co-determination. Our study advocates that knowledge must be carefully selected and deselected in the formulation of grant-schemes, and awareness of adaptations due to embedding in policies on all levels is needed.

Résumé. Les programmes de subventions gouvernementales se basent sur le savoir savant et sont formulés dans les milieux politiques. Cette formulation introduit des changements dans le savoir. Ces changements affectent la mise en œuvre du programme de subventions et les résultats ultérieurs. Dans une étude précédente autour de la transformation et la transposition du savoir savant des ressources phytogénétiques dans un programme national de subvention, de nombreuses conditions et contraintes importantes ont été identifiées. Celles-ci sont analysées en utilisant les niveaux de co-détermination didactique. Notre étude préconise que les savoirs impliqués dans ce processus doivent être soigneusement sélectionnés et désélectionnés dans la formulation de programmes de subventions, et qu'il est nécessaire de connaitre explicitement les adaptations de sensibilisation des adaptations expérimentées en raison de l'intégration dans les politiques.

Resumen. Los programas de subvenciones gubernamentales se basan en el saber sabio y se formulan en los ambientes políticos. Esta formulación provoca cambios en el propio saber. Dichos cambios afectan a la implementación del programa de subvenciones y su resultado. En un estudio previo, centrado en la transformación y transposición del saber sabio de los recursos fitogenéticos en un programa de subvenciones nacional, se identificaron condiciones y limitaciones significativas en este proceso transpositivo. Estas limitaciones y condiciones se examinaron utilizando los niveles de co-determinación didáctico. El presente estudio defiende que los saberes implicados en la elaboración de programas de subvenciones y desarrollo de políticas deben ser cuidadosamente seleccionados y deseleccionados y que es necesario conocer de manera explícita las adaptaciones sufridas en la adaptación en las políticas de subvenciones.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. Introduction

Governmental grant-schemes build on scholarly knowledge, and are formulated in political environments. This process transforms the knowledge, which means that the subsequent implementation of the grant-scheme and thus the outcome might be affected.

The following analysis builds on a paper by Windfeldt and Bosch (in review) in which is described how scholarly knowledge of plant genetic resources is transformed into a national grant-scheme to support public demonstration-projects.

Plant genetic resources (PGR) include all plant-varieties of actual or potential value for agriculture (FAO, 2009). To conserve, grow, and develop PGR in a sustainable way requires political and economic backing worldwide. Therefore almost all nations have signed the legally binding International Treaty on PGR (FAO-treaty) in FAO, the Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO, n.d.). FAO requires the political backing to be based on public awareness and support, stating:

> In spite of the enormous contribution by PGR to global food security and sustainable agriculture, its role is not widely recognized or understood. Greater efforts are needed to estimate the full value of PGR, to assess the impact of its use and to bring this information to the attention of policy-makers and the general public so as to help generate the resources needed to strengthen programs for its conservation and use (FAO, 2010, p. 198).

A Danish grant-scheme: 'Grant for demonstration projects about conservation and sustainable use of plant genetic resources' (Grant PGR) was initiated in 2008 by the Danish Ministry of Food, Agriculture and Fisheries [the Danish Ministry of Food] and embedded in the European Union's (EU's) Rural Development Policy 2007 to 2013. The aim of the Grant PGR was firstly to protect plant genetic resources for food and agriculture by supporting demonstration-projects; secondly to test the suitability for environmentally friendly farming and food products; finally the grant-scheme should help fulfil international obligations according to FAO, and increase public awareness of plant genetic resources (the Danish Ministry of Food, 2007 and 2011).

Windfeldt and Bosch found that some of the scholarly knowledge of PGR was reconstructed to be incorporated in the grant-scheme, while some was not used, and elements not belonging to the scholarly knowledge were added. Main external actors influencing the formulation process in the Ministry of Food were the EU and FAO since the grant-scheme was embedded in EU’s Rural Development Policy, and one of its purposes was to help fulfil international obligations according to FAO (Windfeldt and Bosch, in review).

In the present paper we will examine these external actors in the transformation process by asking:

- Can conditions concerning PGR in FAO and the EU be described as belonging to a hierarchy of levels?
- Can these levels explain the origin and manifestation of some of the most important conditions and constraints in the Grant PGR?

2. Theory

We use the anthropological theory of the didactic (ATD): didactic transposition and levels of co-determination as analytical tools, because these make it possible to analyze a difficult process of knowledge transformation with many factors influencing the process.

2.1. Didactic transposition

Although the framework of didactic transposition was originally developed in mathematics education research (Chevallard, 1985), it has been used to explain the transformation of knowledge in other subjects (e.g. Hazzan, Dubinsky, & Meerbaum-Salant, 2010; Banegas, 2014). It can also be used to explain the transformation of knowledge in other contexts, for instance to study how museums create educational environments on the basis of certain objects of scientific knowledge, which they wish to mediate to their visitors (Simonneaux and Jacobi, 1997; Mortensen 2010).

Windfeldt and Bosch used didactic transposition to gain an overview of the transformation and transposition of knowledge in the formulation of the Grant PGR. In figure 1 the process is explained in relation to the similar process of school teaching.

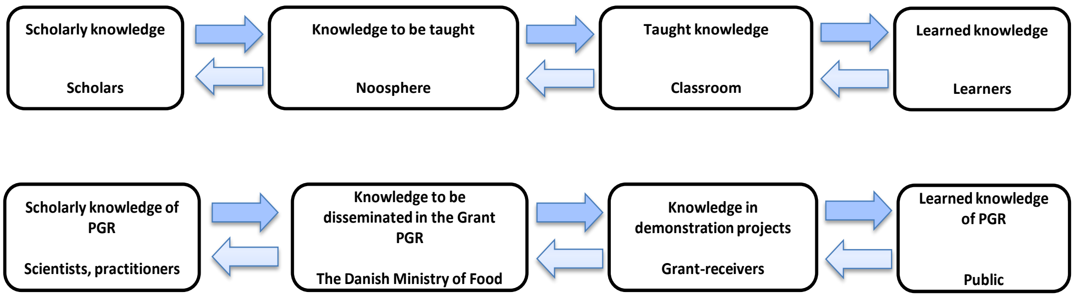


Figure 1: Comparison of the didactic transposition of knowledge in a school-context (upper line) and the Grant PGR (lower line): In the Grant PGR the knowledge presented by scientists and practitioners (step 1) is transposed to knowledge to be disseminated by the Danish Ministry of Food in the Grant PGR (step 2), by the grant-receivers in the demonstration projects (step 3), and finally learned by the public (step 4) (Windfeldt & Bosch, in review).

Windfeldt and Bosch analyzed the process shown in figure 1 from step 1 to step 2.

They found that the *scholars* were scientists and practitioners: agriculturists, plant breeders, geneticists, gardeners, farmers, and chefs. The scholars' knowledge about how plants can be examined, grown, and used makes up the *scholarly knowledge of PGR*. The main subjects which formed the scholarly knowledge were studied in a broad literature review and organized into four relatively independent categories: 'genes', 'resources', 'agriculture', and 'policy'.

Step 2 in the didactic transposition process is *knowledge to be taught* in the *noosphere*, which was organized around the Ministry of Food since it sat up the conditions for the Grant PGR. Knowledge to be taught consisted of a programme, a law, and an order in the Danish Ministry of Food (The Danish Ministry of Food, 2007, 2011, and 2012).

The main subjects in the process of didactic transposition (step 1 and 2) can be seen in figure 2 (Windfeldt and Bosch, in review).

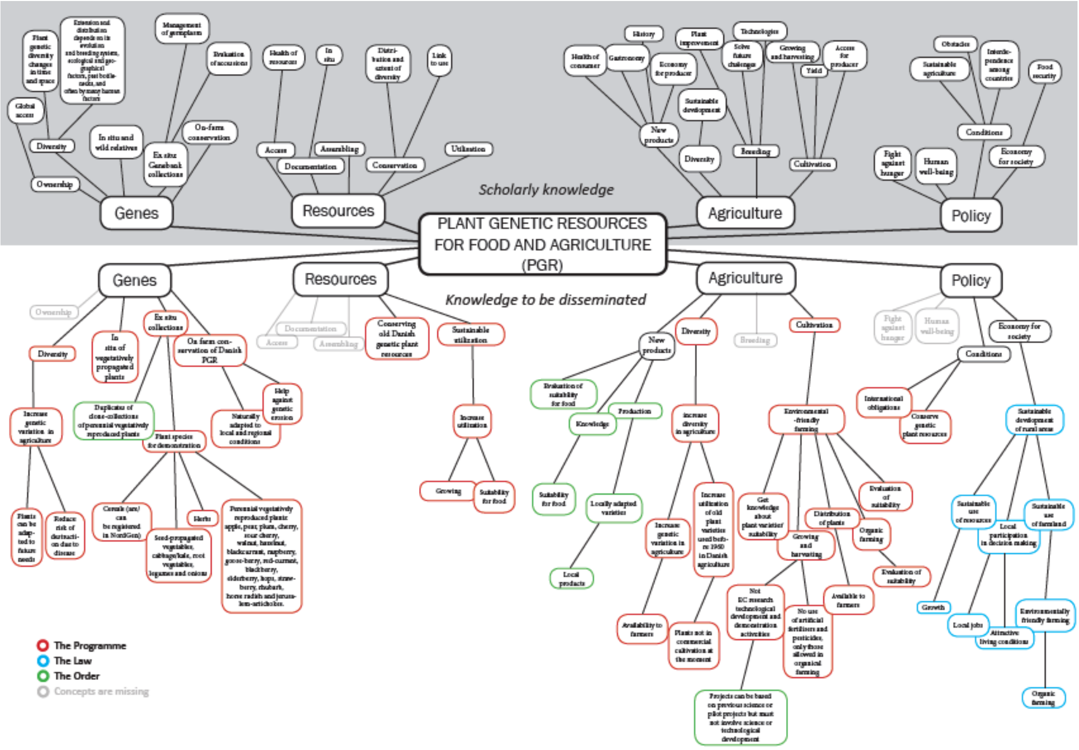


Figure 2: Concept map showing the didactic transposition process of knowledge of PGR from step 1 (scholarly knowledge - upwards) to step 2 (knowledge to be disseminated - downwards) (Windfeldt & Bosch, in review).

Windfeldt and Bosch found that the transposition process led to changes in the scholarly knowledge. Three important constraints were found in the category of 'Agriculture':

1. Solely old varieties of plants could be demonstrated in the Grant PGR
2. Breeding, research, and technological development were not part of the Grant PGR
3. No use of pesticides was allowed in the Grant PGR

These can be seen in detail in figure 3.

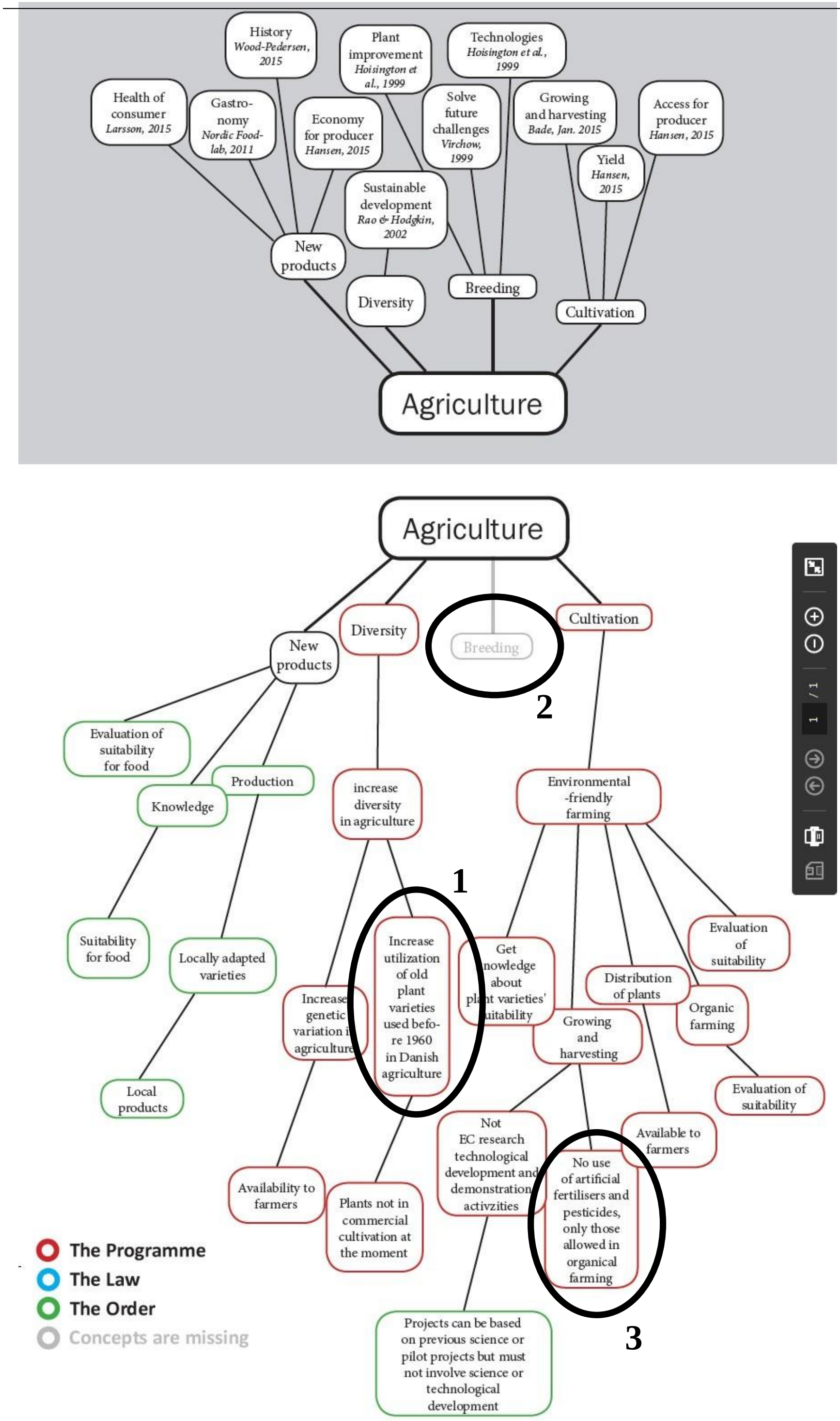


Figure 3: Concept map showing the changes in knowledge of ‘agriculture’ from scholarly knowledge (upwards) to knowledge to be disseminated (downwards) in the Grant PGR. The numbered circles refer to text above (Windfeldt & Bosch, in review).

Using levels of co-determination we will in the following examine how the three conditions seen in figure 3 were selected to be part of the Grant PGR.

2.2. Levels of co-determination

Conditions and restrictions that affect dissemination of knowledge in the noosphere have been described as belonging to a hierarchy of levels of co-determination in the ATD. This was originally developed to analyze the factors that influence the design and outcomes of teaching-learning situations in schools. The uppermost levels are ‘humanity’, ‘civilization’, ‘society’, and ‘school’ (Chevallard, 2017; Bosch & Gascón, 2006; Artigue & Winsløw, 2010).

Achiam and Marandino (2014) adapted the framework to museum contexts to study the design and educational outcomes of exhibits. According to Achiam and Marandino (forthcoming) humanity, civilization, and society refer to constraints and conditions to museum practice that originate or manifest themselves externally to the institution itself.

The Grant PGR supported public demonstration-projects. As an important purpose of the demonstration-projects was to raise public awareness of PGR they can be seen as informal learning environments, disseminating knowledge like museums.

In the following we will use the three upper levels of co-determination to analyze whether the conditions concerning PGR in FAO and the EU can be described as belonging to a hierarchy of levels. This is seen in figure 4.

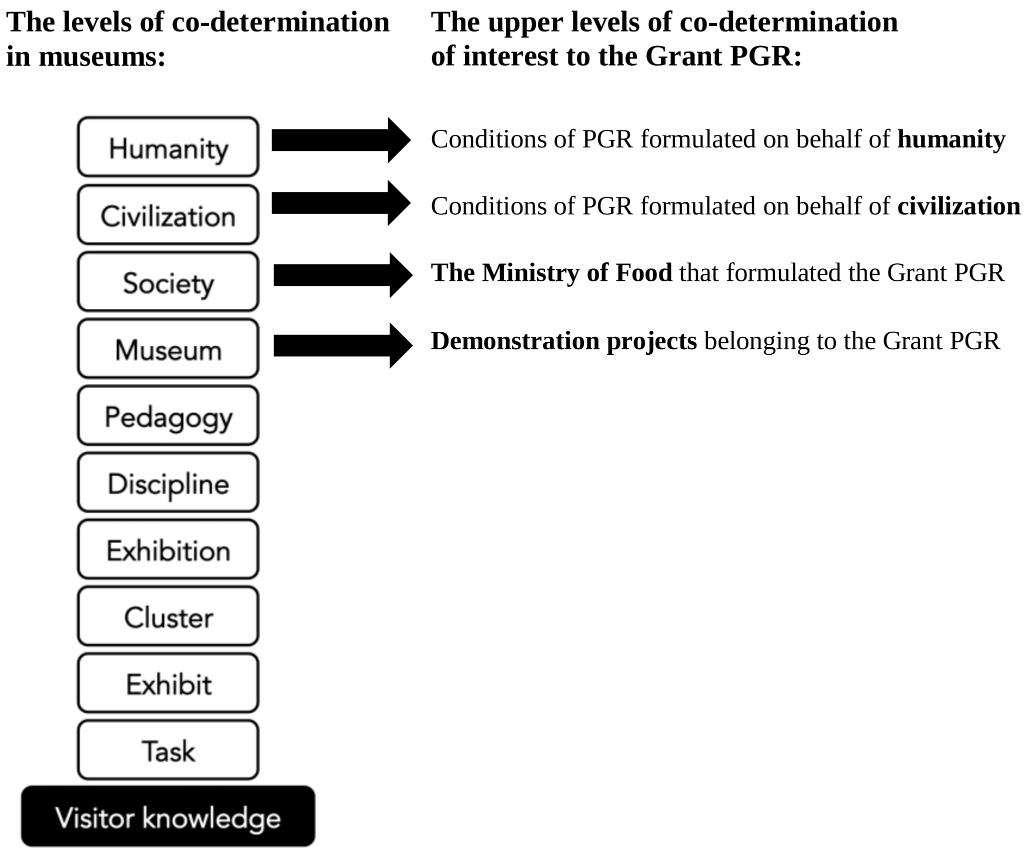


Figure 4. **Left:** The levels of co-determination in museums (*from* Achiam and Marandino, forthcoming). **Right:** The upper levels of co-determination are used to analyze the formulation of the Grant PGR.

Next we will study how these levels can explain the origin and manifestation of the three constraints (see figure 3) chosen from the Grant PGR.

3. Results

To analyze whether the conditions concerning PGR in FAO and the EU can be described as belonging to a hierarchy of levels we will start by studying the two upper layers of co-determination: 'humanity' and 'civilization' to see how they relate to PGR.

3.1. Conditions of PGR formulated on behalf of humanity

According to the Merriam-Webster Dictionary humanity refers to "the totality of human beings; the human race". Conditions described on this level must be expressed on behalf of mankind.

In the case of PGR we find conditions described in the legally binding FAO-treaty on this level. The treaty defines PGR as "any genetic material of plant origin of actual or potential value for food and agriculture" (FAO, 2009, Article 2). The treaty is signed by 140 of 193 independent nations, and according to the FAO-treaty each country must take care of PGR that are under threat (FAO, 2009). It states that:

> The conservation, exploration, collection, characterization, evaluation and documentation of plant genetic resources for food and agriculture are essential in meeting the goals of the Rome Declaration on World Food Security and the World Food Summit Plan of Action and for sustainable agricultural development for this and future generations. (FAO, 2009, Preamble)

It furthermore explains that:

> Plant genetic resources for food and agriculture are the raw material indispensable for crop genetic improvement, whether by means of farmers' selection, classical plant breeding or modern biotechnologies, and are essential in adapting to unpredictable environmental changes and future human need (FAO, 2009, Preamble).

All these global issues (e.g. 'World Food Security', 'future generations', 'environmental changes', and 'future human need') must be seen as expressed on behalf of mankind.

3.2. Conditions of PGR formulated on behalf of civilization

According to Artigue & Winsløw (2010) civilization is a culturally homogenous group of societies, and their values cover their principles for human society.

In the case of PGR we find conditions described by the EU (the European Union with 26 European nations formed in 1993 for the purpose of achieving political and economic integration) on this level. Protection of genetic diversity was from the first implementation of EU's Common Rural Development Policy in 1992 one of the focus areas (Commission of the European Communities, 1992). This was due to a concern that varieties of useful plants were threatened with genetic erosion, because they were not competitive against the modern high-producing varieties (European Commission, 1998). The focus on PGR should thus enhance biodiversity in agriculture and was part of encouraging farmers and other land managers to introduce or continue "to apply agricultural production methods compatible with the protection and improvement of the environment, the landscapes and its features, natural resources and the soil. In this context the conservation of genetic resources in agriculture should be given specific attention" (European Commission, 2005: 35).

The focus on PGR as a part of an environmental focus and due to the concern that varieties of useful agricultural plants were endangered, because they were not competitive against modern high-producing varieties, express the values and conditions of a limited and culturally homogenous group of societies (the EU), and are thus on the level of civilization.

Using levels of co-determination figure 5 shows how the conditions concerning PGR can be described. Conditions described by FAO express values on the level of humanity, while the conditions described by the EU belong to a culturally homogenous group of societies, which are described by the level of civilization.

FAO-conditions for PGR :
- all plants important to agriculture help to secure food for the World
- breeding makes humans able to adapt to new conditions and needs
- all nations must take care of endangered varieties to ensure diversity

EU-conditions for PGR :
- only old varieties, endangered by extinction
- no breeding, because this is part of another EU-programme
- no pesticides, because the environment should be protected

The Danish Ministry of Food

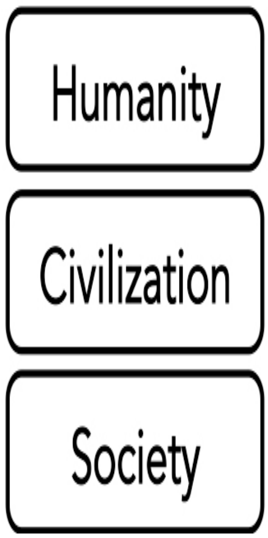


Figure 5: Conditions concerning PGR in FAO and the EU can be described as belonging to a hierarchy of levels. Conditions described by FAO express values at the level of humanity, while the conditions described by the EU belong to the level of civilization. On the third level is the Danish Ministry of Food. All belong to the noosphere in the formulation of the Grant PGR.

3.3. The origin of the three important constraints

We will now see how levels of co-determination can be used to explain the origin and manifestation of the three constraints.

1. Solely old varieties of plants could be demonstrated in the Grant PGR

While the FAO-treaty at the level of humanity states that PGR include all plant-varieties of value for agriculture to secure food for the World (FAO, 2009), it was decided to limit the plants that could be demonstrated in the Grant PGR to old, Danish varieties. This was due to the concern that they were endangered, because they were not competitive against modern high-producing varieties. This constraint belongs to the level of civilization as it expresses the values and conditions of a culturally homogenous group of societies. It came from the Rural Development Programme and was an adaptation of the Grant PGR to EU's Rural Development Policy 2007 to 2013.

2. Breeding, research, and technological development were not part of the Grant PGR

While the FAO-treaty at the level of humanity states that PGR are the raw material indispensable for crop genetic improvement, which includes plant breeding, and thus makes humans able to adapt to unpredictable environmental changes and future human needs (FAO, 2009), breeding was not mentioned in the Grant PGR. This was because research and technological development, which includes breeding, was part of another EU framework-programme, and in the Rural Development Programme "support may not be given for initiatives that are eligible under the Community Framework Programme for Research and Technological Development" (the Danish Ministry of Food, 2012, p. 241). Thus the decision that breeding could not be used and demonstrated in the Grant PGR expresses the values and conditions of a more limited, culturally homogenous group of societies (the EU), and are thus on the level of civilization. The Danish Ministry of Food had to integrate this constraint into the Grant PGR, when they decided to make it part of the Rural Development Programme in EU's Rural Development Policy 2007 to 2013.

No use of pesticides was allowed in the Grant PGR

The decision that no use of pesticides were allowed in the Grant PGR was one of the three key areas in EU's Rural Development Policy 2007 to 2013 (The Council of the European Union, 2006). Thus conservation of genetic resources in agriculture was made a part of the context, where farmers and other land managers should: "apply agricultural production methods compatible with the protection and improvement of the environment" (European Commission, 2005: 35). Though protection of the environment could be argued to be a concern on the level of humanity, the use of pesticides might sometimes be necessary when conserving fragile varieties. That each country must take care of PGR that are under threat (FAO, 2009) is here seen as more important for humanity than protecting the environment. Thus the decision that pesticides were not allowed is seen as a decision taken on the level of civilization.

The conditions belonging to the upper levels of co-determination that influenced the formulation of the three important constraints can be seen in figure 6.

FAO-conditions for PGR :
- all plants important to agriculture help to secure food for the World
- breeding makes humans able to adapt to new conditions and needs
- all nations must take care of endangered varieties to ensure diversity

EU-conditions for PGR :
- only old varieties, endangered by extinction
- no breeding, because this is part of another EU-programme
- no pesticides, because the environment should be protected

The Grant PGR in the Ministry of Food
1. Solely old varieties of plants
2. No breeding
3. No use of pesticides

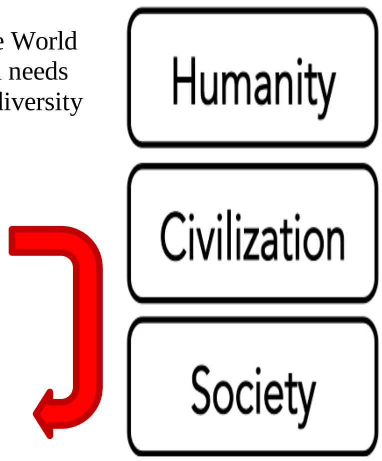


Figure 6: The uppermost levels of co-determination in the formulation of the Grant PGR: FAO-conditions of PGR belong to the humanity level, and EU-conditions to the level of civilization. These two uppermost levels influenced the formulation of the Grant PGR in the Danish Ministry of Food.

4. Discussion

A governmental grant-scheme is an instrument of policies, which the government wants to promote by giving out money. Therefore it is not surprising that conditions originating outside the Grant PGR have influenced its formulation. We showed that conditions coming from the EU manifested themselves in the Grant PGR by using levels of co-determination. But can these levels also explain the appropriateness of the conditions? And could levels of co-determination be used in guiding better decisions? In the following we will discuss this for the three constraints:

Solely old varieties of plants could be demonstrated in the Grant PGR

No one would claim that showing a narrow collection of old plant varieties under threat of extinction, would be the best way to increase public awareness of plant genetic resources compared to showing a broad diversity of edible plants, including the most common crops. But the EU concern that varieties of useful plants were threatened with extinction because they were not competitive against modern high-producing varieties (European Commission, 1998) became more important than showing a broad diversity and thus only old plant varieties under threat of extinction could be demonstrated.

Breeding, research, and technological development were not part of the Grant PGR

As stated by FAO plant genetic resources for food and agriculture are the raw material indispensable for crop genetic improvement, which includes breeding. This is essential in adapting to unpredictable environmental changes and future human needs (FAO, 2009).

That breeding could not be part of the Grant PGR was not because this was considered unimportant. It was just a coincidence that breeding belonged to another EU-programme dealing with research and technological development, which prohibited use in the actual programme. Thus breeding could not be part of the Grant PGR. This limited the opportunity to increase public awareness of the importance of breeding.

No use of pesticides was allowed in the Grant PGR

That pesticides could not be used in the Grant PGR was due to an EU focus on the environment and thus on agricultural production methods compatible with the protection and improvement of the environment (European Commission, 2005). But though organic farming will help the environment on a large scale it is problematic to conservation of single plant varieties. When preserving plants, and establishing collections and duplicates, it might sometimes be necessary to use pesticides to conserve all varieties; especially the fragile ones. Thus a requirement that only plant protection products approved for organic farming may be used in the Grant PGR is problematic to conservation, which was the first aim of the grant-scheme and central to FAO-goals.

4.1. Conditions on the level of humanity was over-ruled by conditions on the level of civilization

Though PGR-conditions described by FAO belonged to the highest level of co-determination, it was PGR-conditions described by the EU that manifested themselves in the formulation of the Grant-PGR. Thus it became more important to fulfill EU-goals and -rules than following the FAO-treaty, which acts on behalf of mankind.

The decision to implement EU-conditions in the Grant PGR led to constraints. These restricted the fulfillment of the Grant PGR, especially protection of plant genetic resources and raising public awareness in the demonstration projects. Looking to the humanity-level instead, PGR-conditions in the FAO-treaty could guide to better decisions in the formulation of the Grant PGR. This would lead to a better implementation of the grant-scheme and a subsequent better outcome of the demonstration projects:

Pesticides should be allowed in the demonstration projects to conserve fragile varieties of PGR in gene-banks and clone-collections. Conservation of PGR are essential for sustainable agricultural development and thus to secure world food security for this and future generations (FAO, 2009). Therefor it is more important that each country takes care of PGR that are under threat than keeping pesticides 100% out of the environment.

Breeding should be part of the demonstration-projects to show PGR as the "raw material indispensable for crop genetic improvement" (FAO, 2009, Preamble) and how they are "essential in adapting to unpredictable environmental changes and future human need" (FAO, 2009, Preamble). If this was not possible according to the EU legislation another solution could have been adding a statement to the grant-scheme that though it was not intended to fund research itself, collaboration to research and breeding was allowed and would be encouraged.

A broader variation of plants could be demonstrated to increase public awareness and interest in conservation of PGR. This would show the development of varieties and the connection between former, present, and future agriculture. This would also make it easier to disseminate knowledge of why it is essential to preserve the broadest possible variation and thus fulfill obligations according to FAO.

5. Concluding remarks

We have studied how scholarly knowledge about conserving and growing food plants in a sustainable way was rebuilt into a grant-scheme. This introduced changes in the knowledge due to the adaptation to EU's Rural Development Policy, which negatively affected the implementation of the grant-scheme and the subsequent outcome.

The analysis indicates that policy makers must be explicit about the knowledge they select and deselect in the transposition process and aware of political agendas on all levels.

Didactic transposition and levels of co-determination serve as useful analytical tools, which could also be appropriate in similar cases, where an object of knowledge is transposed from a scholarly environment to a political environment, and built into for instance a law. This can lead to more explicit choices in the development of grant-schemes, laws, programs, and other political instruments building on a body of scholarly knowledge.

References

Achiam, M., & Marandino, M. (2014). A framework for understanding the conditions of science representation and dissemination in museums. Museum Management and Curatorship 29: 66-82

Achiam, M., & Marandino, M. (forthcoming). Intended and realised biological themes of dioramas: An international comparison. In A. Seerschoi & S. D. Tunnicliffe (Eds.), Natural history dioramas: Traditional exhibits for current educational themes. Vol. II: Socio-cultural aspects. Dordrecht: Springer.

Artigue M & Winsløw C (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. Recherches en Didactique des Mathematiques 30: 47-82

Banegas, D. (2014). Democratizing didactic transposition: negotiations between learners and their teacher in a secondary school. Latin American Journal of Content and Language Integrated Learning, 7(2), 1–26. https://doi.org/10.5294/laclil.2014.7.2.1

Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. ICMI Bulletin, 58, 51–63.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. [Grenoble]: la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir: rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade et al. (Éds), Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société (pp. 27-65). https://citad4.sciencesconf.org.

Commission of the European Communities (1992). Council Regulation (EEC) No 2078/92/EEC of 30 June 1992. Official Journal of the European Communities 215, pp. 85-90 (1992). Retrieved from

European Commission (1998). State of application of regulation (EEC) no. 2078/92: Evaluation of agri-environment programmes (DGVI COMMISSION WORKING DOCUMENT No. VI/7655/98). Brussels.

European Commission (2005). Council Regulation (EC) No 1698/2005 of 20 September 2005 on support for rural development by the

European Agricultural Fund for Rural Development (EAFRD), Official Journal of the European Union. Brussels. (2005). Retrieved fromhttp://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/HTML/?uri=CELEX:32005R1698&

FAO (n.d.). List of Countries | The International Treaty. Retrieved October 29, 2015, from http://www.planttreaty.org/list_of_countries.

FAO (2009). International Treaty on Plant Genetic Resources for Food and Agriculture. IUCN. Retrieved from http://www.planttreaty.org/content/texts-treaty-official-versions.

FAO (2010). The Second Report on the State of the World's Plant Genetic Resources for Food and Agriculture. Rome: Commission on Genetic Resources for Food and Agriculture, Food and Agriculture Organization of the United Nations.

Hazzan, O., Dubinsky, Y., & Meerbaum-Salant, O. (2010). Didactic transposition in computer science education. ACM Inroads, 1(4), 33. https://doi.org/10.1145/1869746.1869759

Mortensen, M. F. (2010). Museographic Transposition: The Development of a Museum Exhibit on Animal Adaptations to Darkness. Éducation et Didactique, 4(1), 115–138. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.763

Simonneaux, L., & Jacobi, D. (1997). Language constraints in producing prefiguration posters for a scientific exhibition. Public Understanding of Science, (6), 383–408.

The Council of the European Union (2006). Council Decision of 20 February 2006 on Community Strategic Guidelines for Rural Development (programming period 2007 to 2013), Official Journal of the European Union.

The Danish Ministry of Food, Agriculture and Fisheries (2007). Law for Development of Rural Areas, 2007. Lov om udvikling af landdistrikterne (landdistriktsloven), 2007.

The Danish Ministry of Food, Agriculture and Fisheries (2011). Bekendtgørelse om tilskud til demonstrationsprojekter om bevaring og bæredygtig udnyttelse af plantegenetiske ressourcer for jordbrug og fødevarer - retsinformation.dk. Retsinformation.dk. https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=123370.

The Danish Ministry of Food, Agriculture and Fisheries (2012). The Danish Rural Development Programme 2007-2013. Retrieved from https://naturerhverv.dk/fileadmin/user_upload/NaturErhverv/Filer/Tilskud/Projekttilskud/Landdistrikter/LDP_Rev_proposal_Consolid_2007-2013f.pdf

Windfeldt, L & Bosch, M (2017). Demonstration of Plant Genetic Resources for Food and Agriculture to the public in a national grant-scheme - Transferring knowledge from a scholarly context to a policy context. Manuscript in review.

La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP

Eva Cid

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España

José María Muñoz-Escolano

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España

Noemí Ruiz-Munzón

Escola Superior de Ciències Socials i de l'Empresa-Tecnocampus,
Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, España

Abstract. In this communication we propose a pilot experience to introduce a SRP in the frame of the initial didactic training of the future teachers of Secondary Education. With that we want to contribute to the diffusion of this methodology in the educational institutions. The didactic device used is the one of the SRP-TT (Ruiz-Olarría, 2015) and it is based in the SRP of the scholar introduction of negative numbers in an algebraic environment (Cid & Bolea, 2010; Cid & Ruiz-Munzón, 2011).

Résumé. Dans cette communication nous proposons une expérience pilote pour introduire un PER dans le cadre de la formation didactique initiale des futurs enseignants d'Enseignement Secondaire. Avec ça nous voulons contribuer a la diffusion de cette méthodologie dans les institutions éducatives. Le dispositif didactique employé est celui du PER-FP (Ruiz-Olarría, 2015) et le PER sur lequel il est basé est celui de l'introduction scolaire des nombres négatifs dans un environnement algébrique (Cid & Bolea 2010, Cid & Ruiz-Munzón, 2011).

Resumen. En esta comunicación comentamos el desarrollo de una experiencia piloto para presentar un REI en el marco de la formación didáctica inicial de los futuros profesores de Educación Secundaria. Se pretende contribuir con ello a la difusión de dicha metodología en las instituciones educativas. El dispositivo didáctico utilizado es el del REI-FP (Ruiz-Olarría, 2015) y el REI en el que se basa es el de la introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico (Cid & Bolea, 2010; Cid & Ruiz-Munzón, 2011).

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

1. Los REI-FP en la formación inicial del profesorado de matemáticas

Frente a un paradigma didáctico *monumentalista* que presenta el saber matemático como si se tratará de monumentos a visitar, olvidando su razón de ser y privándolo de sentido, la TAD propone un paradigma didáctico de *cuestionamiento del mundo* que propugna una presentación funcional del saber frente a la tradicional presentación esencialmente formal. Esta manera de entender la enseñanza de las matemáticas convierte los procesos de modelización matemática, tanto externa como interna, en el eje que vertebra dicha enseñanza, proporcionando las razones de ser que dan sentido a los objetos matemáticos y poniendo de manifiesto las relaciones que existen entre ellos, en vez de presentarlos como objetos aislados.

Todo esto se concreta en los *recorridos de estudio e investigación* (REI) en los que se plantea a los alumnos un proyecto de modelización matemática a través de una cuestión inicial. El trabajo de la clase a lo largo de varias sesiones da lugar a distintas cuestiones particulares cuyas respuestas exigen la emergencia de diferentes objetos matemáticos que finalmente contribuyen a contestar a la cuestión inicial (Chevallard, 2009). Los saberes aparecen aquí como máquinas productoras de conocimientos útiles para dar respuesta a las cuestiones planteadas (presentación funcional), frente a una presentación en vacío que relega a un segundo plano las cuestiones y las respuestas (Chevallard, 2004).

En estos últimos años la investigación didáctica en el marco de la TAD ha diseñado un número considerable de REI que abarcan distintos ámbitos de la matemática y distintas etapas educativas. Sin embargo, la transferencia de estos resultados al sistema educativo español ha sido muy escasa. Es por eso que nos planteamos la necesidad de introducir los REI en la formación inicial de profesores.

Sin embargo, tal como indica Alicia Ruiz-Olarría (2015), esto exige que los dispositivos didácticos que se utilicen en la formación del profesorado tengan también estructura de REI, lo que denomina *recorrido de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP), y que se inicien con una cuestión viva y crucial para la profesión docente.

A partir de ahí, Ruiz-Olarría (2015) describe cinco módulos cuya articulación dará lugar al REI-FP. Son los siguientes:

– *Módulo M_0. ¿Cómo enseñar C?* Se parte de una cuestión inicial que forme parte de la problemática de la profesión y se trata de formular unas primeras respuestas, basadas en la revisión de los *media* que usan habitualmente los profesores, que darán lugar a nuevas cuestiones y a una reformulación de la cuestión inicial en términos más precisos.
– *Módulo M_1. Vivir un REI.* En este módulo se pide al profesor en formación que viva un REI en posición de alumno como respuesta a la cuestión inicial reformulada.
– *Módulo M_2. Analizar el REI vivido.* La cuestión que dirige esta fase del REI-FP gira en torno al cuestionamiento matemático didáctico del REI vivido, tanto en lo que respecta a la praxeología matemática construida como a la organización didáctica del proceso.
– *Módulo M_3. Diseñar un REI.* En esta fase el profesor en formación debe diseñar un REI análogo al vivido lo que le conducirá a explicitar los criterios básicos para su construcción.
– *Módulo M_4. Gestionar y experimentar un REI.* La experimentación del REI diseñado permitirá analizar las dificultades y obstáculos que su puesta en práctica produce y proporcionará criterios para modificar su diseño de cara a nuevas experimentaciones.

En este trabajo pretendemos mostrar una experiencia de implementación de un REI-FP en un curso de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria basado en el REI de introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico (Cid & Bolea, 2010; Cid & Ruiz-Munzón, 2011).

2. El REI de introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico

La introducción escolar de los números negativos se suele hacer en un entorno aritmético y se apoya en modelos concretos basados en la presentación de magnitudes opuestas o relativas. Sin embargo, diversas investigaciones han puesto en duda la pertinencia de dicha introducción, bien porque se constata que la analogía con los modelos concretos puede crear dificultades a una correcta construcción de la estructura algebraica de los números con signo (Gallardo, 1994; Cid, 2002, entre otros muchos), bien porque los estudios epistemológicos muestran que la verdadera razón de ser de los números con signo es el trabajo algebraico (Chevallard, 1988) y que la aritmética no solo no tiene necesidad de ellos, sino que históricamente supuso un obstáculo para su aceptación (Glaeser, 1981; Brousseau, 1983; Schubring, 1986; Cid, 2002, 2015).

Como consecuencia de ello, en Cid y Ruiz-Munzón (2011) se diseña un REI para la introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico. Los criterios que dirigen la construcción del REI se establecen en Cid y Bolea (2010), donde se diseña un *modelo epistemológico de referencia* (MER) articulado en torno a varias cuestiones generatrices.

La cuestión generatriz global es: ¿Cómo resolver un problema aritmético en el que alguno de los datos que permiten su resolución es desconocido? La respuesta a esta cuestión obliga a introducir las letras y a sustituir las soluciones numéricas de los problemas por fórmulas. Como consecuencia, aparece la necesidad de considerar a los sumandos y sustraendos como elementos del cálculo algebraico para terminar interpretándolos como un nuevo conjunto numérico que amplía el de los números naturales.

El desglose de la cuestión generatriz global en varias subcuestiones locales permite el desarrollo de las técnicas algebraicas de cálculo y el establecimiento de la estructura algebraica de sumandos y sustraendos (convertidos posteriormente en los números enteros) y de los distintos significados de los signos "+" y "–".

Por otro lado, en Cid et al. (2017) se establece la conexión entre el MER de introducción escolar de los números negativos y el MER de modelización algebraico funcional definido en Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Munzón et al. (2010, 2011), que continúa una línea de investigación iniciada por Chevallard (1989). Este último MER se establece por contraposición al modelo epistemológico-didáctico del álgebra elemental dominante en el sistema educativo, que suele recibir el nombre de *aritmética generalizada* y se caracteriza por considerar el álgebra como un mero epifenómeno de la aritmética (Gascón, 1994-95; Bolea, 2003).

La integración del MER de introducción escolar de los números negativos en la primera etapa del MER de modelización-algebraico funcional lo convierte en uno de los dispositivos didácticos que permiten afrontar el *paso de la aritmética al álgebra* en la institución escolar.

3. Condiciones de la experimentación

La implementación del REI-FP se realizó en una asignatura del Máster Universitario en Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas) durante el curso 2016-17. Se trata de un Máster de 60 créditos en el que se da una formación didáctica a graduados en matemáticas, física o ingeniería y es obligatorio cursarlo para poder ejercer como profesor de Educación Secundaria.

La asignatura tiene un sesgo claramente teórico por lo que la implementación del REI-FP debe servir también para construir un marco teórico de referencia que pueda ser utilizado en otras asignaturas más cercanas a la práctica docente. Es una asignatura de 4 créditos (4 horas de clase a la semana) que se imparte en el primer semestre durante aproximadamente 10 semanas, lo que supone alrededor de 40 horas de clase. La experiencia piloto se desarrolló durante 13 sesiones de 2 horas de duración.

El número de estudiantes matriculados en la asignatura fue de 18 (10 ingenieros, 2 físicos y 6 matemáticos) y todos menos uno asistieron a clase regularmente. Para el trabajo en grupo se organizaron 6 grupos de 3 estudiantes. Cada grupo debía comunicar sus resultados por escrito y posteriormente se ponían en común. Las clases las impartieron dos de los autores de la comunicación que recogieron todo la producción escrita de los estudiantes, tanto individual como en grupo, y se turnaron para tomar notas del desarrollo de las sesiones.

4. Diseño y desarrollo del REI-FP

Utilizamos el diseño de REI-FP propuesto por Ruiz-Olarría (2015), pero introduciendo algunas modificaciones que afectan sobre todo a los módulos M_0 y M_2 y que se comentan más adelante. El módulo M_4 no se pudo desarrollar porque los periodos de prácticas de los estudiantes no coinciden con el momento en que se introduce en los centros escolares los números negativos.

4.1. Desarrollo de módulo M_0

La experiencia adquirida en la impartición de la asignatura en años anteriores nos hizo ver que a la pregunta de cómo enseñar un determinado contenido matemático los estudiantes del Máster respondían con soluciones muy cercanas a su experiencia como alumnos de secundaria y no veían la necesidad de explorar otras posibilidades.

Nos planteamos entonces redefinir la cuestión generatriz de M_0 en términos de mostrar la necesidad de pasar de un problema docente a un problema didáctico, en el sentido señalado por Gascón (2011). En este caso, el problema docente se formuló de la siguiente manera Q_0: *¿cómo mejorar la enseñanza de los números negativos y de los comienzos del álgebra escolar para que los alumnos cometan menos errores de cálculo y entiendan mejor los conceptos?*, mientras que el problema didáctico se expresó al final de M_0 en los siguientes términos: *¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza de los números enteros que ponga de manifiesto la ruptura epistemológica existente entre el quehacer aritmético y el algebraico?*

En consecuencia, las tareas que se plantean en las distintas sesiones del módulo M_0 no van encaminadas a que los estudiantes den una primera respuesta al problema docente, sino a que vean la necesidad de la formulación del problema didáctico que se convierte así en la cuestión generatriz Q_0, a la que habrá que responder en los siguientes módulos.

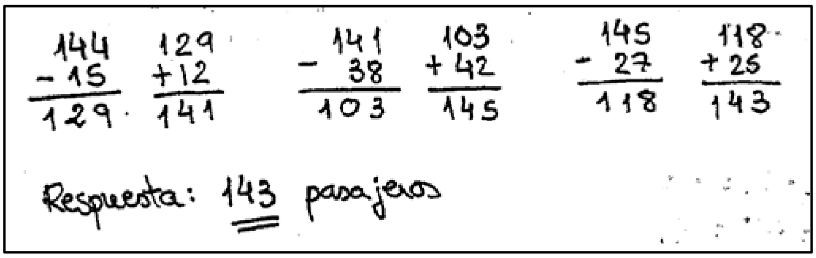
En la primera sesión, después de presentar la asignatura, se entregó a los estudiantes del Máster un pequeño cuestionario dirigido a alumnos de 1º de ESO (niños entre 12 a 13 años), se pidió que lo contestasen individualmente y se recogieron las respuestas. El cuestionario incluía la realización de algunas operaciones con expresiones algebraicas y la resolución de algunos problemas aritméticos en los que la utilización de números negativos podía dar lugar a un camino operacional más corto.

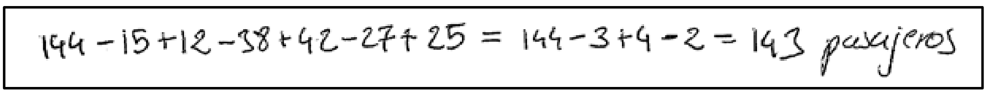
En la segunda sesión se entregaron las respuestas que algunos alumnos de 1º de ESO habían dado a ese mismo cuestionario y se les planteó por grupos la cuestión Q_{01}: *¿Cuáles han sido los errores cometidos por los niños y cuáles son sus posibles causas?* Una vez acabado el trabajo de los grupos, el profesor explicó las condiciones de realización del cuestionario en 1º de ESO y la frecuencia de respuestas erróneas lo que legitimó el planteamiento del problema docente.

En la tercera sesión se hizo una puesta en común de las respuestas dadas por los grupos a la cuestión Q_{01} y de ahí surgió la cuestión Q_{02}: *¿Qué diferencias hay entre el quehacer aritmético y el quehacer algebraico?* A lo largo de esta sesión y de las siguientes, se trabajan distintas respuestas a esta cuestión. En particular, en esta tercera sesión, se comentan tanto las estrategias seguidas por los estudiantes del Máster en la resolución del cuestionario como los errores cometidos por los alumnos de 1º de ESO y las explicaciones que daban los grupos sobre sus causas.

Aun cuando todos los estudiantes contestaron correctamente, los distintos caminos operacionales seguidos permitieron poner de manifiesto las diferencias existentes entre el quehacer aritmético y el quehacer algebraico.

Por ejemplo, ante el problema aritmético: *Un tren sale de Zaragoza con cierto número de pasajeros. En la primera parada bajan 15 y suben 12; en la segunda parada bajan 38 y suben 42 y en la tercera parada bajan 27 y suben 25. ¿Con cuántos pasajeros llegará el tren a su destino si salió de Zaragoza con 144 pasajeros?*, se obtuvieron, entre otras, las siguientes respuestas:





Las dos respuestas son correctas pero permiten escenificar algunas de las diferencias entre el quehacer aritmético y el algebraico. En el primer caso, el estudiante sigue un camino operacional entre números naturales caracterizado por realizar las operaciones de una en una y con una escritura vertical. Estamos ante una estrategia de resolución claramente aritmética, mientras que, en el segundo caso, se simboliza en una sola expresión en línea las operaciones a realizar, las distintas fases del cálculo se escriben horizontalmente y ligadas por el signo "=" y, aunque el enunciado del problema se refiere a números naturales, el resolutor no tiene inconveniente en reinterpretarlos como números enteros para simplificar el cálculo, lo que nos coloca en un ámbito claramente algebraico.

Por otra parte, el análisis de los errores de los alumnos de 1º de ESO y sus posibles causas hizo aflorar otras diferencias entre la aritmética y el álgebra: los distintos significados de los signos operacionales y relacionales y de las letras; la compleja sintaxis de las expresiones algebraicas; las técnicas de cálculo algebraico como técnicas que exigen reflexión y se rigen por un principio de economía frente a las técnicas aritméticas fuertemente algoritmizadas; la *diferencia* entendida como término de comparación numérica frente a la *resta* entendida como resultado de la acción de suprimir; etc. Esto permitió a los grupos elaborar en la cuarta sesión un listado de diferencias entre el quehacer aritmético y algebraico que fue finalmente institucionalizado por el profesor.

En la quinta sesión se les pidió un comentario sobre diferentes textos históricos que muestran que los números negativos surgen por necesidades del cálculo algebraico y los obstáculos a los que la comunidad matemática de diferentes épocas históricas se tuvo que enfrentar para asumirlos.

La sexta sesión se dedicó a institucionalizar el corpus teórico aparecido hasta el momento: obstáculo epistemológico o didáctico, razón de ser, ruptura epistemológica, salto informacional, etc., concluyendo que:

– el paso de la aritmética al álgebra supone un ruptura epistemológica, es decir, un cambio fundamental en la manera de entender el trabajo matemático y

– los números negativos se sitúan en el inicio del álgebra escolar y su razón de ser son las necesidades del cálculo algebraico.

Esto permitió formular el problema didáctico, entendido como cuestión generatriz Q_0 a responder en los siguientes módulos.

4.2. Desarrollo de módulo M_1

En la séptima y octava sesiones se repartió el REI de introducción escolar de los números enteros en un entorno algebraico como respuesta al problema didáctico planteado y se pidió a los estudiantes, organizados en grupo, que vivieran el REI en posición de alumnos de 1º o 2º de ESO. Esto generó bastantes dificultades porque muchos estudiantes no eran capaces de imaginar qué sabían y cómo se podían comportar los niños de esa edad cuando resolvían las tareas propuestas. Finalmente, se puso a su disposición los diarios de clase de la experimentación del REI realizada en la ESO que actuaron como *media-milieu* y que permitieron el contraste y la validación de la vivencia de los estudiantes del Máster en posición de alumnos de ESO.

4.3. Desarrollo de módulo M_2

En la novena sesión, para posibilitar el análisis epistemológico, económico y ecológico del REI vivido, se institucionalizaron, además de las ya presentadas en M_0, distintas herramientas didácticas desarrolladas en la TAD o en la TSD: modelización matemática, praxeología, modelo epistemológico de referencia (MER), recorrido de estudio e investigación (REI), contrato didáctico, momentos didácticos, transposición didáctica, paradigma del cuestionamiento del mundo, etc.

En la décima sesión se les entregó a los grupos un guion con preguntas a las que tenían que responder para facilitar un análisis del REI que permitiera poner de manifiesto el MER que lo sustenta. Como trabajo para casa se les pidió que leyeran los artículos de Cid y Bolea (2010) y Cid y Ruiz-Munzón (2011) y enviaran a través de la plataforma digital tres preguntas o comentarios que les había sugerido su lectura.

Por último, en la undécima sesión, se completó el análisis del REI. Además, la introducción de las nuevas herramientas didácticas y la explicitación del MER permitió ampliar el problema didáctico planteado en M_0 de manera que finalmente quedó formulado de la siguiente manera: *¿Cómo elaborar una propuesta de enseñanza de los números enteros que ponga de manifiesto la ruptura epistemológica existente entre el quehacer aritmético y el algebraico y que permita el desarrollo del álgebra escolar entendida como instrumento de modelización?*

Después de esto, se planteó un trabajo dirigido consistente en que a cada grupo se le entregó un texto escolar de manera que los seis textos elegidos representaran distintas épocas históricas desde finales del siglo XIX hasta nuestros días. Cada grupo realizó un análisis epistemológico, económico y ecológico de la propuesta de enseñanza de los números negativos planteada en el libro. Al cabo de un mes, después de una tutoría de control de cada grupo con alguno de los profesores, expusieron su trabajo en dos sesiones más de clase.

En la realización de estos trabajos los grupos demostraron su capacidad para manejar las herramientas de la TAD con cierta soltura y utilizarlas para el análisis de propuestas didácticas.

4.4. Desarrollo de módulo M_3

En cuanto al módulo M_3, se pidió a los estudiantes, como trabajo para casa, que diseñaran por su cuenta un REI de introducción de los números negativos. Las respuestas no aportaron nada interesante: o bien reproducían con más o menos detalle el REI que habían estudiado, o planteaban una enseñanza basada en el modelo tradicional que suele encontrarse en los libros de texto. La experiencia resulto fallida por lo que no se realizó ninguna sesión de clase para poner en común las respuestas. También hay que decir que después de tantas sesiones los estudiantes mostraron su cansancio por un desarrollo del REI-FP tan dilatado en el tiempo.

Sin embargo, en el trabajo Fin de Máster, en el que tenían que hacer una propuesta didáctica sobre algún otro contenido matemático, sí que se observó que bastantes estudiantes se esforzaron por dar una respuesta en forma de praxeología y por utilizar la terminología de la TAD para describirla y fundamentarla.

5. Conclusiones

Los resultados de la experiencia muestran las enormes dificultades existentes para que los futuros profesores analicen su epistemología espontánea, adquirida como consecuencia de los muchos años de permanencia en el sistema educativo en su rol de alumnos y reforzada por su experiencia durante el periodo de prácticas que realizan en el Máster. A pesar de ello, se puede decir que a través de dicha experiencia, los futuros profesores:

– fueron conocedores de que existe una disciplina, la *didáctica de las matemáticas*, que puede aportar información útil a los profesores de matemáticas,

– vieron que las matemáticas escolares no son *transparentes* y deben ser analizadas y reelaboradas y el importante papel que la epistemología de las matemáticas tiene en ese proceso,
– entraron en contacto con el paradigma del cuestionamiento del mundo como alternativa al monumentalismo imperante en el sistema educativo, y
– tomaron conciencia de que el paso de la aritmética al álgebra supone una ruptura epistemológica y de que la razón de ser de los números con signo se encuentra en el álgebra.

Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Chevallard, Y. (1988). La dialectique entre études locales et théorisation: le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré En G. Vergnaud et al. (Eds): *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (305-323). La Penseé Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modelisation. *Petit x*, *19*, 45-75.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Conferencia impartida en el IUFM de Toulouse el 29 de abril.

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (Zaragoza), vol. 2*, 529-542.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (Eds.): *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (575-594). IUFM de l'académie de Montpellier.

Cid, E. & Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (Eds.): *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (579-604). Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. & Ruiz-Munzón, N. (2017). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. En G. Cirade et al. (Eds.): *Evolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (325-342).

Gallardo, A. (1994). Negative numbers in algebra. The use of a teaching model. *Proceedings of the 18th International Conference of PME (Lisboa)*, vol. 2, 376-383.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(2), 203-231.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. (Tesis doctoral). Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner et al. (Eds.): *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (655-675). IUFM de l'académie de Montpellier.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch et al. (Eds.): *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (743-765). Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, España.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, *12*, 5-32.

T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique

Hamid Chaachoua

LIG, Université Grenoble Alpes, France

Abstract. This paper describes a theoretical framework T4TEL development, that was originally developed to meet the design needs of IT environments. We present its foundations, its interest and its contributions in research in didactics of mathematics out of computer field.

Resumen. Este texto propone una síntesis del desarrollo de un marco de referencia T4TEL que, al principio, ha sido desarrollado para responder a necesidades de diseño de entornos informáticos. Presentamos sus fundamentos, su interés y sus aportaciones en investigaciones en didáctica de las matemáticas fuera de campo informático.

Résumé. Ce texte propose une synthèse de développement d'un cadre de référence T4TEL qui, à l'origine, a été développé pour répondre à des besoins de conception d'environnements informatiques. Nous présentons ses fondements, son intérêt et ses apports dans des recherches en didactique des mathématiques hors champ informatique.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. Contexte

Les recherches menées au sein de mon équipe s'inscrivent dans le domaine des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH), où la modélisation des connaissances et savoirs est une question centrale. En effet, elle est à la base des différents services proposés par les EIAH comme l'indexation et la gestion des ressources, la conception des scénarios d'apprentissage ou la production de diagnostics et de rétroactions vers l'élève ou vers l'enseignant.

C'est dans ce contexte, et afin de disposer d'un modèle didactique pouvant être implémenté, Hamid Chaachoua (2010) a développé le cadre de référence T4TEL [1]. Une validation de cette modélisation a été faite dans le cadre du projet « Cartographie des savoirs » [2], où les praxéologies ont été représentées selon le modèle ontologique, et ses applications ont permis de développer des outils pour les enseignants du primaire : production de profils des élèves, production de tests de diagnostic.

Le cadre T4TEL s'inscrit dans la théorie anthropologique du didactique développée par Yves Chevallard (1992, 1999) et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique (Bosch & Chevallard, 1999) : ce modèle représente une formalisation et une extension du modèle praxéologique. Deux extensions importantes ont été faite : l'introduction de la notion de praxéologie personnelle par Marie-Caroline Croset & Hamid Chaachoua (2016) et de la notion de variable par H. Chaachoua & Annie Bessot, (sous-presse). Dans le prochain paragraphe, nous présentons les fondements de T4TEL. Ensuite, nous présenterons ses développements récents et quelques applications.

2. Fondements de T4TEL

Nous reprenons le postulat de la TAD que toute activité humaine peut être modélisée par un quadruplet praxéologique [T / τ / θ / Θ]. Ainsi, une organisation mathématique ponctuelle regroupe les tâches pouvant être accomplies par une ou plusieurs techniques, justifiée par une technologie,

1. T4TEL : *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* à Technology Enhanced Learning. Ce cadre est le résultat d'un travail de l'équipe MeTAH.
2. Projet « Cartographie des savoirs » (2012-2014) ; voir http://intranet.cartodessavoirs.fr.

elle-même légitimée par une certaine théorie. Un des premiers enjeux de T4TEL est de disposer d'un modèle permettant de décrire les composantes d'une praxéologie ponctuelle, de rendre compte des relations entre les éléments d'une praxéologie et de décrire une structuration entre les différentes praxéologies. Un deuxième enjeu est de construire des fonctions didactiques pour produire différents services cités plus haut : diagnostic, rétroactions, indexation de ressources…

2.1. Caractérisation de type de tâches et de sous-type de tâches

Comme dans la TAD, un objet premier est la notion de type de tâches : dans T4TEL nous irons jusqu'à définir une technique comme une suite de type de tâches (cf. paragraphe 2.3). Nous rejoignons le point de vue adopté par Y. Chevallard (1999) que :

> Enfin, tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique.

Ce qu'observe un chercheur dans une institution donnée ce sont des tâches : comment peut-il définir un type de tâches ? Ou encore comment rattacher et organiser les tâches autour d'un même type de tâches ? Dans un premier temps il est possible de les regrouper par genre de tâches comme « calculer », « démontrer » etc., puis, dans un deuxième temps, les discriminer par rapport aux objets communs sur lesquels porte l'action et par rapport aux moyens communs d'accomplir les tâches.

Remarquons que pour une institution d'enseignement donnée, on ne considèrera que les types de tâches mis à l'étude possédant au moins une technique.

Nous présentons ci-dessous une caractérisation de type de tâches.

Un *type de tâches T* est un ensemble de tâches tel que :

- toute tâche est décrite par un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline ;
- il existe une technique τ qui accomplit au moins une tâche de T ;

− si τ est une technique qui accomplit une tâche *t* de *T* alors, soit $P(\tau)$[3] est un sous-ensemble de *T*, soit *T* est un sous-ensemble de $P(\tau)$.

Exemple. Au début du collège on rencontre le type de tâches institutionnel T : « Résoudre une équation de degré 1 à coefficient entiers ». Plusieurs techniques seront étudiées comme celle qu'on qualifie d'arithmétique qui consiste à utiliser les opérations inverses. La portée de cette technique est un sous-ensemble de T. Une autre technique consiste à utiliser les transformations algébriques sur les équations dont la portée contient T.

On dit que *T'* est un *sous-type de tâches* du type de tâches *T* si

− *T'* est un sous-ensemble de *T* ;
− *T'* est un type de tâches.

Exemple. Considérons le type de tâches T_{eq2} « résoudre une équation de second degré ». Il existe une technique, celle du discriminant, qui accomplit toutes les tâches de *T*. Il existe d'autres techniques, comme la technique basée sur l'utilisation de la règle du produit nul dont la portée est l'ensemble des tâches T_{PN} « résoudre des équations de la forme $P(x)Q(x) = 0$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes de degré 1 ». T_{PN} est un sous-type de tâches de T_{eq2}.

Un type de tâches *T* est décrit par un verbe d'action et un complément que nous représentons par *T* = (Verbe d'action, Complément). Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer » ou « Intégrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique et, pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, nous avons introduit les notions de système de variables et de générateur de types de tâches (Chaachoua & Bessot, sous presse).

2.2. Générateur de types de tâches et système de variables

Nous définissons un *générateur* de types de tâches par

GT = [un verbe d'action, un complément fixe ; un système de variables]

[3] $P(\tau)$, *la portée d'une technique* τ, est l'ensemble des tâches accomplies par τ. Il s'agit d'une portée théorique ne traduit pas nécessairement le domaine de pertinence de la technique (cf. paragraphe 2.2)

où le système de variables désigne une liste de variables avec les valeurs qu'elles peuvent prendre.

Notons qu'un générateur de types de tâches n'est pas un type de tâches, mais qu'il permet d'engendrer des types de tâches selon une structuration hiérarchique. Le niveau le plus générique est défini sans aucune instanciation de variable, et il s'agit donc du type de tâches défini par le verbe d'action et le complément. Les différentes instanciations des variables permettent d'engendrer des types de tâches plus spécifiques.

Exemple. Considérons le générateur de types de tâches GT_s = [Calculer, la somme de deux nombres entiers ; V1, V2], où V1 est la taille du premier nombre (nombre de chiffres) et V2 la taille du second nombre (nombre de chiffres).

Dans cet exemple le complément fixe est « la somme de deux nombres entiers ». Un autre choix possible est de considérer comme complément fixe « la somme de deux nombres », qui est plus générique, et d'ajouter une autre variable sur la nature du nombre (entier, rationnel, réel…). Le choix de niveau de granularité est un point important dans la construction des générateurs de types de tâches, qui dépend des questions de recherche et de l'institution [4] cible.

Par exemple, si l'institution cible est l'enseignement primaire (élèves de 6-11 ans), on peut introduire une variable V3 portant sur la nature des nombres qui prend au moins deux valeurs : entiers et décimaux. On obtient alors comme générateur de types de tâches GT_s = [Calculer, la somme de deux nombres ; V1, V2, V3].

Nous avons considéré trois fonctions dévolues aux variables (Chaachoua & Bessot, sous presse) :

1) Générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable. Par exemple les type de tâches T_{S1} « calculer la somme de deux entiers de taille 1 » et T_{S2} « calculer la somme d'un entier de taille 1 et d'un entier de taille supérieure à 2 » sont disjoints et sont des sous-types de tâches de T_{S3} « calculer la somme de deux entiers de taille inférieures ou égales à 2 ».

4. Il peut y avoir plusieurs institutions, comme dans le cas des études comparées.

2) Caractériser les portées des techniques et leurs domaines de pertinence. Par exemple, la technique dite de sur-comptage[5] est pertinente pour T_{S2}. Bien sûr, elle peut s'appliquer pour des nombres à deux chiffres mais le coût est important et elle peut échouer. On considère T_{S2} comme domaine de pertinence de cette technique, domaine qui est inclut dans sa portée.

3) Décrire les praxéologies personnelles. Pour rendre compte des praxéologies personnelles des élèves (Croset & Chaachoua, 2016) qu'elles soient valides ou non, nous enrichissons *a posteriori* les valeurs des variables.

Les deux premières fonctions « apparaissent comme particulièrement intéressantes pour conduire des analyses *a priori* (point de vue épistémologique et didactique) et calculer des parcours d'apprentissage à partir d'un jeu sur ces variables et leurs valeurs. En particulier, la construction d'un modèle de praxéologie de référence pour un domaine mathématique (au sens de l'échelle de codétermination) inclut de fait pour nous l'explicitation de variables et de leurs valeurs possibles » (Chaachoua & Bessot, sous presse).

Conditions et contraintes (institutionnelles). Les conditions et contraintes dans une institution donnée vont restreindre non seulement le type de tâches, mais aussi les variables ou les valeurs possibles d'une variable d'un type de tâches institutionnel. Par exemple, au début de l'école primaire (élèves de 3-6 ans) on se limite aux nombres entiers inférieurs à 30.

Ainsi, « une variable et ses valeurs institutionnelles modélisent des conditions et des contraintes explicites ou implicites (relevant des niveaux de l'échelle de codétermination) sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement. » (Chaachoua & Bessot, sous presse). Soulignons que le découpage institutionnel en valeurs d'une variable peut ne pas avoir de pertinence épistémologique.

Variable « Ostensifs ». Une des variables importantes est « ostensifs » qui peut prendre différentes valeurs. Ce type de variables joue un rôle au niveau du type de tâches, et des tâches, mais aussi au niveau de la

5. Pour ajouter 7 à 23 on compte 24, 25…

technique puisque les ostensifs sont les ingrédients premiers d'une technique.

Par exemple, dans sa thèse, Nathalie Brasset (2017) considère le générateur de type de tâches GT = [Traduire, un nombre d'un ostensif de départ vers un ostensif d'arrivée ; V1, V2, V3] où V1 est l'ordre de la plus grande unité de numération dans le nombre en jeu, V2 l'ostensif de départ et V3 l'ostensif d'arrivée. Dans ce travail la considération des ostensifs dans les variables permet de structurer les types de tâches.

Cependant, il manque un véritable travail conceptuel sur l'intégration des ostensifs dans T4TEL. C'est ce qui est au cœur de la thèse (en cours) de Danielly Kaspary. Elle s'appuie sur son travail d'étude du rôle des ostensifs dans les techniques et leurs évolutions. Cela est lié en partie aux portées des techniques et à leurs domaines de pertinence. Par exemple pour le type de tâches « calculer la somme de deux entiers », la technique qui mobilise les doigts pour compter de compter de 1 en 1 a pour domaine de pertinence le type de tâches T_{S2}. Celle-ci doit évoluer en dehors de ce domaine en mobilisant d'autres ostensifs.

2.3. Description des techniques

Certains travaux proposent des descriptions des techniques sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décomposent en sous-tâches. Par exemple, Gisèle Cirade et Yves Matheron (1998) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches « résoudre une équation du premier degré », par les sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme ax = b.

Dans T4TEL, une technique τ est décrite par un ensemble de types de tâches $\{(T_i)_i\}$, chacun d'entre eux pouvant être de deux sortes :

- d'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches, appelés *types de tâches intrinsèques*[6] ;

[6] Ce terme est pour désigner que le type de tâches ne vit que dans les techniques a contrario pour les types de tâches extrinsèques. C'est le cas de « transposer les termes » dans une équation ;

− d'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves, qualifiés de *types de tâches extrinsèques*.

Exemple. Pour le type de tâche T_{S2}, une des techniques est de poser l'addition. On peut la décrire par au moins deux types de tâches : T_D « disposer en colonne l'addition des deux nombres » et T_{S1} « calculer la somme de deux entiers de taille 1 ». Le type de tâches T_D est intrinsèque : il n'est pas prescrit par l'institution tout en ayant une praxéologie, en particulier une technique et une technologie. Le type de tâches T_{S1} est extrinsèque car il est prescrit au début de l'école primaire.

Les types de tâches intrinsèques ont eux aussi leurs propres praxéologies, qui peuvent même être prescrites aux élèves pendant un moment sous des formes adaptées dans des organisations didactiques, comme T_{S1}. Prenons un exemple autour de l'ostensif « tableau de variation », où l'institution crée des organisations didactiques autour des types de tâches comme « compléter le tableau de variation » ou « lire un tableau de variation ». Ces types de tâches ne vivent ensuite que comme ingrédients de techniques d'autres types de tâches.

Remarquons que chaque type de tâches qui est un ingrédient d'une technique a lui-même une ou plusieurs techniques qui s'expriment à leur tour par un ensemble de types de tâches. Nous avons introduit la notion de type de tâches élémentaire pour exprimer qu'à un niveau donné de la description on arrête le processus.

Un type de tâches est *élémentaire* pour l'institution ou le chercheur si cette instance considère qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter la ou les techniques pour ce type de tâches.

Au niveau de l'institution le statut élémentaire est souvent réglé au niveau du contrat didactique et évolue dans le temps : ce qui devait être explicité à un moment donné ne l'est plus à un autre moment. Par exemple T_S qui n'est pas élémentaire au niveau de l'école primaire devient élémentaire à partir du lycée (élèves de plus de 16 ans). Au niveau du chercheur il peut désigner des types de tâches comme élémentaires dans la construction de son modèle.

A l'aide des notions de type de tâches intrinsèques, extrinsèques et élémentaires on peut décrire toutes les techniques. Cependant, une question se pose sur le niveau de granularité pour décrire une technique, qui peut se traduire par : Quels sont les critères de choix des types de tâches qui interviennent dans la description d'une technique ?

Nous présentons les critères retenus. Soit τ une technique d'un type de tâches *T* d'un générateur GT. Les types de tâches qui composent la technique τ peuvent être

- des types de tâches intrinsèques ;
- des types de tâches extrinsèques générés par GT ;
- des types de tâches extrinsèques générés par d'autres générateurs de types de tâches GT', mais du niveau le plus générique. C'est-à-dire le type de tâches obtenu par le verbe et par le complément fixe sans aucune instanciation de variables.

Exemple. Pour décrire une technique du type de tâches « résoudre une équation de degré 2 » on peut mettre des types de tâches du même générateur comme « résoudre une équation du produit nul » ou des types de tâches générés par un autre générateur comme « factoriser un polynôme ».

2.4. Description des technologies et théories

Dans la TAD, la technologie est un discours rationnel qui permet de justifier, de produire, de rendre intelligible, de contrôler et d'adapter une technique (Chevallard, 1992).

Nous modélisons la technologie par un ensemble d'énoncés E_i qui ont un statut et un domaine de validité. Le statut peut être : définition, propriété, règle, croyance… Le domaine de validité précise la validité de l'énoncé par rapport à un domaine de référence.

Comme la théorie est pour la technologie ce que la technologie est pour la technique, nous adoptons la même modélisation pour la théorie.

2.5. Praxéologies personnelles

Dans Chaachoua (2010) et Croset et Chaachoua (2016) nous avons introduit *praxéologie personnelle* constituée de quatre composantes.

Un *type de tâches personnel* est « l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique. Si deux types de tâches personnels sont distincts, alors nécessairement leurs techniques personnelles respectives sont distinctes. » (ibid. p. 180). Le découpage en types de tâches personnels ne correspond donc pas nécessairement à celui de l'institution : nous caractérisons ce découpage par des valeurs de variables qui peuvent ne pas être pertinentes du point de vue institutionnel.

Une *technique personnelle* permet de résoudre un seul type de tâches personnel : elle peut être correcte – attendue ou non dans l'institution – ou erronée. Elle doit présenter une certaine stabilité pour accomplir un type de tâches personnel dans le temps. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique personnelle des erreurs erratiques.

Nous faisons l'hypothèse qu'il existe une *technologie personnelle* qui peut être explicite ou non. Il est important du point de vue de la recherche d'expliquer l'origine des technologies personnelles non seulement dans les conditions et contraintes institutionnelles mais aussi dans le processus d'étude vécu par les élèves. Soulignons qu'une technologie, qu'elle soit personnelle ou institutionnelle, ne se réduit pas à un ensemble de théorèmes ou de règles mathématiques. C'est un discours qui permet de justifier, de produire, de rendre intelligible, de contrôler et d'adapter une technique. Elle est constituée de plusieurs ingrédients qui peuvent relever des mathématiques, de théorèmes en acte, de définitions en acte, de règles du contrat didactique ou institutionnel, etc.

Une *théorie personnelle* qui, à son tour, à l'instar du modèle praxéologique institutionnel, justifie la technologie personnelle.

3. Mises en œuvre du cadre T4TEL

Dans ce paragraphe nous présentons des exemples de mises en œuvre du cadre T4TEL dans des travaux passés ou en cours.

3.1. Indexation des ressources

Dans un travail de thèse en cours Sébastien Jolivet qui vise à proposer un modèle de description de ressources de type « exercices et problèmes » de mathématiques basé sur des critères didactiques, la place de T4TEL est centrale pour au moins trois raisons :

- l'utilisation des variables permet une structuration d'un modèle praxéologique de référence permettant de rechercher des relations entre différents types de tâches présents dans une même ressource ;

- l'intégration en cours des ostensifs dans le modèle T4TEL permet de les prendre en compte dans la description des ressources ;
- la dimension calculable de la représentation permet de placer le travail dans une perspective EIAH.

3.2. Construction d'un MPR

Pour valider notre modèle, nous l'avons mis en œuvre dans différents domaines relevant de disciplines différentes : conception expérimentale en chimie, électricité, algèbre élémentaire (Chaachoua, 2010) (Croset, 2009), numération (Chaachoua, 2016 ; Brasset, 2017) et géométrie dans l'espace (Tang, 2014). Dans ce paragraphe nous illustrons le dernier domaine.

Dans une recherche sur l'analyse comparative des rapports institutionnels en France et au Vietnam à l'objet « représentation en perspectives » Tang (2014) a construit un modèle praxéologique de référence pour analyser les activités et les exercices des manuels des deux pays. Pour cela il s'est placé dans le cadre T4TEL et, à l'aide des variables, il a structuré le MPR autour de 8 générateurs de types de tâches. Par exemple, le générateur GT = [Étudier ; l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné ; V1, V2] où V1 est « objet géométrique de l'espace » et V2 est « objet géométrique du plan » avec les valeurs qu'elles peuvent prendre.

La description des techniques à l'aide des types de tâches lui a permis de mettre en évidence l'intervention des types de tâches dans les techniques d'autres types de tâches (cf. Annexe 1). L'analyse des rapports institutionnels des deux pays à partir du modèle de référence a mis en évidence des différences sur le choix de certaines variables mais aussi sur les valeurs qu'une variable peut avoir dans chacune des deux institutions.

Enfin, pour étudier le rapport personnel de l'élève à l'objet « représentation en perspective », il a joué sur les valeurs des variables d'un type de tâches pour confronter les élèves à des situations inhabituelles et donc non conformes au rapport institutionnel.

3.3. Modélisation des praxéologies personnelles

On trouve un exemple d'exploitation des praxéologies personnelles en EIAH dans la thèse de Catherine Bonnat (2017). L'étude porte sur une modélisation de l'erreur dans une situation de conception expérimentale en biologie proposée dans une plateforme informatique. Cela se traduit par une modélisation de praxéologies personnelles *a priori* qui s'appuie sur de possibles erreurs portant sur la technique du type de tâches ou bien sur la valeur de variable de la tâche. La modélisation a été enrichie par l'analyse de productions d'élèves et participera dans un second temps à l'évolution de la plateforme vers la mise en place d'un diagnostic automatique des erreurs.

4. Conclusion

Si le développement de T4TEL a été motivé par des besoins liés à des problématiques EIAH, son développement s'est fait aussi dans des champs hors EIAH comme dans les travaux de Tang (2014) et Brasset (2017). Deux développements sont en cours dans la thèse Kaspary : intégration conceptuelle des ostensifs dans T4TEL et caractérisation des conditions et contraintes des rapports institutionnels à l'aide des variables. Un autre développement en cours concerne la construction des PER en s'appuyant en particulier sur le jeu des variables.

Au niveau des EIAH, le déploiement du cadre se poursuit par la conception des environnements informatiques en sciences expérimentales et en mathématiques autour des services : diagnostic et rétroactions, outil d'orchestration pour un professeur, indexation de ressources.

Références

Brasset, N. (2017). *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH Etude de facteurs de type histoire didactique* (Thèse de doctorat). Université Grenoble Alpes.

Bonnat, C. (2017). *Etayage de l'activité de conception expérimentale par un EIAH pour apprendre la notion de métabolisme cellulaire en terminale scientifique* (Thèse de doctorat). Université Grenoble Alpes.

Bosch, M. & Chevallard, Y (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* Vol. 19/1. Grenoble : La Pensée Sauvage. 77-124.

Chaachoua, H. & BESSOT A. (2017). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves* (Note de synthèse HDR). Grenoble : Université Joseph Fourier.

Chaachoua, H. Ferraton, G. & Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l’informatique 108* Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73 - 112.

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l’’étude 3. Écologie & régulation. In Dorier, J. L. et al. (Eds.), *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cirade, G. & Matheron, Y. (1998). Équation du premier degré et modélisation algébrique. Dans R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l’École d’été de la Rochelle* (pp. 199-250). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Croset, M-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte* (Thèse de doctorat). Grenoble : Université Joseph Fourier.

Croset, M-C. & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *36*(2).

Tang, M.D. (2014). *Une étude didactique des praxéologies de la représentation en perspective dans la géométrie de l'espace, en France et au Viêt Nam*. (Thèse de doctorat). Grenoble : Université Joseph Fourier.

Annexe 1. Praxéologies de référence épistémologiques concernant la représentation en perspective

La flèche indique que le type de tâches intervient dans la technique.

Type de tâches			Technique	Technologie	Théorie
1	Déterminer le tranformé d'un objet géométrique de l'espace par une transformation donnée.	$T^{objE,PC}_{1\_tr}$	$\tau^{objE,PC}_{1\_tr}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
2	Déterminer les tranformés possibles d'un objet géométrique de l'espace.	$T^{objE}_{s\_tr}$	$\tau^{objE}_{s\_tr}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
3	Etudier l'existence d'une transformation d'un objet géométrique de l'espace donné en un objet géométrique du plan donné.	$T^{objE\_objP}_{tr}$	$\tau^{objE\_objP}_{tr}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
4	Dessiner un objet géométrique de l'espace ».	T^{objE}_{De}	$\tau^{objE}_{De\_PC}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
			$\tau^{objE}_{De\_R}$	θ_{R}	Θ_{PC}
			$\tau^{objE}_{De\_D}$	θ_{D}	Θ_{R}
5	Associer un dessin donné à un objet géométrique de l'espace.	$T^{objE,D}_{AsDO}$	$\tau^{objE,D}_{AsDO\_PC}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
			$\tau^{objE,D}_{AsDO\_R}$	θ_{R}	Θ_{PC}
			$\tau^{objE,D}_{AsDO\_D}$	θ_{D}	Θ_{R}
6	Compléter le dessin d'un objet géométrique de l'espace.	$T^{objE,D}_{Comp}$	$\tau^{objE,D}_{Comp\_PC}$	θ_{PC}	Θ_{tr}
			$\tau^{objE,D}_{Comp\_R}$	θ_{R}	Θ_{PC}
			$\tau^{objE,D}_{Comp\_D}$	θ_{D}	Θ_{R}
7	Etudier une propriété des objets géométriques de l'espace représentés dans un dessin.	$T^{P,objS,D}_{EtP}$	$\tau^{P,objS,D}_{EtP}$	$\theta_{P,D}$	Θ_{R}
8	Identifier des objets géométriques de l'espace satisfaisant une propriété géométrique donnée à l'aide du dessin.	$T^{P,objS,D}_{IdO}$	$\tau^{P,objS,D}_{IdO}$	$\theta_{P,D}$	Θ_{R}

Figure 1. Praxéologie de référence (Dung, 2014, p. 92).

Phénomènes transpositifs de la didactique dans la profession de professeur

Michèle Artaud
ADEF, Aix-Marseille Univ., France

Abstract. The aim of this paper is to bright out some elements of the process of the archididactic transposition (Artaud, 2013) that carry some pieces of didactic knowledge from research institution into teacher profession. The focus will be on conditions and constraints that allow, promote or, on the contrary, compromise, prevent to integrate didactics in the praxeological equipment of teacher.

Résumé. À la lumière de la notion de transposition archididactique (Artaud, 1993), nous mettrons en évidence certains éléments du processus de ce type qui transporte de la didactique dans la profession de professeur, et notamment des conditions et des contraintes qui gênent, voire empêchent, ou au contraire favorisent voire permettent l'intégration de certains ingrédients dans l'équipement praxéologique d'un professeur.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

1. La notion de transposition archididactique

1.1. Le cas d'une institution cible productrice de savoir

La notion de transposition archididactique a été introduite pour analyser la transposition des mathématiques dans une institution de production d'un savoir, l'économie (Artaud, 1993, 1994a et 1994b). Nous avons notamment mis en évidence que les mathématiques sont un *savoir fondamental pour l'économie*, au sens où les mathématiques permettent de produire l'économie ou de l'utiliser comme système de production de connaissances [1].

Lorsque la production d'un savoir S utilise des mathématiques ou tout autre savoir S' jouant à son endroit un rôle fondamental, on peut se demander par quels canaux le savoir fondamental arrive dans la sphère de la production du savoir concerné. Deux réponses doivent *a priori* être envisagées : ou bien les éléments du savoir fondamental nécessaires dans P_S sont déjà élaborés et font donc l'objet d'un *emprunt* accompagné d'éventuels remaniements transpositifs, et dans ce cas le savoir S' « manipulé » dans P_S est alors clairement *exogène* ; ou bien les éléments de savoir S' considérés ont été élaborés dans P_S, par des « acteurs » spécialisés ou se spécialisant pour l'occasion, et dans ce cas le savoir S' ainsi utilisé dans P_S est alors *endogène*.

À partir de ce schéma de base, on observe alors la mise en place d'une configuration plus complexe, dont le développement s'inscrit dans la durée historique. D'une part, en effet, surgissent à la frontière de P_S des acteurs qui se spécialisent dans l'emprunt, l'adaptation et l'élaboration des éléments de savoir S' utiles. S'agissant de l'économie et des mathématiques, on peut regarder ces acteurs, permanents ou occasionnels, comme des *économistes mathématiciens.* D'autre part, le recours par P_S au savoir S' est enregistré *dans la formation même* des futurs acteurs de P_S. À partir d'un certain stade historique de développement, en particulier, on voit surgir une institution satellite de P_S

1. On a la même relation entre mathématiques et physique, ou entre biochimie et biologie par exemple. S' est un savoir fondamental pour S si S' permet de produire S ou de l'utiliser comme système de production de connaissances. Cette notion peut être étendue à la notion de praxéologie (voir *infra*).

que nous nommerons l'*école associée à P_S* (notée génériquement E_S). Le travail accompli sur S' doit alors tenir compte de contraintes nouvelles : non plus seulement celles liées à son importation dans une région donnée de P_S en vue de son utilisation, mais aussi celle – proprement didactique – engendrée par la volonté d'introduire S' dans la formation des futurs acteurs de P_S et, plus généralement, de tous ceux qui, dans leur activité, se réclameront du savoir S parce qu'ils reconnaissent à ce savoir un caractère pertinent par rapport à leur pratique.

Ainsi, en chaque période de son histoire, P_S « apprendra » à travers ses acteurs, soit de manière directe à partir de $P_{S'}$, soit de manière indirecte, par le truchement de l'école associée, E_S.

L'étude des modalités et des conditions d'intégration des mathématiques ($\mathcal{M}$) dans les cursus de formation des économistes – soit dans $E_{\mathcal{E}}$ – relève très classiquement du domaine de l'analyse des processus de transposition didactique. Les processus de transposition qui transportent de la matière mathématique de $P_{\mathcal{M}}$ vers l'institution de production de l'économie, $P_{\mathcal{E}}$, sont eux des processus de transposition *institutionnelle* des savoirs mathématiques.

L'élaboration de l'ensemble des analyses effectuées dans l'étude de la mathématisation en économie a progressivement mais irrésistiblement conduit à penser – c'est-à-dire à modéliser – les phénomènes observables dans les termes mêmes de la théorie de la transposition didactique. Ce qui s'impose à l'esprit, en effet, c'est que, à l'endroit du savoir mathématique, l'institution $P_{\mathcal{E}}$ fonctionne *comme une école et sa noosphère*. Il s'agit en l'espèce d'une institution que l'on peut regarder comme une école sans qu'elle soit *principalement* école – puisque la « problématique institutionnelle » de $P_{\mathcal{E}}$ reste la *production* du savoir économique. Mais il s'agit bien pourtant d'une institution qui fonctionne *aussi* à la manière d'une école (de mathématiques).

Se développera ainsi, à l'intérieur de la noosphère – là où prend place la polémique autour de la pertinence des mathématiques –, tout un ensemble de débats, articulés à la question des besoins en mathématiques de l'économiste, et visant à préciser et à modifier régulièrement ce qu'on peut regarder comme un *programme d'étude,* qui fixe la matière à apprendre, en assortissant sa présentation de commentaires qui sont autant d'« instructions officielles ». Vont s'élaborer de véritables *stratégies didactiques*, généralement peu sophistiquées, et pour tout dire quelque peu rudimentaires. Et se faire puis se défaire des *systèmes didactiques*, de manière erratique mais récurrente. Enfin *un corpus évolutif de savoir mathématique se* constitue où, en chaque période historique, archaïsmes et novations se côtoient.

Cette école, puisque c'est donc ainsi que nous regardons l'institution P_{ε}, apparaît, quand on la compare à ce que nous avons nommé l'école associée à P_{ε}, soit E_{ε}, comme une école *primitive* et *primordiale,* dont l'école associée E_{ε} n'est au fond que le « rejeton ». Pour cette raison, nous dirons de l'institution P_{ε} regardée comme une école de mathématiques – dont, *de fait*, les acteurs *apprennent* des mathématiques – qu'elle est *une archiécole*[2]. De ce point de vue, la transposition institutionnelle dont nous parlions plus haut – de P_{M} vers P_{ε} – peut alors être regardée comme une transposition *archididactique*.

1.2. Le cas d'un métier comme institution cible

Comme nous l'explicitions lors de la première édition de ce congrès « la TAD est une chose toute concrète, une machine à produire des praxéologies, en particulier des praxéologies professorales et de formation » (Artaud, 2007, pp. 256-257) : en d'autres termes, la didactique et, en particulier la TAD, est un savoir fondamental pour le métier de professeur[3]. Il doit donc exister un processus de transposition archididactique, qui transpose de la didactique de l'institution productrice de ce savoir vers le métier de professeur (que nous noterons I_{MP} dans la suite), qui n'est pas une institution didactique mais qui va fonctionner comme telle à l'égard de la didactique, en constituant une *archiécole,* matrice d'une institution proprement didactique, une école qui forme les acteurs de I_{MP}. Mais à la différence de ce qu'il se passe *aujourd'hui* pour le couple (mathématiques, économie), le processus de transposition archididactique de la didactique dans I_{MP} est encore embryonnaire et cela

2. Citons ici le *Petit Robert* dans son édition de 1987 (tome 1, p. 95) : ARCH-, ARCHI-. ÉLEMENT d'origine grecque, « ce qui vient avant » (ex : archevêque, archiprêtre).

3. Il en va de même pour le métier de formateur, et spécialement de formateur d'enseignants. Les développements qui suivent nous paraissent valoir également pour le métier de formateur d'enseignants mais nous n'expliciterons pas ce point plus avant.

parce que certaines conditions au moins sont différentes. Nous développerons ci-après deux exemples relatifs au processus de transposition archididactique de la didactique dans I_{MP} de nature à mettre en évidence certaines de ces différences. Nous nous situerons pour cela au niveau de la société française en considérant une sous-institution de I_{MP}, le métier de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire français – que nous désignerons par métier ci-dessous.

2. Le temps didactique et la gestion de la reprise de l'étude

Reprendre l'étude d'un thème est un geste professionnel particulièrement crucial dans le métier. En voici une description donnée par Yves Chevallard (2015)[4] :

> … il y a reprise de l'étude dans une classe chaque fois qu'on y étudie un objet qui a déjà été étudié *dans une classe antérieure* (on peut, de ce point de vue, se référer aux programmes des dites classes) ou même *dans l'année en cours*. En fait, il est sans doute bon d'inclure parmi les situations de reprise d'étude ces situations où l'on utilise un « objet » peu souvent utilisé, sans pour autant prétendre l'étudier à nouveaux frais – sans qu'il soit tenu, donc, pour un *enjeu didactique*. Cette extension de la notion de reprise d'étude se justifie par le fait que, dans une classe, la frontière entre le didactique et le non-didactique (ou entre objet d'étude et « simple » outil d'étude) est très perméable : l'utilisation d'un objet « ancien » peut ainsi toujours susciter un « rappel », sinon une véritable « révision », relativement à cet objet. (p. 22)

Ce geste professionnel a été identifié comme problème de la profession, notion introduite par Gisèle Cirade (2006), dans le travail de thèse de Mirène Larguier portant sur le numérique (2009). Nous utiliserons ici des

4. On ajoutera que, depuis la rentrée 2016, le programme de mathématiques du collège (élèves de 11-15 ans) est maintenant donné par cycle : le cycle 3, qui correspond aux deux dernières classes de l'enseignement primaire (élèves de 9-11 ans) et à la première classe du collège, la sixième (élèves de 11-12 ans), et le cycle 4 qui comprend les trois autres classes. Des « repères de progressivité » sont donnés, qui fournissent des indications de répartition des thèmes dans chaque classe et, dans un collège donné, les professeurs établissent en général des progressions relatives à chacune des classes. Cela rend plus « flou » les organisations praxéologiques que, dans une classe donnée, le professeur peut considérer comme faisant partie du milieu pour l'étude.

matériaux issus d'un mémoire de master en didactique des mathématiques réalisé par Karine Saada (2015a & 2015b) sous notre direction. Ce travail s'attachait à apporter des éléments de réponse aux deux questions suivantes : Quelles praxéologies de reprise de l'étude peuvent-elles être rencontrées, voire apprises, par un professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire aujourd'hui ? Dans quelles conditions et sous quelles contraintes est-il possible de rencontrer, voire d'apprendre, une praxéologie de reprise de l'étude donnée ?

Si l'on considère un processus d'étude d'une question Q modélisé selon le schéma herbartien, dans le cas où la question Q amène à reprendre l'étude d'un thème θ, la production de la réponse $R^\heartsuit$ va s'appuyer sur un milieu d'étude M dont le thème θ fait partie avec le rapport institutionnel anciennement établi. Les aides à l'étude pourront donc être amenés, dans la conduite du processus d'étude de Q, à s'assurer de la disponibilité dans le milieu d'étude des praxéologies pertinentes relativement à θ avant le début de l'étude de Q ou encore à aménager le milieu en cours d'étude si et lorsque cela s'avère nécessaire. Compte tenu des conditions et des contraintes liées au temps didactique, les deux voies paraissent délicates car elles peuvent être vues comme venant arrêter la progression du temps de l'étude voire, au moins dans le cas de la seconde, faire rebrousser chemin. Ces conditions et ces contraintes relatives au temps didactique apparaissent masquées dans les programmes ou les documents ressources par l'injonction, depuis la fin des années 80, de ne pas procéder à des « révisions systématiques », « sans qu'une technique de reprise de l'étude des praxéologies antérieurement étudiées soit véritablement précisée avant 2007 : le maigre viatique fourni est qu'il faut faire "autrement" en les mettant au service de l'étude du "nouveau" » (Saada, 2015a, p. 14). L'indication technique mise en avant en 2007, et reprise en 2008, repose sur « l'évaluation diagnostique » :

> L'enseignement prend en compte les connaissances antérieures des élèves : mise en valeur des points forts et repérage des difficultés de chaque élève à partir d'évaluations diagnostiques. Ainsi l'enseignement peut-il être organisé au plus près des besoins des élèves, en tenant compte

> du fait que tout apprentissage s'inscrit nécessairement dans la durée et s'appuie sur les échanges qui peuvent s'instaurer dans la classe.
> Il convient de faire fonctionner les notions et « outils » mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l'école primaire. (Ministère de l'éducation nationale [MEN], 2008a, pp. 10-11)

En dehors du défaut de développement de la technique proposée, il apparaît nettement que les justifications manquent, et notamment celles relatives aux conditions et aux contraintes que le temps didactique produit : on peut citer principalement le fait que le temps didactique officiel est une fiction nécessaire au fonctionnement du système didactique et qu'il convient de réguler cette fiction pour permettre une mise en cohérence de ce temps avec le temps de l'apprentissage, régulation qui doit être soigneusement calibrée pour ne pas se heurter à la contrainte de « l'avancée sans retour ».

L'enquête menée confirme ce premier constat : elle fait apparaître que les ressources sur la reprise de l'étude sont peu nombreuses, qu'elles apparaissent sous couvert de l'évaluation diagnostique et que le temps didactique est absent de l'équipement praxéologique qui se dégage. Nous en donnerons deux exemples.

Premier exemple. Sur le site académique de l'académie d'Orléans-Tours, dans un article rédigé par trois inspecteurs pédagogiques régionaux, Alain Diger, Michel Dofal et Yves Olivier (2012), c'est le choix d'adopter une « progression spiralée » – notamment pour « réduire le stress généré par le contrôle du temps pour le professeur » (Diger, Dofal & Olivier, 2012, p. 2) et offrir « des occasions de comprendre adaptées, renouvelées et des savoirs pérénisés pour les élèves » (Diger, Dofal & Olivier, 2012, p. 3) – qui motive le fait d'avoir à intégrer des révisions en utilisant une évaluation diagnostique. Les auteurs justifient ainsi le recours à ce type de reprise de l'étude :

> Il s'agit pour une connaissance qui est à réactiver d'essayer de l'éclairer sous un angle nouveau et adapté au programme de l'année en cours. Là

> encore l’efficacité en terme d’utilisation du temps est réelle : on entre directement dans le travail proposé sur l’année en cours sans révisons systématiques consommatrices d’un temps précieux qui fera défaut ensuite pour traiter l’essentiel. On n’ennuie pas les élèves par des redites inefficaces pour les bons élèves qui n’en ont pas besoin mais également pour les élèves fragiles qui ne trouvent rien de nouveau leur offrant une chance de comprendre ce qui leur a échappé l’année précédente. (*Ibid.*, p. 4)

C’est ainsi le temps d’horloge et l’intérêt des élèves qui sont principalement convoqués.

Deuxième exemple. K. Saada a proposé à des élèves professeurs en stage en responsabilité et à des professeurs en exercice un questionnaire sur la reprise de l’étude (Saada, 2015b, pp. 35-38). Ce questionnaire proposait quatre techniques de reprise de l’étude sur lesquelles les professeurs avaient à se prononcer. Lors de cette enquête, 65 réponses ont été obtenues, 36 émanant de professeurs en exercice. Ces professeurs disent connaître (97 % des réponses) et pratiquer ou avoir pratiqué (92 % des réponses) la technique suivante : « au fur et à mesure du chapitre, si je vois que les élèves ont oublié une notion vue les années antérieures, je fais un rappel en classe ». Pourtant, le jugement de l’efficacité de cette technique par ces mêmes professeurs est nuancé : sur une échelle de un à cinq, la médiane est de trois et le premier quartile de deux : un quart des professeurs interrogé jugent donc cette technique inefficace. La considération des éléments fournis à l’appui de cette technique met en avant que cela permet de motiver le rappel, et par là les élèves, et « d’avancer dans le cours », tandis que les éléments mobilisés à l’encontre de la technique sont principalement que les difficultés sont souvent redondantes et communes à la plupart des chapitres, que cela n’aide pas véritablement les élèves en difficulté, ou encore que cela interrompt « le déroulement du cours ». Beaucoup de points positifs ou négatifs avancés comportent dans leur formulation l’indication que ces rappels doivent être brefs. On voit donc l’effet des contraintes liées au temps didactique peser sur les techniques mais ne pas pouvoir véritablement être contrebalancées dans la fabrication de celles-ci parce que les équipements praxéologiques manquent de savoir sur le temps didactique.

3. Les programmes de calcul comme environnement technologico-théorique de l'algèbre élémentaire

Yves Chevallard a mis en évidence l'intérêt, et même la nécessité, de considérer l'algèbre élémentaire au collège comme science des programmes de calculs sur les nombres, ces derniers donnant un milieu pour faire émerger l'algèbre élémentaire et la notion de programme de calcul constituant une partie essentielle de l'environnement technologico-théorique de l'organisation mathématique à mettre en place au collège. Cet aspect qui avait été enregistré en 2007 et 2008 dans le programme et les documents de la collection *Ressources pour la classe* (MEN, 2008b) est absent du texte du programme de 2016 comme l'explicite Caroline Girard (2017) dans un mémoire de master recherche réalisé sous notre direction et portant sur les infrastructures didactiques.

> On peut noter que la notion de programme de calcul n'est pas mobilisée dans le texte du programme. C'est le binôme (situation, formule) qui apparaît ; même si expression algébrique apparaît en quelques occurrences, elle voisine avec écriture littérale qui a une connotation plus formelle. (Girard, 2017, p. 30)

Il apparaît cependant dans le document de la collection *Ressources pour le cycle 4* intitulé *Utiliser le calcul littéral* (MEN, 2016a) mais de façon quasi anecdotique. On peut lire par exemple que l'élève est « initié aux programmes de calcul à partir de programmes dont les opérations sont réversibles et permettent de "remonter" le programme en commençant par la dernière opération » (*ibid.*, p. 3) ou encore que « les programmes de calcul constituent à la fois un moyen pertinent pour introduire la notion d'expression littérale puis d'équation, et un intermédiaire entre le volet procédural et le volet structural du calcul littéral » (*ibid.*, p. 4).

L'absence des éléments d'infrastructure mathématico-didactique cités plus haut gêne l'émergence de l'organisation mathématique relative à l'algèbre élémentaire, du point de vue du *topos* des élèves en classe, notamment dans la réalisation des moments exploratoire et technologico-théorique, mais encore des raisons d'être et justifications du travail algébrique. Nous en donnerons un exemple extrait du travail de C. Girard (2017).

Le mémoire comprend l'analyse de trois séances mettant en place une organisation mathématique autour de l'algèbre élémentaire à partir de la modélisation d'une situation qui conduit à déterminer une grandeur. Une fois la modélisation effectuée, les classes sont face à plusieurs expressions algébriques de programmes de calcul conduisant à la détermination de cette grandeur. Dans deux des classes, l'une dont l'étude est dirigée par un professeur expérimenté et l'autre par un professeur stagiaire, la notion de programme de calcul n'a pas été mobilisée pour réaliser les épisodes du moment exploratoire et c'est l'ostensif – et le non-ostensif – « formule » qui est mobilisé. Dans ces deux classes, se pose alors la question de montrer que ces « formules sont les mêmes » ou encore que « ces formules sont égales ». Dans la classe du professeur expérimenté, qui a donné peu de milieu sur les programmes de calcul et a fait émerger les formules de façon magistrale, la dévolution de la question n'est pas véritablement réalisée comme en témoigne la fin de la séance :

> P : Vous devez vérifier que ces formules sont bien les mêmes. Vous avez 5 minutes.
>
> (*Quelques élèves tentent de mettre plusieurs valeurs à x et de comparer. Ils disent que ça suffit. Ça sonne)*
>
> P : On reprend ça demain, à la maison vous montrez pourquoi ces formules sont bien identiques.
>
> (*Un élève dit un peu plus bas « Je ne vois pas pourquoi on doit montrer que c'est les mêmes, on le voit bien que ce ne sont pas les mêmes ! Elle les a écrites !*) (Girard, 2017, p. 68)

Dans la classe du professeur stagiaire, dans laquelle les élèves ont davantage de milieu sur les programmes de calcul, la difficulté est moindre mais elle résiste :

> P : Vous écrivez dans vos cahiers : « Montrons que ces deux formules sont égales. » Comment vous allez faire alors ?
>
> Ya : On donne une valeur à *n*.

> P : Le problème c'est qu'en faisant comme cela tu vas le justifier seulement pour une seule valeur de *n* alors que nous on veut le justifier pour toutes les valeurs de *n*.
>
> Un élève : Je n'ai pas compris.
>
> P : On veut montrer que ces deux formules sont égales. (Girard, 2017, p. 68)

L'argument donné par le professeur « on veut le montrer pour toutes les valeurs de *n* », qui est classique, peut être mis en défaut. On dénombre une collection discrète, et les paramètres de la situation font que la grandeur variable est bornée : une exploration numérique au tableur suffit à s'assurer de la validité des formules et de leur équivalence dans la situation choisie. En outre, les formules ont été produites à partir de la modélisation graphique de la situation, ce qui permet de confirmer que les formules donnent bien la grandeur cherchée. C'est parce qu'on veut construire une théorie des programmes de calculs qui permette de savoir si deux programmes de calculs donnés indépendamment de la situation qu'ils modélisent sont équivalents que l'on cherche à produire une technique qui s'affranchisse de la situation et dont la justification soit « interne » aux programmes de calculs exprimés algébriquement.

Rien de tout cela n'est présent dans les ressources institutionnelles. Les pistes pédagogiques fournies dans une activité partant d'une situation semblable donnent même une indication trompeuse : « la variété des formules produites au sein de la classe crée le besoin de s'assurer de leur validité en transformant leurs écritures à partir de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition » (MEN, 2016b, p. 2).

4. Conditions et contraintes...

Les exemples précédents illustrent, nous semble-t-il, certaines des conditions et contraintes qui influent sur le processus de transposition archididactique de la didactique dans le métier.

D'un côté, la didactique n'est pas encore vue par la société comme un savoir savant, en suivant la caractérisation d'un savoir savant due à Y. Chevallard (1985), ce qui nuit à la diffusion de ce savoir y compris dans les institutions « professionnelles ». Cela est renforcé dans le cas qui nous occupe par la contrainte du refoulement du didactique (Chevallard, 2010) qui conduit, d'une part, à parler peu de ce qui est enseigné et à empêcher la mise en évidence d'un rapport didactique aux enjeux de l'étude – ce qui en gêne l'existence, comme nous l'avons vu avec l'algèbre par exemple –, d'autre part, de façon non indépendante, à mettre en avant les aspects pédagogiques des gestes professionnels, comme nous l'avons vu avec l'évaluation diagnostique par exemple au détriment des aspects plus spécifiques qui conditionnent pourtant largement l'efficacité des organisations de l'étude.

D'un autre côté, le métier de professeur relève d'une semi-profession ainsi que l'ont développé Y. Chevallard et G. Cirade (2010), ce qui a pour effet que la profession (Chevallard & Cirade, 2010) revendique peu la mise à disposition de savoirs scientifiques pour le métier et, quand elle le fait, ces savoirs n'apparaissent pas fondamentaux pour le cœur du métier, soit la direction d'étude de questions et la mise en place, à cette occasion, d'organisations praxéologiques. Pour le dire autrement, la profession n'exprime pas de besoins en savoirs didactiques et on ne trouve donc pas de « professeurs didacticiens » analogues aux « économistes mathématiciens » : en effet, si quelques professeurs s'intéressent à la didactique pour améliorer leurs praxéologies professionnelles, cela reste dans le cadre du paradigme du « petit producteur indépendant » et se retrouve de fait quasi invisible dans la profession. De même, les débats ou la polémique autour de de la pertinence de la didactique, auxquels tout didacticien ayant commerce avec la formation au métier se heurte, sont institutionnellement peu visibles, ce qui gêne pour poser nettement la question des besoins en didactique du professeur, sans parler de celle de la constitution d'un programme d'étude.

Références

Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique – Une étude exploratoire*, Thèse pour le doctorat de mathématiques. Université d'Aix-Marseille II, Marseille.

Artaud, M. (1994). Un nouveau terrain pour la didactique des mathématiques : les mathématiques en économie. *In Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 298-304). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artaud, M. (1995), La mathématisation en économie comme problème didactique – La communauté des producteurs de sciences économiques : une communauté d'étude. *In* C. Margolinas (Éd.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 113-129). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artaud, M. (2007). La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 241-259). Jaen, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2010). Où va la didactique ? Perspectives depuis et avec la TAD. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 923-948). Montpellier : IUFM.

Chevallard, Y. (2015). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques – Sur les praxéologies de recherche en didactique – Séance 4 – Parcours Didactique de la spécialité Enseignement et formation en mathématiques du master Mathématiques et applications – Année 2014-2015.*
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_4.pdf

Chevallard, Y. & Cirade G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Éds), *Le* *travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR & Lyon : INRP.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. (Thèse de doctorat). Université Aix-Marseille I – Université de Provence.

Diger, A., Dofal, M. & Olivier, Y. (2012). *Progressions annuelles.* Académie d'Orléans-Tours.
http://maths.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user_upload/maths/Dossiers_acad%C3%A9miques/Progressions/pdf_progression_annuelle.pdf

Girard C. (2017). Faire étudier les mathématiques en questionnant le monde : infrastructures didactiques pour la réalisation des moments exploratoire et technologico-théorique. (Mémoire de master). Université d'Aix-Marseille.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* (Thèse de doctorat). Université Montpellier 2.

Ministère de l'éducation nationale. (2008a). Programmes du collège – Programmes de l'enseignement des mathématiques, *Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008*.

Ministère de l'éducation nationale (2008b) *Du numérique au littéral.*
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Ministère de l'éducation nationale. (2016a). *Utiliser le calcul littéral.*
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Calcul_litteral/35/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_doc_maitre_548358.pdf

Ministère de l'éducation nationale. (2016b). *Utiliser le calcul littéral. Un exemple de question à prise d'initiative : Les carrés bordés.*
http://cache.media.education.gouv.fr/file/Calcul_litteral/29/8/RA16_C4_MATH_nombres_calcul_calcul_litteral_initiative_carre_bordes_548298.pdf

Saada K. (2015a). *Praxéologies de reprise de l'étude et leur écologie dans l'enseignement secondaire*. (Mémoire de master). Université d'Aix-Marseille.

Saada K. (2015b). *Praxéologies de reprise de l'étude et leur écologie dans l'enseignement secondaire : Annexes*. (Mémoire de master). Université d'Aix-Marseille.

Alternativa a la enseñanza monumentalista: los REI cooperativos

Julián Roa-González

Dpto. Didáctica de las Matemáticas, Universidad a Distancia de Madrid, España

Mercedes Hidalgo-Herrero

Dpto. Didáctica de las Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, España

Abstract. The Anthropological Theory of the Didactic proposes the paradigm of *questioning the world* as the counterpoint for the traditional monumentalism when teaching mathematical works. In order to introduce the new paradigm in school institutions, the TAD proposes the study and research paths. Nevertheless, there exist restrictions which complicates the implementation of this new paradigm, particularly of methodological nature. In this paper, we present a proposal which makes it possible the survival of the SRP in an institution whose methodology is based on *cooperative learning*, and we analyse how SRP and cooperative learning can complement each other.

Resumen. Como contrapunto al monumentalismo tradicional en la enseñanza de las obras matemáticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico propone el paradigma del *cuestionamiento del mundo*, siendo los recorridos de estudio e investigación el dispositivo que la TAD propone para llevarlo a cabo en las instituciones escolares. Sin embargo, esta implantación del nuevo paradigma encuentra restricciones, en particular de índole metodológica. En el presente trabajo presentamos una propuesta para posibilitar la supervivencia de los REI en una institución con una metodología basada en el *aprendizaje cooperativo*, y analizamos cómo los REI y el aprendizaje cooperativo pueden complementarse.

Résumé. En contrepoint au monumentalisme traditionnel dans l'enseignement des œuvres mathématiques, la Théorie Anthropologique de la Didactique propose le paradigme de questionnement du monde. Les parcours d'étude et recherche sont le dispositif que la TAD propose pour permettre la mise en œuvre du nouveau paradigme dans les établissements scolaires. Cependant, cette mise en œuvre du nouveau paradigme rencontre des contraintes, notamment de nature méthodologique. Dans cet article, nous présentons une proposition pour permettre la survie des PER dans une institution avec une méthodologie basée sur *l'apprentissage coopératif*, et nous analysons comment les PER et l'apprentissage coopératif peuvent se compléter.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introducción

Diversos autores han dibujado la clase magistral y han criticado su orientación y sus efectos. Dentro de estas críticas aparece el término *monumentalista* definido por Yves Chevallard (2013). Según este planteamiento, las obras se enseñan “como si fueran monumentos formales que se visitan, se contemplan, se admiran y con los que deberíamos gozar” (Chevallard, 2013, p. 5).

En este modelo, el alumno es un mero espectador que debe escuchar y aprender de las indicaciones que ofrece el “guía”. Las obras se consideran finalizadas y, por tanto, no se puede participar en el proceso de construcción.

En numerosas instituciones el estudio de las obras matemáticas suele abusar de esta aproximación, que no ofrece ni un sentido ni una razón de ser de las obras consideradas. Así, las obras se ofrecen a los alumnos, por parte del profesor, sin relación entre sí y dentro de un medio muy pobre propuesto únicamente por el docente. A estos problemas hay que añadir el poco tiempo que se dedica a cada una de ellas, lo que conlleva un aprendizaje muy débil y superficial con pocas interconexiones con otras áreas.

Frente a este fenómeno, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propone un modelo de *cuestionamiento del mundo* donde los alumnos reconstruyen e investigan sobre la obra en cuestión.

Y. Chevallard (2013) afirma que el planteamiento de este modelo se fundamenta principalmente en los siguientes puntos:

1. El currículo tradicional se rige por un tiempo didáctico lineal e irreversible. Por contra, en el currículo propuesto en el nuevo paradigma el tiempo es funcional y viene determinado por las necesidades de la cuestión que está siendo estudiada, cuestión u obra que puede ser estudiada repetidamente en diferentes momentos temporales, desde perspectivas diferentes y con herramientas también distintas.

2. Se pide al alumno que conozca las matemáticas, no que las quiera. Sus sentimientos pertenecen a lo privado.

3. No se hacen diferencias previas entre cosas “fáciles” y cosas “difíciles”: el único criterio de la entidad matemática es su utilidad en la tarea por hacer, en la cuestión a resolver, y su grado de profundización dependerá del uso que se debe hacer de ella y de las herramientas disponibles para estudiarlas.

4. No se trata de seducir al alumno, sino de hacerle encontrar herramientas matemáticas para pensar el mundo y actuar en él de manera razonada. Los alumnos deben aprender las matemáticas que necesitan.

5. Defenderse contra el argumento: "bajará el nivel de enseñanza", que resultará de cualquier cambio en el currículo tradicional.

6. Gusto por la "matemática lenta" y razonada. Quien quiera un resultado rápido, que use la calculadora.

En este trabajo nos alinearemos con la tesis del *cuestionamiento del mundo* y asumiremos su concepción sobre ¿qué son las matemáticas? y ¿cómo se aprenden?, tratando de contribuir con posibles respuestas a la pregunta ¿cómo pueden enseñarse?

2. Los Recorridos de Estudio e Investigación

Para otorgar sentido y funcionalidad al estudio de la matemática en la escuela y para dar respuesta a las restricciones transpositivas que se producen en todos los niveles de codeterminación didácticos, se plantea a partir de 2009 la idea de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI).

> Los alumnos (X) investigan y estudian sobre una pregunta (Q), bajo la dirección de un profesor (y) o conjunto de profesores (Y). Se forma entonces un sistema didáctico, denotado por S (X,Y,Q). La respuesta a la pregunta Q, denotada por $R^{\heartsuit}$, se produce bajo determinadas restricciones y funciona como tal bajo esas restricciones, no siendo la respuesta única ni universalmente efectiva. (Chevallard, 2009, p. 19)

Al sistema anterior alumnos-cuestiones-profesores, hay que ayudarle mediante un medio adecuado que esté formado al menos por:

a) Respuestas pre-construidas

b) Preguntas derivadas de la cuestión generatriz

c) Obras matemáticas bajo la forma de teorías, experimentos o praxeologías.

Para dar sentido al estudio de los saberes a enseñar se presenta a los alumnos una cuestión generatriz a la que se debe dar una respuesta funcional.

Los alumnos y profesores se enfrentan a cuestiones reales estudiando respuestas ya disponibles en las redes de conocimiento. El estudio de estas respuestas establecidas conduce a una estructura arborescente de preguntas similares y derivadas que obligan a la comunidad de estudio a profundizar, estudiar y reconstruir las obras matemáticas previstas en el Modelo Epistemológico de Referencia que, en principio, da origen al REI. A lo largo de ese proceso se va dando respuesta a las cuestiones derivadas hasta que se acaba dando respuesta a la cuestión generatriz. Por tanto, el alumno aprende estudiando e investigando. Este tipo de aprendizaje obliga al alumno a desempeñar un rol de matemático inmerso en una actividad matemática. Durante el proceso de plantear hipótesis y de aceptarlas o refutarlas, la comunidad de estudio pone en marcha los procesos de inducción y deducción propios de la actividad matemática. En consecuencia, el alumno aprende matemáticas haciendo matemáticas.

Sin embargo, la puesta en funcionamiento de un REI requiere de los siguientes cambios en el sistema didáctico:

Topogénesis. Es necesario cambiar los roles del profesor y del alumno.

El profesor debe ser el encargado de introducir en el medio las obras y las respuestas preestablecidas a estudiar, investigar y reconstruir. Esta selección de obras y respuestas no es definitiva y es importante que se amplíe y modifique en función de la investigación que realiza la comunidad de estudio. El medio, por tanto, está parcialmente construido y se completa con la investigación.

La comunidad de estudio debe producir respuestas (personales) a la pregunta generatriz, plantearse nuevas preguntas e introducir obras nuevas en el medio suministrado por el profesor. Esta forma de trabajo es más rica que el estudio monumentalista, pues enriquece el medio y no excluye del mismo obras, respuestas o preguntas que puedan surgir como resultado de la investigación.

Cronogénesis. Hay que modificar el tiempo de estudio.

Para realizar una investigación, la comunidad de estudio debe seguir un proceso menos lineal hacia la respuesta. Dentro de este proceso es imprescindible que se exploren y tanteen muchos más caminos que los que se estudian en un proceso tradicional. Por otro lado, la posibilidad de que se generen abundantes cuestiones derivadas hace que los alumnos encuentren un mayor sentido a lo que estudian y doten de una mayor significatividad a lo que aprenden. Sin embargo este proceso resulta potencialmente más dilatado en el tiempo y más impredecible.

Mesogénesis. Es necesario cambiar el medio.

Para transitar por un REI es necesario disponer de un medio abierto donde realicen aportaciones todos los integrantes de la comunidad de estudio. Así mismo, ese medio debe ser tal que permita incorporar obras, cuestiones y respuestas no previstas de antemano y que provengan de múltiples fuentes y soportes. Es precisamente dentro de este cambio de medio donde el papel de los iguales puede jugar un papel enriquecedor esencial. El fomento de las interacciones de los integrantes de la comunidad de estudio adquiere así un nuevo sentido y puede servir de ayuda al estudio colectivo de las cuestiones generatriz y derivadas.

3. El aprendizaje cooperativo

Con el objetivo poner en funcionamiento los REI, proponemos que la topogénesis sea modificada en términos del aprendizaje cooperativo en instituciones con esta restricción, es decir, nos planteamos la cuestión ¿cómo pueden vivir los REI en una institución cuya metodología se basa en el aprendizaje cooperativo? Así, en esta sección se señalan algunas de las claves de dicho aprendizaje.

El *aprendizaje cooperativo*, según Manoli Pifarré y Jaume Sanuy (2001), aborda la instrucción de los alumnos de un modo que favorece el aprendizaje por parte de estos, considera estrategias que conllevan intercambios de información entre los miembros de la comunidad de estudio, estando esta organizada en pequeños grupos. De este modo, los integrantes de la comunidad abordan la resolución de las tareas ayudándose mutuamente, negociando entre ellos nuevos significados y desarrollando nuevas técnicas.

Según Gerardo Echeita Sarrionandia (2012):

> Otra razón para incorporar el aprendizaje de forma cooperativa, tiene que ver con la diversidad de alumnos en las aulas. La presencia en aulas y centros ordinarios de muchos individuos que en épocas anteriores estaban segregados de ellos, como es el caso del alumnado que ahora consideramos con necesidades específicas de apoyo educativo, o aquellos que han venido de lejos con sus familias en los flujos migratorios que tanto impacto han tenido en nuestros centros escolares (p. 23).

Según G. Echeita Sarrionandia (2012), las cinco condiciones básicas (y sus características), en las que se sustenta el aprendizaje cooperativo y en las que hay mayor acuerdo a la hora de dar cuenta de sus efectos positivos sobre el aprendizaje y la participación del alumnado son:

- Interdependencia positiva entre los miembros de la comunidad de estudio: los alumnos entienden que están vinculados entre sí de tal modo que, en el desarrollo de sus tareas de aprendizaje, ninguno puede tener éxito (en definitiva aprender), si no tienen éxito todos, y por ello mismo el aprendizaje eficaz de aquellos con los que coopero redunda también en mi aprendizaje y rendimiento.
- Responsabilidad personal y rendimiento individual: cada alumno debe tener asignada una tarea y en lo posible un rol y ser responsable de realizar su parte de trabajo. Como resultado de participar en un grupo cooperativo se debe esperar un “producto colectivo”, pero cada alumno también debe progresar, mejorar su rendimiento, con relación a su punto de partida y a sus capacidades.
- Interacción promotora, cara a cara: el trabajo cooperativo se apoya en una interacción directa, “cara a cara”, y no sólo se reúnen para compartir información y opiniones, sino que producen trabajos a través del esfuerzo y los aportes conjuntos, basándose en el compromiso y el afecto por el otro.
- Habilidades sociales: para contribuir al éxito del esfuerzo cooperativo se necesitan actitudes y destrezas interpersonales sin cuyo concurso el trabajo no progresará.
- Evaluación periódica: es imprescindible una evaluación regular de carácter formativo que implique a profesores y alumnos, y que permita conocer fortalezas y debilidades, avances o retrocesos en el proceso, así como dinámicas psicosociales negativas y, con todo ello, tomar medidas correctoras y de mejora. Para ayudar a mantener explícita esta evaluación formativa son muy útiles:

1. Los planes/cuadernos de equipo, que se deben convertir en el primer producto cooperativo del grupo y que suelen incorporar: nombre, identificación, objetivos, compromisos, reparto de tareas y roles, recursos, tiempos…
2. Las evaluaciones del equipo, que deben ser momentos formales para revisar: ¿qué hemos aprendido?, ¿qué dificultades hemos tenido?, ¿en qué hemos fallado?, ¿qué debemos mejorar?
3. Las evaluaciones grupales, al terminar una unidad didáctica o un proyecto de trabajo, y en las que de modo espontáneo o estructurado (rúbricas) se pueda reconocer y valorar no sólo el trabajo realizado, sino, también, cómo lo hemos realizado y cómo se ha sentido cada uno al hacerlo.
4. La observación del profesor, para estar pendiente entre otras cuestiones de las dinámicas interactivas negativas.

Pere Pujolàs Maset (2009) afirma que es necesario plantearse al poner en práctica la aplicación de aprendizaje cooperativo estas dos preguntas:

1. Los integrantes de la comunidad de estudio ¿han participado activamente, de forma equitativa o al menos todos ellos han tenido la oportunidad de hacerlo? ¿Han aportado su parte y han sido responsables de la misma?

2. Los miembros de la comunidad de estudio ¿en qué medida han tenido, a lo largo del desarrollo la actividad matemática, la necesidad, la oportunidad de interactuar, interpelar, discutir, corregirse, argumentar, y defender su punto de vista y/o aceptar el punto de vista de los demás?

Ambas cuestiones han de ser contestadas afirmativamente para que la actividad matemática desarrollada por la comunidad de estudio pueda ser considerada *cooperativa*. De esta forma, como señala P. Pujolàs:

> Si la respuesta no es afirmativa (aunque sólo sea una de las dos respuestas), no es cooperativa o sólo lo es en apariencia. Esto debería prevenirnos de lo que podemos denominar estructuras pseudo-cooperativas. (2009, p. 44)

3.1. Aspectos fundamentales del aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo implica una forma de desarrollo de la actividad matemática por parte de la comunidad de estudio tal que son los integrantes de esta los que conforman el eje alrededor del cual va a girar el proceso de estudio. Para ello, son necesarios diversos cambios en las topogénesis, mesogénesis y cronogénesis tradicionales:

- Disposición de la clase: para favorecer la interacción entre los integrantes de la comunidad, es necesario que la disposición del aula sea flexible y pueda pasarse de una distribución individual a una grupal de modo que el tiempo didáctico apenas se vea afectado.

- Establecimiento de algunas normas, rutinas y señales: es importante que se fijen señales y rutinas para marcar los tiempos, la disposición del aula y los momentos de silencio.

- Uso de técnicas cooperativas: la simple disposición en grupos es condición necesaria pero no suficiente para que la actividad matemática se desarrolle cooperativamente. Para llevar a cabo esta tarea, se han de emplear técnicas cooperativas. En general estas técnicas se pueden agrupar en torno a distintos ejes principales, así podemos tener técnicas o estrategias generales, como la lectura compartida, la estructura 1-2-4, los lápices al centro o el folio giratorio, y técnicas cooperativas específicas, como el número, el saco de dudas o la cadena de preguntas. David Duran (2012) expone en detalle cada una ellas.

- Asunción de roles dentro de los equipos: los integrantes de cada equipo de aprendizaje cooperativo deben abordar dos tareas simultáneamente, a saber, abordar la cuestión generatriz de modo que construyen la obra que el profesor quiere que aprendan y asegurarse de que el resto de integrantes del grupo también lo aprendan. Por tanto, todos los individuos que forman parte del sistema didáctico comparten la responsabilidad de enseñar. Siguiendo a P. Pujolàs (2009),

> En primer lugar, debe asegurarse al máximo la participación activa y responsable de todos los miembros del grupo: nadie puede aprender por otro, ni hacer el trabajo por otro, ni nadie debe aprovecharse del trabajo de los demás sin aportar él nada de su parte; cada miembro del equipo es el primer responsable de su aprendizaje; por lo tanto, debe asegurarse al máximo la responsabilidad individual de todos los miembros del equipo.
>
> En segundo lugar, debe darse el máximo de interacción posible entre los miembros de un mismo equipo. La interacción entre iguales en la construcción conjunta de conocimientos es un elemento primordial del proceso de enseñanza y aprendizaje. (p. 44)

4. Los REI cooperativos

Para avanzar en la creación de un currículo basado en el *cuestionamiento del mundo* es necesario experimentar con metodologías y dinámicas de aula que lleven a cabo los planteamientos teóricos avanzados con anterioridad. Dentro de esta búsqueda experimental proponemos en este trabajo la puesta en funcionamiento de los REI imbricados con la metodología del *aprendizaje cooperativo*.

Entendemos que ambas metodologías se pueden combinar de forma que la suma de las partes sea mayor que el todo. Los *REI cooperativos* utilizan, por tanto, los preceptos descritos para los REI al tiempo que la mesogénesis y la topogénesis se ven enriquecidas favoreciendo la cooperación entre iguales y el estudio compartido, es decir, incorporando los aspectos esenciales del aprendizaje cooperativo. Un esquema inicial de esta propuesta podría ser el siguiente:

1. Se plantea a un grupo de estudiantes (X) una cuestión generatriz (Q) dirigida por un profesor (y) (o grupo de profesores Y). La cuestión generatriz Q debe ser los suficientemente fértil como para que los estudiantes necesiten iniciar un proceso de estudio para darle respuesta. Este punto está vinculado al momento del primer encuentro.

2. El profesor (y) organiza la clase en grupos cooperativos (X_i) en los que se reparten roles (R) entre los estudiantes (X). De esta forma se dispone de tres niveles de actuación, a saber, uno en gran grupo, S(X,y,Q), otro en grupo reducido, S($\left(x_j^i, R_j^i\right)_i$,$(y+\left(x_j^i\right))_j$,Q), en el que cada integrante del grupo ejerce su rol y el de profesor, y uno individual, S(x_j^i,y,Q).

3. Los grupos de estudiantes (X_i) exploran las respuestas existentes ($R^{\diamond}$) a la cuestión inicial. El profesor (y) dirige esa exploración proporcionando recursos al medio y dinamizando la búsqueda de información mediante técnicas cooperativas simples (TCS) como las descritas en (D. Duran, 2012). Por tanto, a los sistemas anteriores se les incorpora una cuarta componente, TCS. Esta fase está dominada por el momento exploratorio.

4. Se ponen en común las cuestiones derivadas (Q_i), tanto resueltas (Q_i^R) como no resueltas (Q_i^{NR}), que han ido surgiendo en el proceso de estudio, así como las respuestas ($R_i^{\square}$) obtenidas. Se explicita la técnica o conjunto de técnicas que sirven de base para dar respuesta a la cuestión objeto de estudio (QoQ_i), y se aborda la justificación tecnológico-teórica de dichas técnicas. Por tanto, esta fase está dominada por el momento de institucionalización.

5. Una vez explicitadas la técnica o conjunto de técnicas que permiten dar respuesta a QoQ_i, el sistema S(X,y,Q) se modifica temporalmente por el sistema S(X_i,$(y+\left(x_j^i\right))_j$,Q), los grupos cooperativos recogen el proceso y los resultados anteriores en los cuadernos de equipo y el profesor (y) tiene como tarea conseguir que todos los integrantes de la comunidad de estudio preguntar, explicar, argumentar y comprender la técnica o técnicas obtenidas, para lo cual aplicará las técnicas cooperativas pertinentes. Una vez el grupo se asegura que cada uno de sus miembros es capaz de producir una respuesta deseada a partir de la técnica estudiada, el sistema se modifica de nuevo temporalmente para que cada alumno tenga la oportunidad de trabajar individualmente, S(x_j^i,y,Q). Este momento viene dominado por los momentos del trabajo de la técnica y de evaluación.

6. El profesor y los estudiantes comprueban que han sido capaces de dar una respuesta funcional (R♥) a la cuestión estudiada (QoQ_i^R) y utilizan todos los elementos y recursos disponibles para evaluar el estudio realizado. En este proceso son especialmente interesantes las observaciones de (y), las técnicas cooperativas complejas que permiten a (y o X_i) comprobar la aplicación de R♥, las autoevaluaciones (x_j^i sobre x_j^i) y coevaluaciones (X_i sobre x_j^i) y los registros grupales e individuales de la actividad matemática realizada. Esta fase viene dominada para el alumno por la evaluación de la obra matemática estudiada en su conjunto y para el profesor por la evaluación del proceso de estudio realizado en su conjunto.

7. Se ponen sobre las mesa las cuestiones no resueltas (Q_i^{NR}) y se indaga sobre las bases y los límites de las técnicas trabajadas. Se escoge cuál de las preguntas derivadas va a ser estudiada a continuación y el ciclo vuelve a comenzar. El momento tecnológico-teórico domina esta parte.

Las fases descritas no deben ser entendidas de una forma lineal en la que se producen secuencialmente los momentos de estudio, se trata de una estructura dinámica que se puede producir en cualquier orden y repitiendo muchas veces una misma fase.

5. Conclusiones

El aprendizaje cooperativo se fusiona con los momentos de estudio que se llevan a cabo dentro de un REI y ayuda a que el medio en que se desarrolla el estudio se enriquezca. La comunidad de estudio se convierte en un elemento fundamental que apoya y ayuda a sus integrantes. Estos se enriquecen con las aportaciones y distintas formas de pensar de sus compañeros y toma importancia no solo el momento de descubrimiento y estudio individual, sino los procesos de argumentación, razonamiento y diálogo que surgen de ese estudio y descubrimiento.

Natalia González Fernández y Gustavo Adolfo Carrillo Jâcome (2016) consideran que el empleo de la metodología de aprendizaje cooperativo en el aula aumenta significativamente el rendimiento de los estudiantes, su motivación hacia la asignatura y sus habilidades sociales entre compañeros, imprescindible para un desarrollo personal completo. En definitiva, "genera sentimientos de cooperación", lo que potencia la adopción de responsabilidades a nivel individual y grupal y promueve la implicación de los estudiantes en el equipo. Como puede verse, ninguna de las características anteriores supone una restricción para el desarrollo de un REI, sino que complementa y enriquece este aportando valiosos elementos.

Dar respuesta al reto de educar mediante el paradigma de cuestionamiento del mundo es una tarea inmensa que como todo proceso matemático estará sometida a buscar soluciones ante un grupo de problemas y generar respuestas a los mismos. Las respuestas construidas estarán llenas de caminos sin salida que no seguirán un orden lógico ni una jerarquía concreta. Esta labor intuitiva y creativa en la que estamos inmersos es la que ha permitido plantear los REI cooperativos como respuesta posible a las restricciones institucionales que se pueden encontrar a la hora de poner en funcionamiento los REI. Los trabajos futuros y las investigaciones que se hagan siguiendo este modelo serán los encargados de valorar si esta alternativa merece ser incorporada a la respuesta en forma de teoría elaborada y secuenciada dentro de la TAD.

Referencias

Chevallard, Y. (2009) Remarques sur la notion d´infrastructure didactique et sur le rôle des PER. *Journées Ampère tenues à l'INRP*, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf

Chevallard, Y. (2013). La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional. *I Jornada de Estudio en Educación Matemática*, Córdoba: FAMAF. http://edumat.famaf.unc.edu.ar/wp-content/uploads/2015/09/YC-DHC-Cordoba-28-11-2013.pdf

Duran, D. (2012). Utilizando el trabajo en equipo. Estructurar la interacción a través de métodos y técnicas. En J.C. Torrego García & A. Negro Moncayo (coords.) *El aprendizaje cooperativo de una educación de calidad: Cooperar para aprender y aprender a cooperar* (pp. 139-164). Madrid: Alianza Editorial.

Echeita Sarrionandia, G. (2012). El aprendizaje cooperativo de una educación de calidad: Cooperar para aprender y aprender para cooperar. En J.C. Torrego García & A. Negro Moncayo (coords.) *El aprendizaje cooperativo de una educación de calidad: Cooperar para aprender y aprender a cooperar* (pp. 21-46). Madrid: Alianza Editorial.

González Fernández, N. y Carrillo Jâcome, G. A. (2016). El aprendizaje Cooperativo y la Flipped Classroom: Una pareja ideal mediada por las TICs, Aularia. El país de las aulas. Volumen 2., 43-48.

Pifarré, M., Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. Investigación Didáctica. Enseñanza de las ciencias, 297-308. Lleida: Universidad de Lleida.

Pujolàs Maset, P. (2009). Aprendizaje cooperativo y educación inclusiva: Una forma práctica de aprender juntos alumnos diferentes. *VI Jornadas de Cooperación Educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa*, Antigua (Guatemala). https://www.mecd.gob.es/dms-static/f4d240d3-55ad-474f-abd7-dca54643c925/2009-ponencia-jornadas-antiguas-pere-pdf.pdf

Modèle de construction d'un EIAH pour une activité de conception expérimentale

Isabelle Girault, Claire Wajeman, Cédric d'Ham,
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, F-38000 Grenoble, France

Abstract. We describe and discuss the use of the praxeologic model in an experimental design activity in experimental science. We model the student's task in the production of an experimental procedure, by introducing "Conception Task Types" to the praxeologic model of the experiment. This extended model was used to design TitrAB, a software dedicated to an experimental design situation in Chemistry, in two ways: the selection of the activity tasks in TitrAB and the production of automatic feedback to the student's protocol.

Résumé. Nous présentons et discutons l'utilisation de modélisations praxéologiques dans une activité de conception d'expériences en sciences expérimentales. Nous avons modélisé la tâche de l'élève de production d'un protocole expérimental en couplant des « types de tâche de conception » au modèle praxéologique de la manipulation. Ce modèle enrichi nous a servi pour concevoir un Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (EIAH), TitrAB, dédié à la conception d'expériences de titrage en chimie, à la fois dans la sélection des tâches de l'activité travaillées dans TitrAB ainsi que dans la production de rétroactions automatiques.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

1. Introduction

1.1. Les spécificités d'une activité de conception expérimentale

Notre recherche se situe dans le champ de l'apprentissage des sciences expérimentales, biologie, chimie et physique, au lycée et dans l'enseignement universitaire. Ces disciplines comportent des activités expérimentales, désignées traditionnellement par le terme de travaux pratiques (TP). Nous nous intéressons spécifiquement à la conception des expériences par les élèves en TP. Ce type d'activité entre dans la catégorie des démarches d'investigation, préconisées dans les programmes du secondaire français et dans la catégorie des pédagogies actives.

Suivant une pratique pédagogique bien établie en TP, les élèves travaillent en petites équipes et en "autonomie" à partir de consignes écrites sous la tutelle d'un enseignant. Ces consignes prescrivent, entre autres tâches, une manipulation expérimentale. Dans les TP de type "recette de cuisine", la tâche des élèves est de mettre en œuvre la manipulation en suivant un protocole expérimental qui leur est fourni sous forme écrite. Dans une activité de conception expérimentale, le protocole n'est pas fourni aux élèves qui doivent concevoir tout ou partie de l'expérience. Le protocole expérimental est un écrit qui décrit et ainsi formalise la manipulation à mettre en œuvre pour réaliser l'expérience. Le protocole expérimental est un objet scientifique authentique, caractéristique des pratiques de laboratoire des sciences expérimentales. Il est produit par une activité de conception expérimentale.

Nous nous intéressons depuis plusieurs années au protocole expérimental et à sa production par les élèves. Nous considérons la production du protocole expérimental comme un élément central de la démarche expérimentale, en ce qu'elle prend sa source dans une définition précise des objectifs expérimentaux, passe par la mise au point (exécutabilité) et la description minutieuse (communicabilité) de l'expérimentation et doit faire la preuve de son adéquation avec les objectifs scientifiques initialement fixés (pertinence) (Girault et al, 2012). Au cours de leur scolarité, les élèves développent une familiarité avec cet objet qui accompagne toute activité de manipulation en classe. La conception expérimentale et l'écriture d'un protocole apparaissent explicitement dans les programmes actuels de lycée, en particulier dans la rubrique des compétences expérimentales. Toutefois, les documents de TP fournis aux élèves altèrent fréquemment la forme du protocole pour des raisons didactiques et la perception des élèves de ce qu'est un protocole peut être altérée en conséquence (Girault et al, 2012).

Les recherches sur les activités de conception expérimentale montrent que la conception expérimentale permet aux élèves de donner du sens aux activités expérimentales, de mieux relier les aspects expérimentaux et théoriques, d'acquérir des compétences proches de celles de scientifiques professionnels, en particulier concernant la construction de connaissances et la résolution de problèmes expérimentaux (Karelina & Etkina, 2007 ; Etkina et al., 2010 ; Wajeman et al, 2016).

1.2. Etayage de la conception expérimentale par un environnement informatique : logiciel TitrAB

La conception expérimentale est une tâche complexe, qui nécessite un accompagnement des élèves de manière à rendre la tâche réalisable. L'objectif de nos travaux est de développer des outils adaptés aux besoins des élèves et susceptibles d'alléger la tâche de l'enseignant, l'accompagnement des élèves étant alors partagé entre l'enseignant et l'Environnement Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH). Nous nous intéressons ici à deux types d'accompagnement, le premier étant un étayage fixe qui structure la tâche de l'élève, et le second un étayage adaptatif, consistant à produire des rétroactions vers un élève suite à un diagnostic effectué sur son activité dans l'EIAH (Hmelo-Silver *et al*., 2007 ; Girault & d'Ham, 2014).

Cet article sera illustré par un exemple expérimental en chimie, le titrage, pour lequel nous avons développé un EIAH (Titrab, http://titrab.imag.fr/) qui s'adresse à des élèves de terminale et de formations post bac. TitrAB permet à des élèves de s'entraîner à concevoir une expérimentation de titrage acide-base et à l'exploiter. Seize situations de titrages acide-base de niveaux différents sont proposées. Dans chacune d'elles, l'élève doit déterminer avec précision la valeur de la concentration d'une solution (qui dépend de la situation). Pour cela, il doit fixer les différents paramètres du titrage avant de le faire exécuter par une simulation intégrée. Un tuteur intelligent fournit des messages de rétroaction personnalisés pour permettre aux élèves de dépasser leurs difficultés.

L’interface du logiciel comporte plusieurs parties ayant chacune une fonction (figure 1). Le cadre (1) indique le matériel et les solutions disponibles.

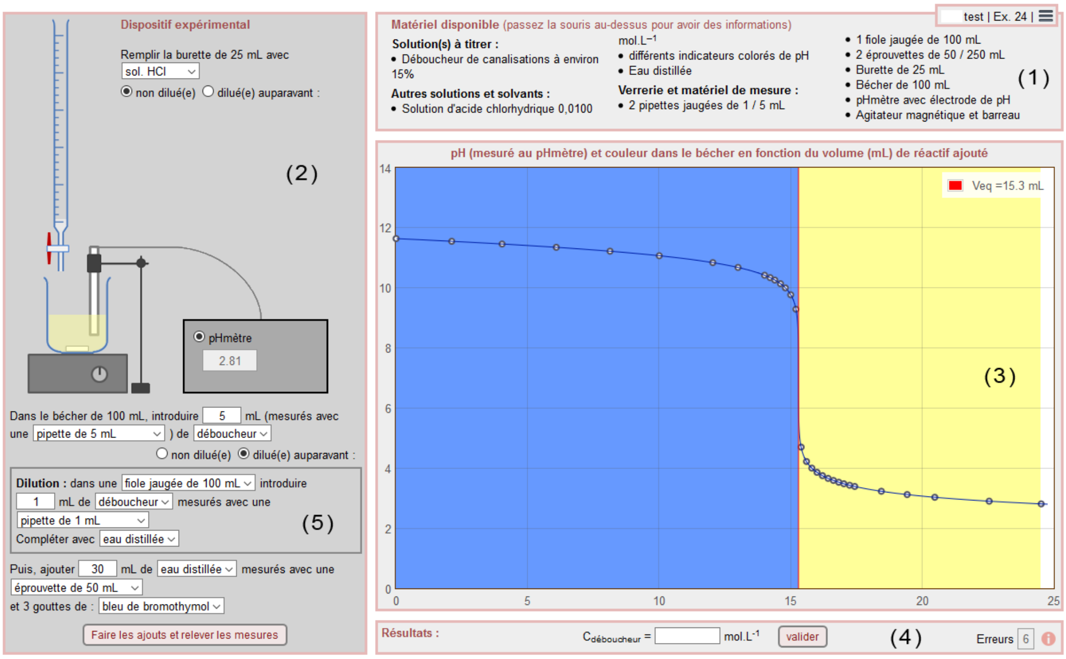


Figure 1. Interface du logiciel TitrAB.

La conception de l’expérience se fait par l’intermédiaire du cadre (2). Une forte structuration a été proposée pour aider l’élève dans cette activité. L’élève doit notamment indiquer les solutions à introduire dans la burette graduée et le bécher, leur volume ainsi que la verrerie utilisée. S’il choisit d’effectuer une dilution sur une des solutions, l’utilisateur fait apparaitre un cadre (5) pour paramétrer la réalisation de cette dilution. Ces choix nécessitent d’avoir bien compris ce qu’est l’équivalence d’un titrage et comment est réalisé, en pratique, un titrage pH-métrique.

Une fois les renseignements du cadre (2) indiqués, l’utilisateur clique sur « Faire les ajouts et relever les mesures ». Si les paramètres choisis décrivent une expérimentation incluse dans le domaine modélisé par la simulation, le logiciel calcule les résultats expérimentaux et affiche, dans le cadre (3), la courbe $pH = f(V)$. L’élève exploite cette courbe pour calculer la concentration de la solution titrée, et la faire valider par le logiciel dans le cadre (4).

L'élève peut faire autant d'essais qu'il le souhaite, mais, pour éviter qu'il ne procède sans raisonner par « essais-erreurs », un score calculé à partir du nombre de tentatives infructueuses (ou erreurs) est indiqué dans le cadre (4).

1.3. Objectif de cet article

Nous souhaitons présenter et discuter ici de l'utilisation des outils praxéologiques (Bosch & Chevallard, 1999) pour modéliser une activité de conception expérimentale. D'une part nous avons modélisé la tâche de l'élève dans la production d'un protocole expérimental en introduisant des types de tâches de conception. D'autre part, à travers l'exemple de TitrAB, nous illustrons en quoi la notion de praxéologie peut être utile pour la production de rétroactions automatiques.

2. Modélisation praxéologique de l'activité de conception expérimentale

L'exemple décrit dans cette partie est une activité de dilution, courante au lycée et à l'université et qui correspond à une partie de l'activité dans TitrAB (cadre 5). Le protocole de dilution correspond à un ensemble de tâches. Ci-dessous, nous détaillons un protocole de référence de dilution, avec des valeurs de volume arbitraires :

- Rincer une pipette de 10 mL avec la solution d'acide éthanoïque 1M.
- Rincer une fiole jaugée de 100 mL avec de l'eau distillée.
- Prélever 10 mL de la solution d'acide éthanoïque 1M avec la pipette jaugée de 10 mL,
- Délivrer ces 10 mL dans la fiole jaugée de 100 mL.
- Compléter la fiole jaugée avec de l'eau distillée
- Boucher et agiter par retournement.

On remarque que le protocole décrit précisément la succession des tâches à effectuer, et constitue une instance de la technique de dilution. Le Tableau 1 met en parallèle avec le protocole, la praxis de manipulation correspondante, soulignant la proximité entre les deux. Dans le cadre d'une activité de conception expérimentale, l'élève doit écrire ces tâches puis les exécuter au laboratoire (réaliser la manipulation). La praxéologie du Tableau 1 modélise la manipulation et fait appel à des types de tâches que nous dénommons « types de tâches de manipulation ». Par exemple, la tâche du protocole de dilution « Prélever 10 mL de la solution d'acide éthanoïque 1M avec une pipette jaugée de 10 mL » relève du type de tâche de manipulation « Prélever un volume V de solution à diluer S avec une verrerie de prélèvement P ». Une technique de manipulation peut être aisément décrite ; elle ne fait pas l'objet de cet article.

Protocole de référence	Types de tâche de manipulation
Protocole : préparation par dilution de 100mL de solution d'acide éthanoïque de concentration 0,1M à partir d'une solution mère de concentration 1M	T_m : Diluer une solution τ_m :
- Rincer une pipette de 10 mL avec la solution d'acide éthanoïque 1M.	- T_{1m} Rincer la verrerie de prélèvement avec la solution à diluer
- Rincer une fiole jaugée de 100 mL avec de l'eau distillée.	- T_{2m} Rincer la verrerie de dilution avec le solvant
- Prélever 10 mL de solution d'acide étahnoïque 1M avec une pipette jaugée de 10 mL,	- T_{3m} Prélever le volume Vm de la solution à diluer S avec une verrerie de prélèvement P
- Délivrer ces 10 mL dans la fiole jaugée de 100 mL.	- T_{4m} Délivrer la solution prélevée dans la verrerie de préparation de la dilution
- Compléter la fiole jaugée avec de l'eau distillée	- T_{5m} Compléter à Vd avec le solvant dans la verrerie de préparation de la dilution
- Boucher et agiter par retournement.	- T_{6m} Mélanger la solution

Tableau 1. Correspondance entre tâches et types de taches de manipulation

Les types de tâches de manipulation (Tm) ne permettent pas de rendre compte de l'activité de l'élève lors de la conception expérimentale. En effet pour être capable de décrire les tâches du protocole, l'élève doit effectuer un travail cognitif (et qui peut reposer sur des calculs), que nous avons modélisé par des types de tâches de conception (Tc). À partir d'un protocole de référence, nous considérons toutes les tâches de la technique de manipulation mise en jeu et tous les éléments de ces tâches qui demandent une décision de la part de l'élève (que nous appelons paramètres). Nous avons traduit cette décision en types de tâche de conception (Tc), que nous détaillons dans le Tableau 2 pour T_{3m}. Un type de tâches de conception interroge soit la technique à laquelle appartient le type de tâches de manipulation considéré (décision d'inclure le type de tâche de manipulation dans la technique), soit les choix et décisions qui concernent chacun des éléments qui constitue le complément du type de tâche de manipulation, partant du fait qu'un type de tâche est décrit par un verbe d'action et un complément. Dans l'exemple du Tableau 2, les types de tâches de conception concernent le choix des paramètres « volume de solution », « nature de solution » et « verrerie de prélèvement ».

Types de tâche de manipulation (Tm)	Types de tâche de conception (Tc)
T_{3m} Prélever le volume V de la solution à diluer S avec une verrerie de prélèvement P	T_C : Concevoir le protocole de prélèvement d'un volume de solution avec une verrerie de prélèvement (pour diluer la solution S) $\tau_C = \{T_{C1} ; T_{C2} ; T_{C3}\}$ - T_{C1} Choisir la nature S de la solution à prélever - T_{C2} Choisir le volume V de la solution S à prélever - T_{C3} Choisir le type de verrerie de prélèvement P de la solution S à prélever

Tableau 2. Description de différents types de taches de conception en lien avec un type de tâche de manipulation.

Par exemple, l'élève doit connaître le type de verrerie qu'il doit utiliser pour prélever la solution d'acide éthanoïque 1M, pour effectuer correctement le type de tâches de manipulation correspondant. Les types de tâches de conception sont justifiés par un logos qui permet à l'élève de faire un lien entre l'activité expérimentale et des notions théoriques, ce qui n'est pas nécessaire quand l'élève doit juste mettre en œuvre un protocole. Le Tableau 3 donne la praxéologie du type de tâches de conception T_{C3}. Si l'élève mobilise correctement ses connaissances, il sait qu'il doit travailler avec précision pour effectuer une dilution, auquel cas il doit utiliser une pipette jaugée comme matériel.

Type de tâche de conception	T_{C3} Choisir le type de verrerie de prélèvement P de la solution S à prélever
Technique	Choisir le matériel de prélèvement le plus précis parmi la verrerie disponible *(résultat attendu : choisir une pipette jaugée)*
Technologie	Repose sur la connaissance de la verrerie : une pipette jaugée permet de prélever un volume donné avec précision.

	Le problème à résoudre nécessite d'obtenir une valeur de concentration de la solution diluée la plus précise possible.
Théorie	Notion de concentration

Tableau 3. Exemple de praxéologie pour un type de tâche de conception.

3. Modélisation praxéologique de l’étayage dans un EIAH

3.1. Sélection des tâches à réaliser par l’élève dans TitrAB.

La praxéologie de référence permet de choisir les types de tâches de manipulation dont la conception est dévolue aux élèves dans TitrAB. Dans cet EIAH, l'activité de conception de l'élève est matérialisée dans les tâches et techniques de manipulation que l’élève doit décrire dans son protocole. Cette sélection est effectuée à partir des types de tâche de conception, et les objectifs d’apprentissage associés. Par exemple, la praxéologie détaillée dans le Tableau 3 indique des technologies et des théories qui sont des objectifs importants d'apprentissage en classe de terminale et en première année universitaire. Par conséquent, dans la tâche « Prélever 10 mL de la solution d’acide éthanoïque 1M avec une pipette jaugée de 10 mL », il est du ressort de l’élève de spécifier le paramètre verrerie en choisissant la pipette jaugée comme valeur de ce paramètre. La conception d’autres tâches de manipulation ne sont pas dévolues aux élèves dans TitrAB, car elles sont considérées comme non prioritaires : c’est le cas du rinçage du matériel (voir les deux premières tâches du protocole de référence, Tableau 1).

Par ailleurs, nous avons modélisé les erreurs possibles des élèves grâce au cadre T4TEL (Chaachoua et al., 2013), qui a permis d’introduire la notion de praxéologie personnelle (Croset, Chaachoua, 2016). Ainsi, si on reprend le type de tâche de conception « choisir la verrerie de prélèvement de la solution à diluer », nous avons proposé dans la liste de matériel, différentes valeurs pour le paramètre « verrerie » qui obligent l’élève à faire un choix. Les valeurs de paramètres disponibles pour les élèves dans TitrAB ont été choisies avec une intention didactique, à partir de la praxéologie de référence et des praxéologies personnelles. Ces valeurs de paramètres évoluent dans les 16 situations proposées dans TitrAB, suivant une augmentation progressive de la complexité de la tâche de l'élève. Le Tableau 4 détaille les praxéologies personnelles pour le Tc étudié.

Tc	Technique personnelle	Technologie personnelle
T_{C3} Choisir le type de verrerie de prélèvement P de la solution S à prélever	Prendre un bécher ou une éprouvette graduée	La précision n'est pas nécessaire pour prélever la prise d'essai
	Prendre une fiole jaugée	La fiole jaugée est vue comme une verrerie de prélèvement comme la pipette (or elle permet de contenir un volume précis mais pas de le délivrer).

Tableau 4. Praxéologies personnelles pour un type de tâche de conception (Tc).

3.2. Utilisation du modèle praxéologique pour produire les rétroactions à l'élève

Diagnostic par contraintes. Une fois qu'il a conçu son protocole expérimental, l'élève met en œuvre virtuellement l'expérimentation. Avant de simuler les résultats du titrage, TitrAB utilise un moteur de diagnostic qui évalue la proposition de l'élève. Ce moteur de diagnostic est basé sur un système de doubles contraintes (contrainte de pertinence et contrainte de satisfaction), tel que décrit par Ohlsson (2002). Si toutes les contraintes sont respectées, le système simule l'expérimentation, sinon il renvoie un message à l'élève lui donnant des informations sur les erreurs détectées.

Décision didactique pour la rétroaction. Dans l'état actuel du logiciel, le système de décision didactique (voir Figure 2), qui permet de déterminer quel message est renvoyé à l'élève lorsque des contraintes ne sont pas respectées est très basique. Les deux règles de décision sont les suivantes :

- à chaque contrainte correspond un unique message d'erreur qui décrit à quel niveau du protocole se situe l'erreur et qui propose quelques conseils pour la corriger,
- à chaque soumission du protocole par l'élève, est renvoyé le message d'erreur correspondant à la contrainte de plus haute priorité.

Ce système de décision didactique n'est pas satisfaisant. En analysant les traces d'utilisation des élèves, nous nous sommes rendu compte que les messages renvoyés à l'élève ne sont pas toujours appropriés, en particulier ne constituent pas toujours une aide. Par exemple, si la rétroaction ne permet pas à l'élève de comprendre où se situe son erreur, il tentera de corriger d'autres parties du protocole que celle incriminée et il recevra toujours le même message d'erreur qu'il ne comprend pas.

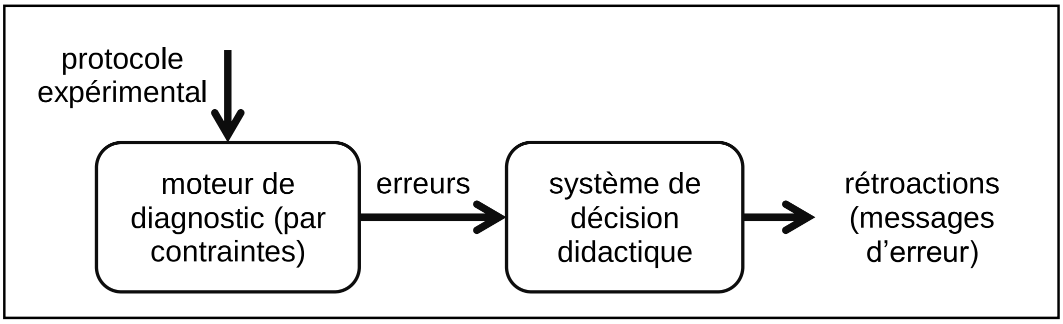


Figure 2. Système de production des rétroactions dans TitrAB.

Le moteur de décision didactique va être amélioré. Notamment, nous envisageons de produire plusieurs messages d'erreurs pour chaque contrainte. Le moteur de décision didactique aura la charge de choisir quel(s) message(s) envoyer en fonction des précédents messages reçus par l'élève. Pour mettre cela en place, le modèle praxéologique va être utile à trois niveaux : (i) comme aide à la production des messages d'erreur, (ii) pour identifier quels messages reçus antérieurement par l'élève devront être pris en compte dans la décision et (iii) pour caractériser l'erreur faite par l'élève afin de choisir la stratégie didactique à appliquer.

Afin d'utiliser le modèle praxéologique, la première étape de notre travail a été de faire correspondre chaque contrainte à un ou plusieurs type(s) de tâche de manipulation (Tm), et donc un ou plusieurs type(s) de tâche de conception (Tc). On remarque dans l'exemple du Tableau 2, qu'il est possible d'établir des relations simples entre les types de tâches de conception et les paramètres des types de tâches de manipulation. C'est ce type de relation qui permet d'établir un diagnostic à partir du protocole produit par l'élève. Ce travail permet de générer des différents messages portant des informations à aux niveaux suivants :

- localisation dans le protocole du Tm qui contient l'erreur,
- indication du type d'erreur dans la Tm (paramètre inadapté, Tm manquant ou Tm inutile),

- correction de l'erreur en indiquant les valeurs des paramètres de la tâche de manipulation,
- indication des différentes Tc à mettre en œuvre pour produire le Tm,
- description des différentes techniques de conception correspondant aux différents Tc,
- sélection des éléments technologiques et théoriques permettant de mettre en œuvre les différents Tc.

À ce grand nombre de niveaux de rétroaction, il faut encore ajouter que les Tc peuvent être exprimés à différents niveaux de généricité, c'est à dire soit au niveau du Tc, soit au niveau d'un type de tâche plus générique. Par exemple, si dans le protocole, l'erreur est au niveau du prélèvement d'une solution à diluer, il est possible d'évoquer le Tc « choix de la verrerie de prélèvement pour la solution à diluer » ou un type de tâche plus générique « choix de la verrerie pour prélever une solution » de manière plus générale. Ce niveau plus générique est justifié dans TitrAB, parce que d'autres types de tâches de prélèvement que celle de la solution à diluer sont dévolues à l'élève et alors la technique à employer est différente.

Malgré la grande complexité évoquée ci-dessus, il ne sera pas forcément nécessaire de produire tous les messages d'erreur pour chaque contrainte. En effet, suivant la stratégie didactique suivie, seuls certains seront utiles. Cette stratégie didactique s'appuiera sur quatre éléments de décision didactique :

- les caractéristiques du Tm contenant l'erreur : nouveauté, complexité, objectif d'apprentissage ;
- la probabilité, estimée a priori, que l'erreur soit faite au niveau de l'une ou l'autre des Tc reliés au Tm ;
- les précédents messages reçus correspondant au même Tm (et non pas à la même contrainte) ;
- l'utilité exprimée par l'élève pour les messages reçus précédemment correspondant au même Tm.

Le moteur de décision didactique reste à implémenter. Nous venons d'évoquer les paramètres d'entrée à prendre en compte et les différentes sorties (messages d'erreur) possibles, il reste à mettre en place un algorithme de décision les reliant. Cet algorithme ne prendra pas forcément en compte tous les paramètres d'entrée et ne nécessitera pas que tous les messages d'erreur soient disponibles. Pour prendre l'exemple le plus simple, si une contrainte correspond à un Tm qui n'est pas objectif d'apprentissage, le système de décision didactique peut choisir d'envoyer un message permettant de (i) localiser dans le protocole le Tm qui contient l'erreur et de (ii) corriger l'erreur en indiquant les valeurs des paramètres de la tâche de manipulation.

4. Conclusion et perspectives

Nous avons complété la modélisation praxéologique d'une activité manipulatoire de laboratoire, par une modélisation praxéologique des types de tâches de conception afin de décrire l'activité de conception expérimentale. Il s'agit d'une activité de résolution de problème dans laquelle les élèves doivent détailler la technique de manipulation à mettre en œuvre sous la forme d'un protocole expérimental. L'intérêt pédagogique de cette activité est que cela oblige les élèves à prendre des décisions que nous avons modélisées avec des types de tâche de conception (Tc). Chaque Tc peut être modélisé par une praxéologie dont le logos correspond à des connaissances que l'élève doit mobiliser. Dans cet article, nous avons donné un exemple de praxéologie de conception qui est relativement simple de part la technique à mettre en œuvre. Cependant nous avons rencontré d'autres Tc dont la résolution est plus complexe et nécessite une technique qui comporte un nombre important de Tc.

Pour accompagner les élèves dans cette tâche complexe de conception expérimentale, nous avons développé TitrAB, un EIAH (Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain) qui structure cette tâche et qui produit des rétroactions vers un élève suite à un diagnostic effectué sur son activité dans l'EIAH. Aujourd'hui nous cherchons à améliorer et diversifier les rétroactions vers l'élève à partir de la modélisation praxéologique que nous avons produite. Nous avons détaillé plusieurs propositions afin de faire évoluer le moteur de décision didactique de l'EIAH. Celles-ci impliquent la formulation de messages pour lesquels les types de tâches Tm et Tc interviennent de différentes façons.

Une autre perspective serait d'améliorer le diagnostic en utilisant les praxéologies personnelles des élèves. Pour reprendre l'exemple du choix de la verrerie de prélèvement, le diagnostic par contrainte ne distingue pas si les élèves ont choisi la fiole jaugée ou l'éprouvette graduée, deux réponses inexactes qui ne reposent pas sur les mêmes technologies de référence, et a fortiori sur les mêmes technologies personnelles.

Références

Bosch, M. & Chevallard, Y (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 19(2), 77-124.

Chaachoua, H., Ferraton, G. & Desmoulins, C. (2013) Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.

Croset, M-C. & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36(2).

Etkina, E., Karelina, A., Ruibal-Villasenor, M., Rosengrant, D., Jordan, R., & Hmelo-Silver, C. E. (2010). Design and reflection help students develop scientific abilities: learning in introductory physics laboratories. *Journal of the Learning Sciences*, 19, 54-98.

Girault, I., d'Ham, C., Ney, M., Sanchez, E., Wajeman, C. (2012). Characterizing the Experimental Procedure in Science Laboratories: A preliminary step towards students experimental design. *International Journal of Science Education*, *34*(6), 825–854.

Girault, I., & d'Ham, C. (2014). Scaffolding a Complex Task of Experimental Design in Chemistry with a Computer Environment. *Journal of Science Education and Technology*, *23*(4), 514–526.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and Achievement in Problem-Based and Inquiry Learning: A Response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, *42*(2), 99–107.

Karelina, A., & Etkina, E. (2007). Acting like a physicist: Student approach study to experimental design. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *3*(2), 020106.

Ohlsson, S. (1992). Constraint-based student modelling. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, *3*(4), 429–447.

Wajeman, C., Girault, I., d'Ham, C. & Marzin, P. (2016). Students’ reflection on experimental design during an innovative teaching sequence with LabBook. *Proceeding of ESERA 2015 - International Conference of the European Science Education Research Association,* Helsinki, Finland.

Un modèle de description de ressources, basé sur des critères didactiques et inscrit dans une perspective EIAH

Sébastien Jolivet

Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes, France

Abstract. We aim at defining a model of description of resources such as mathematics exercises. Starting from elements related to the tasks and the ostensive objects used in the exercises, this model enables us to get a description based on didactics criteria. The work which is carried on gives a main role to a praxeological model of reference and its computable representation defined in the theoretical framework T4TEL. This model enables to obtain further information from an initial description based on tasks and ostensive objects.

Résumé. Nous présentons dans cette contribution un modèle de description de ressources de type exercices de mathématiques. Ce modèle permet, à partir d'éléments liés aux tâches et aux ostensifs mobilisés dans l'exercice, d'en obtenir une description fondée sur des critères didactiques. Le travail réalisé donne un rôle central à un modèle praxéologique de référence et à sa représentation informatique proposée dans le cadre de référence T4TEL. Il permet de calculer, à partir d'une description initiale basée sur les tâches et les objets ostensifs, plusieurs informations complémentaires sur la ressource afin d'en obtenir une description augmentée.

1. Introduction

La multiplicité et la diversité des ressources[1] utilisables pour l'enseignement des mathématiques amène à interroger les moyens disponibles pour « trouver la bonne ». Le « chercheur de ressources » peut être un humain (enseignant, apprenant, formateur d'enseignants…) ou un Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (EIAH). Même si ce n'est pas le seul critère, un préalable à une recherche efficace est que les ressources soient bien indexées, et pour cela « bien décrites ».

La description et l'analyse de ressources est actuellement fondée essentiellement soit sur l'association de métadonnées (standard ScoLOM.fr[2] par exemple), soit sur une analyse didactique de la ressource *in situ* - travaux menés par Aline Robert et Marc Rogalski (2002) ou par Corinne Castela (2008) par exemple ou d'une manière générale dans l'approche documentaire introduite par Ghislaine Gueudet et Luc Trouche (2008). La première approche présente souvent une dépendance institutionnelle (temporelle et / ou spatiale) forte et une faiblesse, ou une absence, d'éléments didactiques. La seconde nécessite de disposer d'éléments liés à l'histoire de l'apprenant ou de l'enseignant pour réaliser ces descriptions. Voici trois limites que nous souhaitons lever dans notre travail[3]. Pour cela nous proposons un modèle permettant, pour certaines ressources, une description :

- basée sur des critères didactiques ;
- indépendante du descripteur ;
- inscrite dans une perspective EIAH, pour sa réalisation et pour son exploitation.

La description obtenue doit permettre de répondre aux deux questions suivantes : « Quelle est l'adéquation institutionnelle (viabilité, conformité…) d'une ressource ? » et « A quels projets d'étude d'une organisation mathématique, une ressource est-elle, plus ou moins, adaptée ? ».

Il est important de préciser que notre modèle est destiné aux producteurs et éditeurs de ressources dans une perspective d'indexation ou aux chercheurs comme outil par exemple pour l'analyse de manuels.

Dans un premier temps nous présentons le cadre théorique dans lequel s'inscrit notre travail puis nous précisons la place occupée par les institutions. Ensuite nous présentons notre modèle après avoir restreint le champ des ressources étudiées. Enfin, nous revenons sur la place des institutions dans le travail réalisé et nous terminons avec diverses questions soulevées par cette contribution.

2. Cadre théorique

Notre travail se situe dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique introduite par Yves Chevallard (1992, 1999). Pour définir notre modèle nous mobilisons plus particulièrement l'approche praxéologique et son extension T4TEL. T4TEL est une formalisation calculable du modèle praxéologique qui est aussi augmentée des notions de praxéologie personnelle introduite par Caroline Croset et Hamid Chaachoua (2016) et de variable introduite par Hamid Chaachoua et Annie Bessot (2016). Pour une présentation plus complète de T4TEL nous renvoyons au texte de Hamid Chaachoua (2018).

[1] Nous ne revenons pas sur les acceptations de ce terme et les approches le mobilisant. Nous en définissons notre acceptation un peu plus loin.

[2] http://www.lom-fr.fr/scolomfr/

[3] Pour les deux premières il s'agit bien à notre sens de limites, pour la troisième il s'agit d'une approche qui n'est pas adaptée à une perspective d'indexation.

3. La place des institutions dans le travail mené

Dans l'introduction nous avons soulevé comme limite importante de nombreux systèmes de description de ressources existant leur assujettissement à une institution particulière, à la fois sur le plan temporel et sur le plan géographique. Pour notre part nous souhaitons obtenir une description qui ne soit pas inféodée à une institution particulière, ni temporellement ni géographiquement, mais qui permette de rendre compte de l'adaptation de la ressource dans différentes institutions de différents niveaux de granularité (d'un système éducatif national ou régional à un temps donné qui est caractérisé par un curriculum particulier, jusqu'à une classe et son enseignant qui sont liés au curriculum mais ont aussi une histoire didactique particulière).

Les institutions sont présentes à de nombreux niveaux dans un exercice. Tout d'abord les objets ostensifs et non ostensifs présents dans les énoncés n'existent que parce qu'ils vivent au sein de certaines institutions, les exercices décrits n'auront donc de sens que dans des institutions où ces objets ont aussi une vie. Par ailleurs le concepteur de l'exercice travaille dans des institutions et va donc devoir être en conformité avec les rapports institutionnels au savoir qui y existent.

On constate donc que l'idée d'une « indépendance institutionnelle » est un non-sens. Nous visons cependant au non assujettissement à une institution particulière et à l'adaptabilité à des institutions non initialement intégrées au départ (évolution temporelle d'une institution ou augmentation de la couverture géographique). La dimension dynamique d'un MPR se prête bien à cet objectif.

4. Indexation, curricula et modèle praxéologique de référence

Un premier enjeu quand on souhaite décrire, pour les indexer, des ressources est de déterminer leur adéquation à telle ou telle institution. Cela soulève la question de la pérennité temporelle et de la validité géographique. Frans Van Assche (2007) l'auteur propose quatre approches pour prendre en compte le rapport aux curricula d'une ressource. On peut les synthétiser ainsi :

- associer des métadonnées aux ressources permettant une correspondance avec tous les curricula (coûts initial et de maintenance très élevés) ;
- créer une mise en relation des différents curricula de manière à permettre l'entrée par n'importe lequel d'entre eux ;
- tagguer les ressources à partir d'un curriculum universel ;
- définir un curriculum commun à l'ensemble des institutions (pays, états, région…) - politiquement non envisageable à court ou moyen terme.

Dans le travail présenté, en nous appuyant sur l'idée d'un curriculum universel, nous faisons le choix d'introduire un objet pivot, qui n'est pas un curriculum universel mais un modèle praxéologique de référence (MPR) au sens définit par Marianna Bosch et Josep Gascon (2005) représenté informatiquement de manière à pouvoir réaliser divers calculs dessus comme le proposent Hamid Chaachoua, Geneviève Ferraton et Cyrille Desmoulins (2013). La liaison est opérée entre la ressource et le MPR et c'est ensuite sur ce MPR que sont effectués les calculs qui définissent, par exemple, l'adéquation entre ressource et institutions. Il intègre, soit lors de sa conception soit de manière dynamique pour répondre à un besoin nouveau, les organisations mathématiques présentes dans les différentes institutions, mais aussi, éventuellement, des praxéologies personnelles. Construire ce MPR repose sur une étude épistémologique du domaine, sur une prise en compte de différents curricula, sur l'analyse de manuels scolaires et sur des analyses didactiques permettant de caractériser des praxéologies personnelles comme l'a, par exemple, fait Catherine Bonnat (2017). On pourra aussi caractériser les praxéologies dominantes dans une institution. Les délimitations, du domaine mais aussi temporelle et géographique, seront pensées en fonction des besoins, du chercheur, ou, dans notre cas, des utilisateurs du dispositif construit.

Dans le cadre de notre travail nous ne construisons pas un tel modèle de référence, nous nous appuyons sur des modèles précédemment construits autour du domaine de l'algèbre élémentaire par Geneviève Ferraton (2011) et Julia Pilet (2012) et les formalisons au sein de T4TEL avec l'utilisation de variables.

5. Les énoncés avec activité à réaliser

Dans le cadre de notre travail nous nous intéressons au type de ressources qui sont, en volume, les plus présentes dans les manuels scolaires ; celles qui sollicitent une activité de production de la part des apprenants. Divers termes, avec parfois des acceptations différentes selon qu'on se place du côté recherche ou du côté métier, sont utilisés pour ces ressources : exercices (avec divers qualificatifs : « de découverte », « de synthèse », « d'approfondissement »…), problèmes, activités. Nous ne revenons pas sur ces différences et les acceptations de ces termes selon qu'on se place du point de vue métier, didactique, psychologie cognitive, etc., on pourra à ce propos consulter Sébastien Jolivet (2016).

5.1. Définition d'un EAR

Corinne Castela propose de considérer la « tâche prescrite [comme] un couple associant l'énoncé et le contexte de prescription » (Castela, 2008, p.151). Pour notre part, nous ne prenons pas en compte le contexte de prescription conformément à notre objectif d'obtenir une description *a priori* décontextualisée et nous précisons alors notre objet d'étude.

L'objet « énoncé avec activité à réaliser » (EAR) est défini comme suit : « *un EAR est un objet (sous forme écrite, verbale ou vidéo), destiné à un apprenant, dans lequel il y a une activité, amenant à la production d'un résultat, à la charge de l'apprenant* ».

Un EAR est le fruit d'un processus de « didactisation » de types de tâches dans le but de répondre à un projet didactique et éventuellement pédagogique (s'il intègre par exemple des modalités spécifiques d'organisation du travail). Nous ne préjugeons pas de la nature de l'activité à réaliser contrairement, par exemple, à la disjonction qui est souvent faite entre *exercice* et *problème*.

Un EAR est constitué, *a minima*, d'un ensemble de tâches et de tous les éléments, objets ostensifs, permettant de les définir.

5.2. Genèse d'un EAR, genèse de liens

Un EAR est lié, lors de sa conception, à diverses institutions (système scolaire, classe(s) auxquels il est destiné) ; à différentes intentions didactiques (faire découvrir, travailler une technique, évaluer…), pédagogiques (organisation prévue de la classe) ou institutionnelles (ne pas perpétuer les stéréotypes de genre…) ; au système de ressources du concepteur.

L'objectif poursuivi est de « briser » ces liens issus de la genèse de l'EAR pour obtenir une description initiale qui soit indépendante du concepteur et du descripteur dans la mesure où on ne demande pas une réinterprétation des intentions au descripteur. Ceci non pas pour faire vivre *in vacuo* l'EAR[4], mais pour pouvoir ensuite enrichir le champ des possibles en interrogeant sa viabilité dans diverses institutions, son niveau d'adéquation à diverses intentions didactiques, sa pertinence au regard de l'histoire d'un apprenant, d'une classe…

[4] Ce qui serait d'ailleurs en contradiction avec les fondements de la TAD.

6. Modèle de description des EAR

6.1. Description initiale selon trois dimensions

Notre modèle est composé de trois dimensions. Les deux premières, « Tâches » et « Ostensifs », sont liées au contenu visible de l'EAR. La troisième, « Relations entre les tâches » est calculée à partir des deux premières. Rappelons que cette description prend appui sur un MPR organisé en générateurs de type de tâche. Pour un générateur donné on produit un ensemble fini de types de tâches $\{T_i\}_i$.

Dimension « Tâches » (DT)

Un EAR contient au moins une tâche et, quand il y en a plusieurs, il est organisées d'une manière structurée, le plus souvent à l'aide de numéros et de puces mais aussi parfois à l'aide de « connecteurs » (ensuite, alors…). Puis pour chaque niveau de la structure nous examinons la présence ou non d'une ou plusieurs tâches.

Dimension « Ostensifs » (DO)

Chaque tâche est définie par un ensemble d'objets ostensifs qui ont pour fonction de :

- définir la tâche ;
- fournir les éléments de la technique permettant de la traiter ;
- orienter ou imposer le choix d'une technique.

Ces ostensifs peuvent être complétés par d'autres avec des fonctions complémentaires (susciter une activité cognitive, se conformer à des attentes institutionnelles, prendre en compte des considérations ergonomiques…), dans l'état actuel de nos travaux nous ne les prenons pas en compte.

Dimension « Relations entre les tâches » (DR)

La troisième dimension permet de décrire les relations entre les différentes tâches. Pour cela nous considérons le type de tâches associé à chaque tâche et les ostensifs mobilisés pour les définir. Nous proposons les relations suivantes qui s'appuient sur celle de sous-type de tâche (nous notons $\subset_{ST}$ la relation « *être un sous type tâche de* ») donnée dans (Chaachoua, 2018) et sur l'hypothèse suivante.

Hypothèse : soit t une tâche telle que $t \in T_1$ et $t \in T_2$. Alors $T_1 \subset_{ST} T_2$ ou $T_2 \subset_{ST} T_1$.

Il est important de noter que les relations obtenues sont évidemment liées au MPR choisi et aux générateurs de types de tâches retenus.

Définition 1 (*type de tâche optimum*) : soit t une tâche de type de tâches T généré par GT. $T_{opt(t)}$ est l'élément de $\{T_i\}$ tel que : $t \in T_{opt(t)}$ et il n'existe pas T_k tel que $t \in T_k$ et $T_k \subset_{ST} T_{opt(t)}$

Proposition : pour toute tâche t il existe un unique $T_{opt(t)}$.

Définition 2 (*être de même type de tâche optimum*) : t_1 est de même type de tâche optimum que t_2 si $T_{opt(t1)} = T_{opt(t2)}$. On note $t_1 \sim_{Topt} t_2$.

Définition 3 (*être fille de*) : t_1 est une fille de t_2 si $T_{opt(t1)} \subset_{ST} T_{opt(t2)}$. On note $t_1 \sim_{fille} t_2$.

Définition 4 (*être une variation de*) : t_1 est une variation de t_2 de niveau T_{var} si t_1 et t_2

- t_1 n'est pas une fille de t_2 et t_2 n'est pas une fille de t_1
- il existe T_{var} tel que
  - $T_{opt(t1)} \subset_{ST} T_{var}$ et $T_{opt(t2)} \subset_{ST} T_{var}$
  - T_{var} est minimum pour la relation $\subset_{ST}$

On note $t_1 \sim_{var(Tvar)} t_2$.

Définition 5 (*être utile à*) : t_1 est utile à t_2 s'il existe τ_2^i, technique instanciée de $T_{opt(t2)}$ telle que $T_{opt(t1)}$ appartienne à τ_2^i.

D'une manière heuristique on pourrait décrire ces relations de la manière suivante :

- « être de même type de tâche optimum » signifie que, relativement au niveau de précision permis par le MPR, les deux tâches mettent en jeu le même type de tâche en étant le plus précis possible dans la caractérisation ;
- « être fille de » signifie que la première tâche est une spécialisation de la deuxième ;
- « être une variation de » signifie que les deux tâches permettent de balayer deux cas différents rattachés à un même type de tâche plus générique ;
- « être utile à » signifie que la première tâche prend en charge une partie d'une technique instanciée permettant de réaliser la deuxième tâche.

6.2. Exemple

Pour illustrer le propos précédent nous examinons un exemple. Il est traité à l'aide d'un MPR restreint que nous n'avons pas la place de présenter ici mais dont nous présentons trois générateurs de types de tâches : « développer une expression littérale », Tableau 1 ; « supprimer les parenthèses dans une expression littérale », Tableau 2 ; « Réduire une expression littérale », Tableau 3.

Ils sont définis, conformément au cadre T4TEL, par un verbe d'action, un complément fixe et des variables. La troisième ligne de chaque tableau contient les différentes valeurs de ces variables. Chaque instanciation de ces valeurs donne lieu à au moins une technique qui peut être décrite par des types de tâches dont certains sont des sous-types de tâches du générateur.

Nous ne présentons pas de technique associée au premier générateur pour des raisons de place, signalons simplement qu'elles sont justifiées par des éléments technologiques tels que les formules de simple et double distributivité, les identités remarquables, techniques de calculs dans les différentes structures considérées (N, Z, D, Q, R), règles concernant les produits de puissances.

Verbe d'action	*Complément fixe*	*Variable 1*	*Variable 2*	*Variable 3*	*Variable 4*
Développer	Une expression littérale	Forme de l'expression	Nature des coefficients	Ordre des facteurs	Signe multiplié apparent ou non
Valeurs des variables		Voir Figure 1	N ; Z ; D ; Q ; R	Monômе - polynôme Polynôme - monôme	Oui Non

Tableau 1. GT "Développer une expression littérale"

Verbe d'action	*Complément fixe*	*Variable 1*	*Variable 2*
Supprimer	Les parenthèses dans une expression littérale	L'expression littérale contient des produits avec au moins un facteur entre parenthèses	L'expression littérale contient des parenthèses précédées d'un signe « + » ou d'un signe « - »
Valeurs des variables		Oui Non	Oui Non

Tableau 2. GT "Supprimer les parenthèses dans une expression littérale"

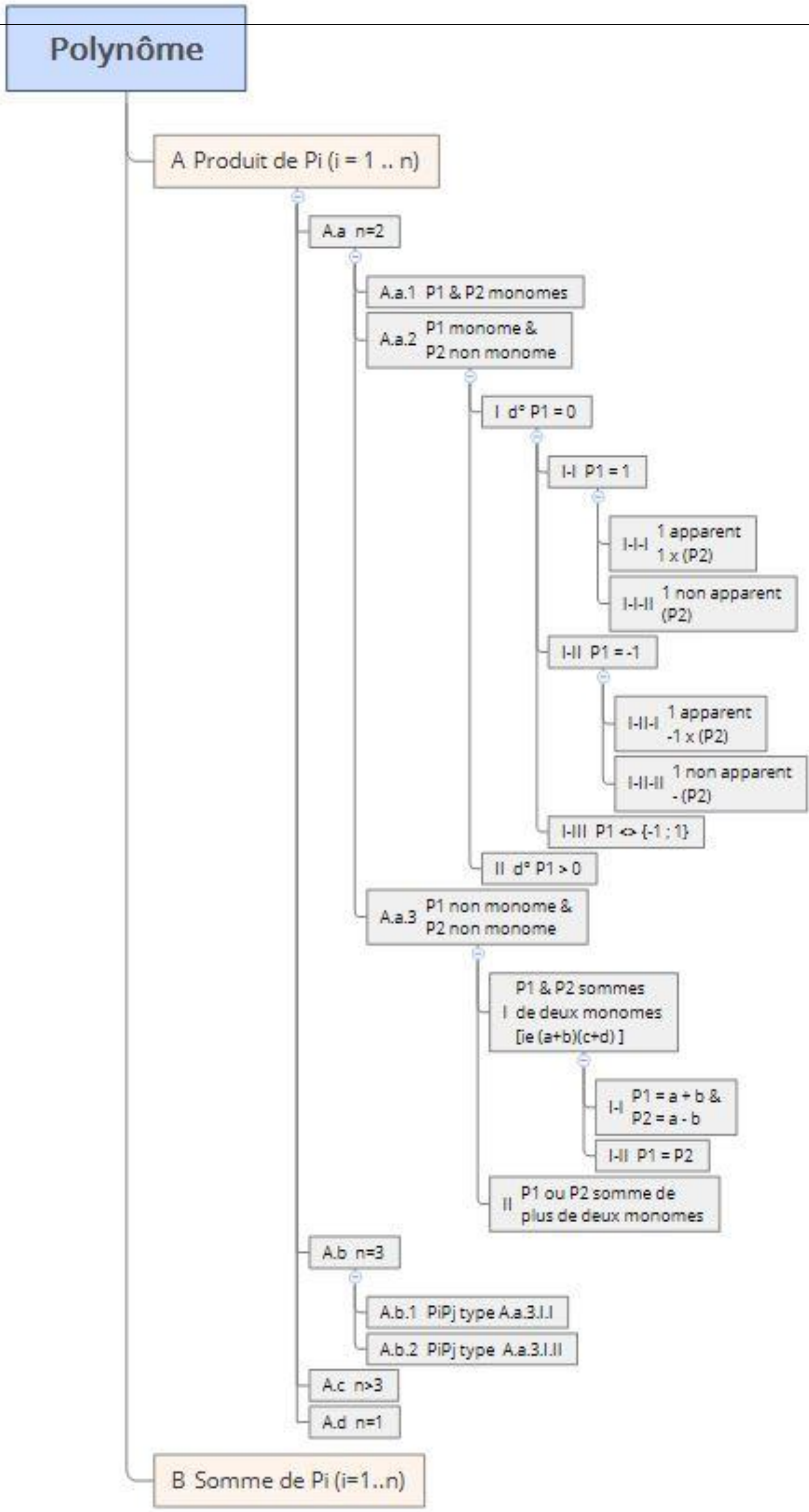


Figure 1. Valeurs de V1, Tableau 1. GT "Développer une expression littérale"

Une technique correspondant au type de tâche obtenu par instanciation des valeurs des variables à « Oui » et « Oui » est :

- Repérer les produits contenant au moins un facteur entre parenthèses
- Ajouter, si nécessaire, un délimiteur (parenthèses, crochets…) autour de ces produits
- Développer les produits

- Repérer les parenthèses précédées d'un signe plus ou d'un signe moins
- Supprimer les parenthèses relatives à la mise au carré ou à une puissance supérieure d'un monôme
- Supprimer les parenthèses précédées d'un signe plus
- Supprimer les parenthèses précédées d'un signe moins

Verbe d'action	*Complément fixe*	*Variable 1*	*Variable 2*
Réduire	une expression littérales	L'expression contient des parenthèses	Nature des coefficients
Valeurs des variables		Oui Non	N ; Z ; D ; Q ; R

Tableau 3. Générateur de types de tâches "Réduire une expression littérale"

Une technique correspondant au type de tâches obtenu par instanciation des valeurs des variables à « Oui » et « Q » est :

- Supprimer les parenthèses
- Réaliser les produits de monômes
- Sommer les monômes de même degré

Nous proposons alors de décrire à l'aide du modèle l'EAR de la Figure 2[5].

40 Distributivité à gogo

a. On veut développer l'expression A = $2(5x+2)(3x+1)$. Pour cela, développe d'abord l'expression $2(5x+2)$ puis termine le développement de A.

b. Développe le produit $(x+2)(3x+2)$ et déduis-en le développement de :

B = $(x+2)(3x+2)(x+4)$.

c. En t'inspirant des questions précédentes, développe les expressions suivantes :

- C = $4(5x-1)(3x+3)$;
- D = $(1-x)(1+x)(2x+1)$.

Figure 2 : EAR n°1

La structuration de l'EAR n°1 et la dimension « Tâches » sont présentées dans le Tableau 4.

Niveau	Sous-niveau	Indicateur	Tâche	Codage
1		Item a.		
	1.1	Connecteur « d'abord»	Développer 2(5x+2)	t_1
	1.2	Connecteur « puis »	Développer 2(5x+2)(3x+1)	t_2
2		Item b.		
	2.1		Développer (x+2)(3x+2)	t_3
	2.2	Connecteur « déduis-en »	Développer (x+2)(3x+2)(x+4)	t_4
3		Item c.		
	3.1	« C »	Développer 4(5x-1)(3x+3)	t_5
	3.2	« D »	Développer (1-x)(1+x)(2x+1)	t_6

Tableau 4. Structuration et dimension "Tâches" de l'EAR n°1

[5] Source : Manuel SésaMATH, cycle 4, chapitre A7. Magnard, édition 2016

Une fois cette analyse de la structure et la liste des types de tâches réalisée, se pose la question du rattachement de chacune des tâches à un type de tâches. Pour cela il s'agit de déterminer le générateur puis de définir les instanciations de variables possibles. On obtient alors le Tableau 5.

Niveau	Sous-niveau	Tâche	Type de tâche optimum
1			
	1.1	Développer 2(5x+2)	TDev (A.a.2.I-III ; N ; mon - poly ; non)
	1.2	Développer 2(5x+2)(3x+1)	TDev (A.b ; N ; . ; non)
2			
	2.1	Développer (x+2)(3x+2)	TDev (A.a.3-I ; N ; . ; non)
	2.2	Développer (x+2)(3x+2)(x+4)	TDev (A.b ; N ; . ; non)
3			
	3.1	Développer 4(5x-1)(3x+3)	TDev (A.b ; Z ; . ; non)
	3.2	Développer (1-x)(1+x)(2x+1)	TDev (A.b ; Z ; . ; non)

Tableau 5. Structure, tâches et types de tâches optimum de l'EAR n°1

A ce stade nous avons mis en évidence les OM travaillées, cependant nous ne rendons pas compte de la manière dont est organisé le travail de ces OM. C'est l'objectif visé avec la dimension « Relation entre les tâches ».

Dimension « Ostensifs »

Dans cet EAR l'ensemble des expressions sont formulées dans le registre symbolique algébrique, le jeu sur les ostensifs n'est donc pas présent de ce côté, par contre on peut considérer les connecteurs (« puis » ; « d'abord » ; « déduis-en ») comme des objets ostensifs qui renvoient à des objets non ostensifs du type « stratégie de résolution ou de calcul ». Nous n'approfondissons pas plus cet aspect dans ce document.

Dimension « Relations entre les tâches »

Nous reprenons les relations définies dans 6.1.

Relation observables	Tâches concernées et association
« être de même type de tâche optimum »	$t_2 \sim_{Topt} t_4$ avec $T_{opt} = T_{Dev}$ (A.b ; N ; . ; non) $t_5 \sim_{Topt} t_6$ avec $T_{opt} = T_{Dev}$ (A.b ; Z ; . ; non)
« être fille de »	L'inclusion de N dans Z permet aussi d'obtenir que t_2 et t_4 sont des filles de t_5 (ou t_6)
« être une variation de »	$t_1 \sim_{var(Tvar)} t_3$ avec $T_{Var} = T_{Dev}$ (A.a ; N ; . ; non)
« être utile à »	t_1 est utile à t_2 et t_3 est utile à t_4

Tableau 6. Relations entre les tâches dans l'EAR 1

Nous disposons maintenant d'une description affinée qui permet de catégoriser les types de tâches en jeu. Les trois premières relations peuvent s'obtenir par parcours de l'ensemble des $\{T_i\}_i$ à l'aide de la représentation en arbre des valeurs des variables. Pour la relation « être utile à » nous disposons pour de deux éléments dans notre situation ; d'une part les connecteurs identifiés dans la dimension ostensifs et d'autre part des relations qui existent entre les expressions littérales intervenant dans les différentes tâches et l'activité sollicité sur ces expressions.

En associant ces observations à la structure de l'EAR nous pouvons identifier que les niveaux 1 et 2 permettent de travailler la technique de TDev (A.b ; Z ; . ; non) qui sera mise en œuvre deux fois au niveau 3.

7. Conclusion et perspectives

Comme stipulé dès l'introduction le travail mené s'inscrit dans une perspective EIAH et d'utilisabilité pour un volume important de ressources. L'ensemble des travaux issus de la didactique sur tel ou tel domaine ne peuvent donc pas être intégrés de manière systématique dans le modèle, de même certains aspects que l'on pourrait relier à la volonté de solliciter telle ou telle activité cognitive chez l'apprenant ne sont pas formalisés et intégrés au modèle. Nous pensons cependant que le modèle proposé et les calculs qui peuvent être effectués à partir de ce modèle pour enrichir la description initiale permettent d'atteindre une finesse de description didactique des ressources qui n'est pas proposée par les dispositifs actuels.

Par ailleurs l'inscription dans une perspective EIAH n'est pas synonyme simplement de contraintes, elle offre aussi des perspectives intéressantes. Les capacités logicielles en terme de reconnaissance automatique de structure ou de caractères permettent d'envisager une certaine automatisation du processus de description. La représentation informatique du modèle praxéologique réalisée dans T4TEL permet aussi d'envisager un certain nombre de calculs comme, par exemple, une caractérisation des prérequis liés à une ressource en fonction des techniques et éléments technologiques qui sont mobilisés. Enfin on peut aussi de penser l'articulation au sein d'autres EIAH (générateurs d'exercices, services de construction de scénario pédagogique, dispositif de diagnostic).

Hors du champ des EIAH, le modèle construit peut être pertinent en didactique pour le chercheur, par exemple comme outil pour l'analyse d'un corpus donné (diversité des ressources présentes, ressources manquantes, etc).

Différentes questions émergent du travail en cours : l'utilisabilité, par exemple en terme de « niveau minimum d'information » à associer à une ressource pour en obtenir une description exploitable ; la portée du modèle en l'appliquant sur un autre domaine que l'algèbre de collège. Répondre à ces questions passera sans doute notamment par un approfondissement ou des évolutions dans les travaux en cours autour de T4TEL.

Le deuxième axe de questionnement est la mise en relation des ressources décrites avec des intentions didactiques. Pour cela nous proposons de nous appuyer sur les moments didactiques de l'étude introduits par Yves Chevallard (2002) et la notion d'intention didactique proposée par Jean Portugais (1999).

Bibliographie

Bonnat, C. (2017). *Etayage de l'activité de conception expérimentale par un EIAH pour apprendre la notion de métabolisme cellulaire en terminale scientifique* (Thèse de doctorat). Université Grenoble Alpes, Grenoble.

Bosch, M., & Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Eds.). In *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e école d'été de didactique des mathématiques (p. 107‑122)*. La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, *28*(2), 135‑182.

Chaachoua, H. (2018). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *In Actes du 6e congrès pour la Théorie Antrophologique du Didactique*. Autrans.

Chaachoua, H., & Bessot, A. (2016). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *In Actes du 5e congrès pour la Théorie Antrophologique du Didactique*. Castro-Urgiales.

Chaachoua, H., Ferraton, G., & Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *Présenté à 4e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*. Toulouse, France.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en didactique des mathématiques, 12*(1), 83‑121.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221‑265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éd.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (p. 41‑56)*. La Pensée Sauvage, Grenoble. Consulté à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf

Croset, M.-C., & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 36*(2).

Ferraton, G. (2011). *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège : construction et utilisation d'un modèle praxéologique de référence pour les trois types de tâche réduire, développer et factoriser une expression littérale*. (Mémoire de Master 2 IC2A, non publié). Université Joseph Fourrier - Grenoble 1.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education & didactique, 2*(3), 7‑33.

Jolivet, S. (2016). Articuler les dimensions épistémologiques, didactiques et institutionnelles d'un exercice pour une indexation dans un EIAH. *In Actes des 6e Rencontres Jeunes Chercheurs en EIAH (pp. 145‑150)*. Montpellier.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot (Paris 7), Paris. Consulté à l'adresse http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039

Portugais, J. (1999). L'intentionnalité et le cognitif. In G. Lemoyne & F. Conne (Éd.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 71‑102). Québec, Canada: Les presses de l'Université de Montréal.

Robert, A., & Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur les exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe. *Petit x, (60)*, 6‑25.

Van Assche, F. (2007, septembre). Linking Learning Resources to Curricula by using Competencies. *Paper présenté à First International Workshop on Learning Object Discovery & Exchange,* Crête.

Modélisation de praxéologies personnelles *a priori* dans une situation de conception expérimentale en biologie

Catherine Bonnat

Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble Alpes, France

Abstract. The study consists in modelling errors in a biology situation implemented in a TEL system. The inquiry-based learning is used in this activity. We introduce the personal praxeology to model errors a priori in this situation. The model has been tested with student's work in high school classes in France. This modelling work is necessary in order to improve the platform in a future work, which consists in implementing an automatic diagnosis of error.

Résumé. L'étude porte sur une modélisation de l'erreur dans une situation de biologie conçue dans un environnement informatique pour l'apprentissage humain et qui propose une activité incluant la démarche d'investigation. Cela se traduit par une modélisation de praxéologies personnelles *a priori*, mises à l'épreuve par l'analyse de productions d'élèves au lycée en France. Cette modélisation, novatrice en biologie, participera dans un second temps à l'évolution de la plateforme vers la mise en place d'un diagnostic automatique des erreurs.

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

1. Contexte de la recherche

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche sur l'étayage de l'activité de conception expérimentale en biologie par un environnement informatique pour l'apprentissage humain (EIAH), et plus précisément dans la mise en place d'un diagnostic automatique des erreurs des élèves pour proposer des aides personnalisées. Nous utilisons pour cela une plateforme numérique en ligne, LabBook (Girault, d'Ham, Marzin & Wajeman, 2017), qui vise à aider les élèves dans ce type d'activité.

L'activité de conception expérimentale est une des étapes de la démarche d'investigation et est préconisée dans les programmes de sciences à l'école. Cette activité consiste à imaginer et concevoir une expérience qui peut être rédigée sous la forme d'un protocole (Etkina, Karélina &Ruibal-Villasenor, 2010). Ce dernier décrit les conditions précises de l'expérience par une succession d'étapes et d'actions paramétrées (Marzin, 2013).

Afin d'aider les élèves dans cette tâche complexe (Séré & Beney, 1997), nous avons conçu une situation sur un thème en biologie, ainsi que des aides conceptuelles relatives aux difficultés identifiées dans la littérature, et nous les avons implémentées dans la plateforme.

La conception de la situation et des aides apportées nécessitent un travail didactique préalable, dont une modélisation des connaissances en jeu dans l'activité, ainsi qu'une modélisation des possibles erreurs afin de proposer des aides appropriées.

Cette nécessaire modélisation a été réalisée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et plus précisément le modèle praxéologique (Bosch & Chevallard, 1999) utilisé en mathématique. A cela, nous ajoutons l'utilisation d'une extension de ce cadre (T4TEL[1]) développée par l'équipe MeTAH (Chaachoua & Bessot, 2017) qui permet de prendre en compte la dimension informatique liée à l'EIAH.

2. Cadre théorique et problématique

Pour modéliser la situation, nous utilisons le modèle de la praxéologie introduit par Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999). Ce cadre, le

[1] T4 renvoie au quadruplet praxéologique et TEL pour Technology Enhanced Learning

plus souvent utilisé en mathématiques, a aussi été l'objet de travaux en chimie (Girault & Chaachoua, 2013) et en biologie (Bonnat, 2017).

Il permet de décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution et les activités de l'élève en tant que sujet de l'institution, mais aussi les comportements non attendus par l'institution, en particulier les erreurs. De plus, il s'agit d'un modèle adéquat pour une implémentation informatique qui a fait l'objet de travaux de recherche, en mathématiques notamment, (Chaachoua, Ferraton & Desmoulins, 2013 ; Chaachoua, 2015), dans lesquels les auteurs proposent une extension du modèle praxéologique pour notamment, prendre en compte la dimension informatique liée à l'utilisation d'un EIAH.

2.1. Notion de variables dans T4TEL

Le contexte de notre étude se situe dans le domaine des EIAH, ce qui implique un travail de modélisation informatique des objets de savoir à enseigner et des connaissances d'un sujet afin par exemple dans notre étude, de produire des diagnostics automatique des erreurs. Dans le modèle T4TEL, Hamid Chaachoua & Annie Bessot (2017) introduisent notamment la notion de variable afin de formaliser davantage le type de tâches, avec comme objectif de structurer un ensemble de situations spécifiques d'une connaissance.

Selon ce modèle, un type de tâches comme *« T : observer à l'aide d'un dispositif, la présence de glucose dans la suspension de levures»* se définit par un verbe d'action « observer », des compléments fixés « la présence de glucose » « dans la suspension de levures », et un complément « à l'aide d'un dispositif de mesure » qui peut varier, et qui pourrait être défini comme une variable. Une variable peut prendre différentes valeurs (dans l'exemple cité : sonde, glucotest, liqueur de Fehling), sur lesquelles va s'appuyer notre proposition de modélisation de l'erreur contextualisé à la situation proposée.

2.2. Praxéologie personnelle

La praxéologie institutionnelle modélise ainsi le rapport institutionnel en prenant en compte ce qui est attendu par l'institution.

Dans leur étude, Marie-Caroline Croset & Hamid Chaachoua (2016), mettent en avant la nécessité de prendre également en considération les connaissances de l'apprenant et proposent une articulation de ces deux cadres en intégrant à la fois les rapports institutionnel et personnel de l'élève.

Ainsi, face à une tache donnée *t*, l'institution attend d'un élève la mise en place d'une technique qui relève d'une organisation institutionnelle associée à la tache *t*. La non conformité du rapport personnel à *t* se traduit par la mise en œuvre d'une technique, soit scientifiquement valide mais non adéquate institutionnellement, soit scientifiquement non valide (Nguyen, Chaachoua & Comiti, 2007). Ils appellent praxéologie personnelle la modélisation des écarts entre les attentes institutionnelles et les perceptions des élèves. Elle est constituée de quatre composantes (T, t, τ, θ) qui intègrent des techniques et des technologies qui ne sont pas nécessairement valides.

Nous faisons l'hypothèse que cette modélisation permet de décrire les erreurs des élèves dans notre situation de conception de protocole sur le thème du métabolisme cellulaire abordé en terminale scientifique (élèves de 17-18 ans) de spécialité sciences de la vie et de la terre (TS.SVT).

2.3. Questions de recherche

Le travail de modélisation de l'erreur dans notre situation est nécessaire afin de faire évoluer la plateforme vers la mise en place d'un diagnostic automatique des erreurs des élèves et des rétroactions personnalisées. Il a été conduit selon les questions de recherches suivantes :

- Quelles sont les praxéologies personnelles *a priori* en lien avec la situation proposée ?
- Peut-on enrichir cette modélisation *a priori* à partir de l'analyse des productions d'élèves ?

Nous proposons dans cette étude, une méthodologie et les résultats de la modélisation de praxéologies personnelles *a priori*. Nous les présentons les résultats pour un des types de tâches de la situation.

3. Méthodologie

3.1. Présentation de la situation

Notre étude porte sur une situation de conception expérimentale en biologie incluant une conception de protocole sur le métabolisme de la fermentation alcoolique. Il s'agit d'une activité dans laquelle l'élève doit rédiger un protocole expérimental structuré en étapes et actions. Ces dernières contiennent des paramètres d'actions qui peuvent prendre plusieurs valeurs.

Par exemple, afin de réaliser le métabolisme de la fermentation alcoolique, les levures qui sont des microorganismes vivants, doivent être placées en anaérobie (milieu dépourvu de dioxygène) et à température optimale (environ 25°C). Expérimentalement, pour placer les levures en anaérobie, l'élève devra proposer dans son protocole, une action du type *« je ferme le contenant avec un matériel adapté »* pour laquelle il devra fixer deux valeurs de paramètre : le contenant (tube à essai, bécher, fiole…) et le matériel adéquat pour le fermer (bouchon, bouchon percé…).

Ainsi, du côté de l'activité de l'élève, les erreurs peuvent porter sur les actions proposées, mais aussi, pour chacune des actions proposées, sur la présence et le choix de valeurs de paramètres.

Du côté de la modélisation des connaissances, cela se traduit par un type de tâches comprenant des variables de nature différentes, pour lesquelles le chercheur (ou l'enseignant) peut fixer ou choisir certaines valeurs. L'exemple pris ci-dessus, peut se traduire selon la modélisation praxéologique étendue à T4TEL, par le type de tâches « fermer un contenant avec un matériel adéquat » pour lequel on distingue deux variables didactiques : « le contenant » et « le matériel ». Ces variables peuvent prendre différentes valeurs à disposition de l'enseignant : le contenant (tube à essai, bécher, fiole…) et le matériel adéquat pour le fermer (bouchon, bouchon percé…).

Nous présentons le travail de modélisation de l'erreur pour un des types de tâches extrait de la praxéologie de référence de la situation élaborée au préalable.

T : « placer les microorganismes dans les conditions du milieu »

La technique relative et conforme aux attentes institutionnelles est :

- T_0 : prélever un volume de suspension de microorganismes et les verser dans un contenant
- T_1 : fermer le contenant avec le matériel adéquat
- T_2 : porter et maintenir la suspension de microorganismes à température à l'aide d'un dispositif adéquat

Nous choisissons ce type de tâche car il est objectif d'apprentissage en classe de TS.SVT et à l'origine de difficultés identifiées dans la littérature.

3.2. Modélisation de praxéologies personnelles *a priori*

Méthodologie générale.

L'élaboration de praxéologies personnelles *a priori*, nécessite un croisement entre l'analyse épistémologique qui identifie les difficultés *a priori* des élèves, et la modélisation praxéologique de la situation (praxéologie de référence). Ceci permet de distinguer les types de tâches, tâches, techniques et technologie à l'origine de difficultés chez les élèves.

Nous proposons une méthodologie d'élaboration de praxéologies personnelles *a priori* en prenant l'exemple du type de tâche précédemment cité.

Les praxéologies personnelles de l'élève peuvent être modélisées selon le schéma présenté ci-dessous (figure 1). Nous indiquons également des éléments d'interprétation.

Pour un type de tâche T donné du modèle de référence, il existe une technique τ_I qui accomplit la tâche et qui est attendue par l'institution (I), et se décrit comme un ensemble de types de tâches tel que $\tau_I = \{T_i\}$.

Soit τ_e, une technique de l'élève qui appartient au modèle praxéologique de référence.

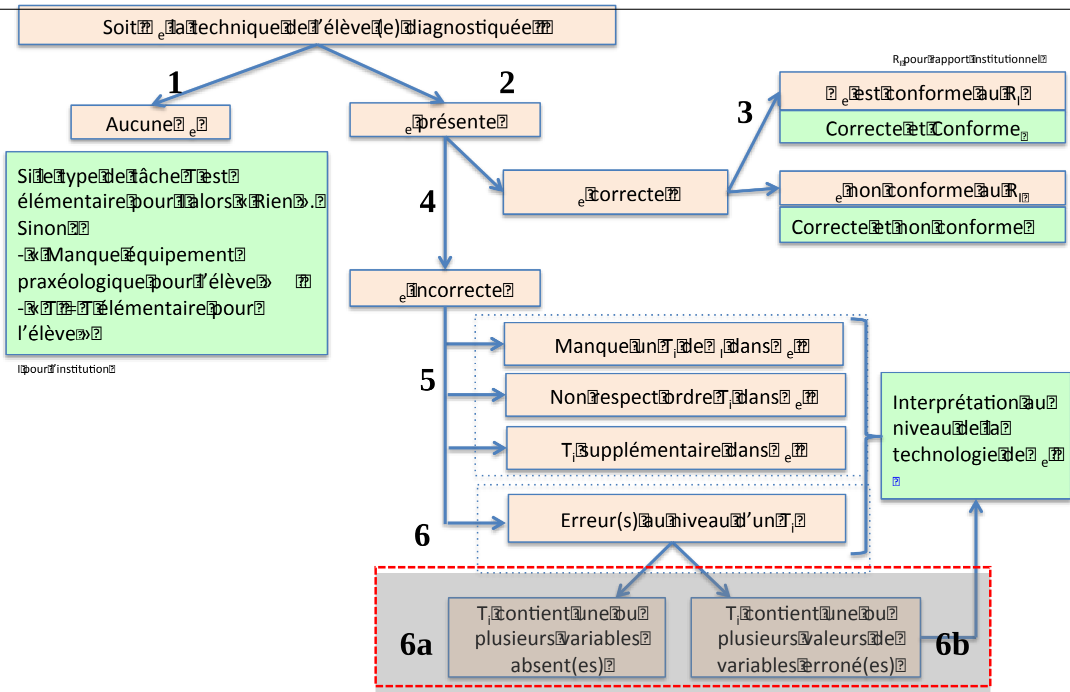


Figure 1 : modélisation de praxéologies personnelles

La technique de l'élève peut être soit présente, soit absente.

1 : **Si la technique τ_e de l'élève est absente** et que le type de tâche est élémentaire pour l'institution alors l'absence de technique de l'élève n'est pas interprétable au niveau des technologies de l'élève. Si par contre le type de tâche n'est pas élémentaire pour l'institution, alors soit l'élève ne dispose pas de l'équipement praxéologique correspondant, soit le type de tâche est considéré comme élémentaire par l'élève.

2 : **si la technique τ_e de l'élève est présente**, elle peut être :

3 : **correcte et conforme** aux modèle de référence institutionnel, auquel cas elle est validée, ou bien **correcte et non conforme** au rapport institutionnel.

4 : **incorrecte** auquel cas:

5 : L'erreur peut porter sur **la technique** globale de l'élève, et peut être de différente nature (un T_i absent / supplémentaire, ordre des T_i incorrecte).

6 : et/ou l'erreur peut également être inhérente à un **type de tâches T_i** de la technique.

Dans les deux cas (5 et 6), ces erreurs portées sur la technique de l'élève, pourront être justifiées au niveau des technologies relatives à la technique erronée de l'élève.

Spécificités de l'activité de conception expérimentale.

Nous avons choisi, une situation de conception expérimentale incluant une conception de protocole qui consiste à décrire l'expérience à réaliser sous la forme d'un protocole structuré en étapes et actions. Ces dernières contiennent des paramètres qui peuvent prendre plusieurs valeurs. La tâche de l'élève consiste donc, à la fois à proposer des étapes et des actions paramétrées mais aussi à choisir des valeurs de paramètres. Afin de prendre en compte les spécificités de cette activité dans la modélisation de praxéologies personnelles *a priori* (Figure 1), nous spécifions deux types d'erreurs inhérents à un type de tâche T_i de la technique (6).

6a : une erreur portée sur **l'absence de variable**(s) dans une tâche

6b : une erreur portée sur la **présence d'une valeur de variable erronée**

Ces erreurs modélisées *a priori* renvoient, pour certaines, vers une interprétation *a priori* du côté des technologies.

3.3. Enrichissement de praxéologies personnelles *a priori* à partir de productions d'élèves

Nous avons fait l'hypothèse que l'analyse de productions d'élèves permettrait de valider les praxéologies personnelles modélisées *a priori* et d'enrichir ce modèle avec l'identification notamment de nouvelles praxéologies personnelles basées sur des erreurs non proposées *a priori*.

Les praxéologies personnelles des élèves ont été modélisées à partir de 110 productions d'élèves obtenus lors de deux expérimentations menées dans des classes de TS.SVT en mai et octobre 2016. Les élèves ont rédigé leur protocole expérimental sur la plateforme LabBook. Les protocoles individuels obtenus ont été analysés et comparés à un protocole « expert » conforme aux attentes institutionnelles et modélisé à partir de la praxéologie de référence.

Le corpus d'analyse est composé de 100 productions d'élèves pour lesquels il existe au moins une erreur relative à la technique du type de tâches étudié T « placer les microorganismes dans les conditions du milieu ». En effet, sur les 110 productions initiales, 10 d'entre elles se sont avérées conformes au protocole « expert ». Nous avons modélisé l'ensemble des praxéologies personnelles des élèves à partir de ces protocoles et nous les avons comparées aux praxéologies personnelles identifiées *a priori* afin de les enrichir.

4. Résultats

4.1. Modélisation de 12 praxéologies personnelles *a priori*

Nous avons modélisé des praxéologies personnelles *a priori* pour le type de tâche T : « placer les microorganismes dans les conditions du milieu », dont la technique relative conforme aux attentes institutionnelles et contextualisée à la situation est :

- t_0 : prélever 36 ml de suspension de levures et les verser dans un tube à essai (40 mL)
- t_1 : fermer le tube à essai avec bouchon hermétique
- t_2 : porter et maintenir la suspension de levures à 25°C à l'aide d'un bain marie

À partir de la figure 1, nous avons identifié pour chaque concept en jeu, les possibles erreurs sur la technique globale de l'élève (5), qui sont l'absence de t_0 et/ou l'absence de t_1, et/ou l'absence de t_2. L'ordre des T n'a pas d'importance dans notre situation, et nous ne nous intéressons pas aux tâches supplémentaires qui peuvent être multiples.

À cela, s'ajoute ou non, les erreurs (6) portant sur la variable d'un ou plusieurs éléments de la technique de T modélisées par l'absence de variable (6a) noté V_0, et/ou une erreur au niveau de la valeur de la variable (6b) noté $V_{1 \rightarrow 8}$. Les possibles erreurs portant sur les valeurs de variables sont présentées ci-dessous :

V_1 : volume total de solution(s) prélevé > au volume du contenant

V_2 : volume total de solution(s) prélevé < au volume du contenant

V_3 : bactérie

V_4 : solution de glucose/fructose/amidon, eau

V_5 : bouchon non hermétique

V_6 : bouilloire

V_7 : t°> 40°C

V_8 : t°< 20°C

A partir de ces erreurs, nous avons modélisé neuf technologies erronées qui pourraient justifier ces techniques *a priori*. Les numéros de technologies sont indépendants de ceux des valeurs de paramètre Vx. Elles reprennent des concepts variés appartenant aux domaines de la biologie et de la chimie et peuvent être mises en relation avec les difficultés identifiées *a priori* dans la littérature.

θ_1 *: la fermentation alcoolique se déroule indépendamment des levures*

θ_2 *: la fermentation alcoolique se déroule en aérobie*

θ_3 *: la réalisation optimale de la fermentation alcoolique chez les levures est indépendante de la température du milieu*

θ_4 *: le volume disponible d'un contenant est inférieur au volume versé*

θ_5 *: les gaz présents dans l'air ne se dissolvent pas dans une solution*

θ_6 *: la levure est une bactérie.*

θ_7 *: la vitesse de réaction chimique de la fermentation alcoolique est indépendante de la température du milieu*

θ_8 *: la température optimale de la réaction de fermentation alcoolique chez les levures est supérieur à 40°C*

θ_9 *: la température optimale de la réaction de fermentation alcoolique chez les levures est inférieur à 20°C*

Le tableau 1 présente la synthèse des résultats de la modélisation de 12 praxéologies personnelles *a priori* qui correspondent à une erreur portée sur la technique ou à une association de plusieurs erreurs.

Nous avons choisi de représenter une praxéologie personnelle (n°1), qui modélise l'absence de technique de l'élève pour laquelle il n'est pas possible de donner une interprétation au niveau technologique, en vue d'un diagnostic automatique de l'erreur qui s'appuie sur les traces de l'activité de l'élève.

Les 11 autres praxéologies personnelles modélisées *a priori* sont proposées en fonction des concepts en jeu et des types erreurs. C'est à dire que pour chaque concept à l'origine de difficultés, nous identifions les possibles erreurs relatives à la technique. Cela se traduit par des types de tâches de la technique manquants, et/ou sur des valeurs de variables erronées. Nous proposons ainsi des praxéologies personnelles qui modélisent une ou plusieurs erreurs. Nous obtenons donc des praxéologies personnelles *a priori* qui modélisent plusieurs erreurs (exemple de la praxéologie personnelle n°2), et qui correspondent à l'association de plusieurs praxéologies personnelles *a priori* qui modélisent une seule erreur (n°3 + n°6). Nous avons fait ce choix pour prendre en compte la finalité de notre travail qui est de réaliser un diagnostic automatique de l'erreur et de proposer une modélisation de rétroactions personnalisées.

N°	**Erreurs portée(s) sur la technique : T_I manquant(s)**	**Erreur(s) portée(s) sur une valeur de variable (Vx) d'un T_I : *valeur***	**Technologie(s) erronées relatives**	**Concept en jeu**
0	▯	absence d'une variable	pas d'interprétation au niveau des technologies erronées de l'élève	
1	T_0 ; T_1 ; T_2	▯		
2	T_1 ; T_2	▯	θ_2 θ_3	Conditions de réalisation du métabolisme fermentaire
3	T_1	▯	θ_2	Condition nécessaire : anaérobie
4	T_1	volume prélevé *: < 36mL*	θ_2 θ_5	
5	▯	volume prélevé : *< 36mL*	θ_5	Condition nécessaire : anaérobie stricte, diffusion des gaz
6	T_2	▯	θ_3	Condition optimale de réaction : température du milieu
7	▯	solution : *sans levures*	θ_1	
8	▯	Température : *différente de 25°C*	θ_8 ou θ_9	Vivant
9	▯	solution : *suspension de bactéries*	θ_6	Classification des microorganismes
10	▯	matériel : *bouilloire*	θ_7	Matériel de laboratoire
11	▯	matériel : *bouchon percé*	θ_2 θ_5	
12	T_0	▯	θ_1	Vivant

Tableau 1. Résultat de la modélisation de praxéologies personnelles *a priori*.

4.2. Modélisation des praxéologies personnelles dans les productions d’élèves et enrichissement des praxéologies personnelles *a priori.*

Le tableau 1 présente les résultats d’analyse des 100 protocoles d’élèves selon les praxéologies personnelles *a priori*. Nous avons donc analysé chaque protocole d’élève, c’est à dire qu’un protocole est modélisé par une ou plusieurs praxéologie *a priori* (n°1 à n°12).

Praxéologies personnelles *a priori*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif (/100)	**10**	**15**	**13**	**12**	**49**	**18**	**10**	**0**	**2**	**3**	**3**	**23**

Tableau 2. Résultat de la modélisation des praxéologies personnelles dans les protocoles des élèves.

Nous avons pu modéliser l’ensemble des protocoles des élèves selon les douze praxéologies personnelles identifiées *a priori*. Un premier résultat est qu’aucun protocole ne présente d’autres techniques erronées, qu’il faudrait modéliser par des praxéologies personnelles non proposées *a priori*. Notre modélisation est donc suffisante pour l’étude proposée.

Nous remarquons quatre praxéologies personnelles *a priori* qui sont minoritaires dans les productions des élèves : n°8, 9, 10, et 11. Elles sont soit absentes (n°8) soit présentes dans seulement deux ou trois protocoles (n°9, 10, et 11). A l’inverse les praxéologies personnelles *a priori* (dans l’ordre décroissant) n° 5, 12, 6, 2, 3, 4, et 7 sont identifiées dans au moins dix protocoles d’élèves. Les praxéologies majoritairement modélisées dans les protocoles des élèves sont en lien avec des concepts nouveaux et objectifs d’apprentissage en classe de terminale scientifique de spécialité comme le concept d’anaérobie. À l’inverse, les praxéologies personnelles minoritaires relèvent de concepts acquis dans les classes antérieurs comme le matériel pour chauffer une solution.
Nous identifions 158 praxéologies personnelles dans les 100 protocoles d’élèves. Nous avons donc plusieurs praxéologies personnelles modélisées *a priori* dans un même protocole. Nous avons relevé 14 nouvelles associations d’erreurs dans les protocoles des élèves que nous n’avons pas modélisées *a priori*. Trois seulement sont identifiées dans au

moins 10 protocoles : n°5/n°6, n°5/n°2 et n°3/n°12. L'analyse des technologies erronées relatives à ces associations d'erreurs ne permet pas de dégager une interprétation commune qui nécessiterait l'élaboration d'une nouvelle praxéologie personnelle *a priori* qui puisse les regrouper. Par conséquent, il est difficile de modéliser des technologies erronées spécifiques pour ces associations qui relèvent de concepts différents.

Nous validons ainsi la modélisation des 12 praxéologies personnelles *a priori* pour le type de tâche étudié.

Néanmoins, cela ouvre des pistes de réflexion pour un travail ultérieur concernant la validation à plus grande échelle de la méthode utilisée pour modéliser les praxéologies personnelles *a priori* dans l'ensemble de la situation, mais également étendre cette méthodologie à d'autre situations incluant une activité de conception expérimentale en sciences.

5. Conclusions

L'objectif de cette étude était de proposer une méthode de modélisation de praxéologies personnelles *a priori* dans une situation de conception expérimentale qui est une des étapes de la démarche d'investigation en sciences.

Contextualisée à une situation de terminale scientifique sur la mise en évidence de la fermentation alcoolique, nous avons modélisé pour un des types de tâches de la praxéologie de référence, 12 praxéologies personnelles *a priori* qui s'appuient sur de possibles erreurs portant sur la technique du type de tâche ou bien sur la valeur de variable de la tâche. Ces erreurs portent sur des concepts à l'origine de difficultés chez les élèves identifiées dans la littérature.

Nous n'avons pas, pour ce type de tâches, enrichi cette modélisation avec l'analyse de productions d'élèves.

Ce modèle nécessiterait d'être mis à l'épreuve pour l'ensemble de la situation proposée afin de l'élargir à d'autres situations.

Les apports de ce travail sont multiples :

- une modélisation praxéologique de référence dans une activité de conception expérimentale en biologie

- l'utilisation de l'extension T4TEL pour la formalisation des types de tâches afin de répondre aux exigences du domaine des EIAH
- la proposition d'une méthodologie pour l'élaboration et l'enrichissement de praxéologies personnelles *a priori* pour ce type d'activité, qui pourrait s'étendre à d'autres domaines

Ce travail de modélisation a pour objectif de préparer un diagnostic automatique des erreurs et de proposer des rétroactions personnalisées à l'élève. Il ouvre de nouvelles questions de recherche portées sur la possible transposition informatique de ce modèle afin de participer à l'évolution de la plateforme.

Références

Bonnat, C. (2017). *Etayage de l'activité de conception expérimentale par un EIAH pour apprendre la notion de métabolisme cellulaire en terminale scientifique* (Thèse de doctorat). Université Grenoble Alpes.

Bosch, M. & Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77–124.

Chaachoua, H. (2015). Un cadre de référence didactique basé sur l'approche praxéologique pour représenter les connaissances dans un EIAH. *Communication au 3° Colloque International Franco-Vietnamien en didactique des mathématiques*. Hué.

Chaachoua, H., Ferraton, G. & Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse.

Chaachoua, H. & Bessot A. (2017). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.

Croset, M-C. & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 36(2*).

Etkina, E., Karelina, A., & Ruibal-Villasenor, M. (2010). Design and reflection help students develop scientific abilities: Learning in introductory physics laboratories. *Journal of the Learning Sciences*, *19*, 54-98.

Girault, I., Chaachoua, H. (2013). How do students deal with the chemical knowledge during an experimental design in SCY-Lab? *Proceeding of CITAD 2013 - 4th International Conference of the Anthropological Theory of the Didactic, 21 – 26 avril 2013*. Toulouse.

Girault, I., d'Ham, C., Marzin, P. & Wajeman, C. (2017). LabBook : a web envionment for active science learning. *Proceeding of ESERA 2017 – International Conference of the European Science Education Research Association, August 21st – 25th 2017.* Dublin.

Marzin-Janvier, P. (2013). *Comment donner du sens aux activités expérimentales ?* (Mémoire d'habilitation à diriger des recherches). Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

Nguyen Q., Chaachoua H. & Comiti C. (2007). De l'usage de la TAD pour l'analyse des erreurs. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Garcia (Ed.), Sociedad, *Escuela y matematicas. Aportaciones de la teoria Antropologica de lo Didactico.* (621-640). Universidad de Jaen.

Séré, M-G. & Beney, M. (1997). Le fonctionnement intellectuel d'étudiants réalisant des expériences : observation de séances de travaux pratiques en premier cycle universitaire scientifique. *Didaskalia, 11,* 75–102.

La profesionalización docente en la modalidad online y la implementación de los REI, aciertos y desafíos

Avenilde ROMO
CICATA-IPN

Berta BARQUERO
Universidad de Barcelona, España

Marianna BOSCH
Instituto Químico Sarriá, España

Abstract. Teaching professionalization in online mode has become a training opportunity for in-service mathematics teachers. Since 2013 we have been designing and delivering online courses based on the REI-FP methodology (Sierra 2006 and Ruíz-Olarría 2015). This communication analyzes elements of latest edition with the aim of showing "successes" and challenges, recognizing the particularities of online mode and multimedia devices.

Resumen. La profesionalización docente en la modalidad online se ha venido conformando como una oportunidad de formación para los profesores de matemáticas en servicio. Desde el año 2013 hasta la fecha hemos venido diseñando e impartiendo cursos basados en la metodología REI-FP (Sierra 2006 y Ruíz-Olarría 2015) en la modalidad online. En esta comunicación se analizan elementos de la última edición con el objetivo de mostrar "aciertos" y desafíos, reconociendo las particularidades de la modalidad online y de los dispositivos multimedia.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

1. Antecedentes

Las políticas educativas de los países latinoamericanos y particularmente de México han impulsado la evaluación docente como un elemento clave para mejorar la calidad de la educación. En México, los profesores de matemáticas de nivel básico (estudiantes de 6-15 años) y de bachillerato (estudiantes de 15 a 18 años) son evaluados para ingresar y permanecer como docentes en servicio, enfrentando nuevas exigencias: integrar la tecnología informática, dar sentido a la enseñanza de las matemáticas de acuerdo a la realidad social de los estudiantes, formar ciudadanos capaces de comprender, cuestionar y mejorar su entorno. En este contexto, el desarrollo profesional se vuelve una demanda social, que de acuerdo con Michèle Artigue (2016), debe mostrar la evolución de la matemática y acercar la investigación didáctica a la práctica docente:

> El desarrollo profesional de los profesores debe estar sostenido por la organización de una formación continua específica, permitiendo a estos últimos estar en contacto con la evolución de su disciplina, de apoyarse para su trabajo en los resultados de la investigación didáctica, de sacar provecho de la evolución tecnológica, de adaptar su enseñanza tanto en sus contenidos como en sus prácticas a la evolución de las prácticas y las demandas sociales. También, debe permitirles construir o apropiarse de herramientas conceptuales que les permitan reflexionar sus prácticas de enseñanza y sus efectos. (Artigue, 2016, p. 36, traducción propia)

Por su parte, Sowder (2007) reconoce seis objetivos que deberían ser atendidos en el desarrollo profesional de los profesores: 1) una visión compartida de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 2) un entendimiento de las matemáticas para el nivel enseñado, 3) un entendimiento de cómo los estudiantes aprenden matemáticas, 4) un profundo conocimiento pedagógico, 5) un entendimiento del rol de la equidad en la escuela de matemáticas y 6) un sentido de sí mismo como profesor de matemáticas.

La modalidad en línea y a distancia, parece ser óptima para enfrentar estos grandes retos del desarrollo profesional, en particular porque permite al profesorado combinar un proceso de profesionalización docente con la práctica docente y, por lo tanto, experimentar de forma paralela los contenidos de la formación con la realidad del aula. Los entornos virtuales potencian además la dimensión colectiva del desarrollo profesional docente, llegando a generar verdaderas *comunidades de práctica* en el sentido de Étienne Wenger (1998) que pueden perdurar más allá del propio proceso de formación. Asumiendo el enfoque socio-cultural del aprendizaje, el informe de Herbert Wideman (2010) recoge los principales resultados expuestos en la literatura sobre el uso de comunidades de aprendizaje online para el desarrollo profesional docente y la importancia para el aprendizaje profesional de los docentes de involucrarse en prácticas reflexivas, compartiendo sus experiencias con otros colegas igualmente involucrados. Las relaciones entre los educadores y profesores se fundamentan en lo que saben y conocen sobre la Educación Matemática. Es decir, en el compromiso que "se basa en lo que hacemos y conocemos, así como en [...] las contribuciones y el conocimiento de otros" (É. Wenger, 2001, p. 103). Shelleyann Scott (2010) por su parte, aporta evidencia empírica sobre la efectividad de los programas de formación del profesorado, indicando seis principios básicos:

> 1. Considerar una orientación de resolución de problemas;
> 2. Incorporar oportunidades para que los profesores trabajen juntos y con expertos;
> 3. Facilitar la exposición de las innovaciones en el conocimiento, en la práctica docente y en las tecnologías utilizadas;
> 4. Permitir a los profesores probar nuevas estrategias y habilidades de enseñanza;
> 5. Promover la creación y el intercambio de recursos;
> 6. Permitir reflexiones y discusiones continuas y útiles. (S. Scott, 2010, p. 7, traducción propia).

El cómo respetar estos principios en los programas de formación o profesionalización online y a distancia requiere un diseño específico que tenga en cuenta, particularmente, la disciplina objeto de enseñanza.

Estas investigaciones nos muestran las potencialidades de la modalidad online y a distancia de la formación continua del profesorado, al tiempo que nos cuestionan acerca de los retos que implica una formación ofrecida en un marco institucional determinado, como es el de una maestría para profesores de matemáticas en el Programa de Matemática Educativa (Prome).

2. Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado

En investigaciones recientes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se plantea la necesidad de basar, el desarrollo profesional del profesorado de secundaria, en cuestiones problemáticas que surgen durante el ejercicio de la profesión (Cirade 2006). Con ello se consigue que el proceso de formación ponga a disposición de los profesores, herramientas, fruto de la investigación educativa, para analizar y resolver problemas, más que como un conjunto de técnicas y saberes más o menos dogmáticos (Chevallard 2013). Al mismo tiempo, los conocimientos didácticos pueden utilizarse para cuestionar tanto los contenidos curriculares como las formas de enseñanza, permitiendo así a los profesores en formación formular nuevas cuestiones problemáticas que entorpecen implícitamente el quehacer docente, actuando de forma transparente para todos los actores del proceso educativo.

Estas asunciones se materializan en una metodología designada como “recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado” (REI-FP) experimentada inicialmente por Tomás Sierra (2006) en el caso de la formación inicial de maestros y desarrollada por Alicia Ruiz-Olarría (2015) para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En ella, el proceso de formación parte de una cuestión problemática para la profesión docente (módulo 0) que se aborda en los siguientes cuatro módulos generales: 1) Vivir, como estudiante, una propuesta de actividad matemática, que es funcional y permite dar sentido al conocimiento matemático construido; 2) Analizar y Adaptar dicha propuesta para su implementación en el aula; 3) Experimentar la propuesta adaptada con alumnos de secundaria; 4) Identificar las condiciones y restricciones institucionales que la experimentación ha puesto en evidencia y refinar o rediseñar la actividad.

Esta metodología de formación ha sido fuertemente adaptada a la modalidad en línea y a distancia, considerando para ello las herramientas multimedia foros, vídeos, plataforma Moodle, así como las condiciones del trabajo asíncrono y el hecho de que los participantes son profesores en servicio de educación secundaria o universitaria, principalmente de México y de otros países de América Latina (Argentina, Chile, Colombia, Paraguay y Uruguay). Particularmente la condición de profesores en servicio permite que puedan realizar experimentaciones en sus clases o con pequeños grupos de estudiantes voluntarios.

La investigación que aquí presentamos tiene un triple propósito:

- Estudiar la adaptación de la metodología de los REI-FP propuesta por A. Ruiz-Olarría (2015) al caso de la formación online y a distancia.
- Analizar los efectos de la formación impartida en la manera de conseguir que los profesores sean capaces de analizar, adaptar, validar y desarrollar una propuesta didáctica sobre la enseñanza de la modelización matemática.
- Observar hasta qué punto los profesores son capaces, durante el curso y gracias a las herramientas propuestas en él, de identificar las principales condiciones y restricciones institucionales que dificultan la integración de la modelización matemática como actividad normalizada en el aula.

La metodología de investigación que hemos seguido se basa en un análisis clínico (Pedinielly y Fernandez, 2015) y exploratorio de las producciones de un grupo de profesores durante la segunda edición del curso, así como de los resultados obtenidos de las encuestas de evaluación.

3. Un curso de modelización matemática para la profesionalización de profesores de matemáticas en servicio

El Prome del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México, ofrece desde el año 2000 una maestría y un doctorado, en línea y a distancia, para profesores de matemáticas en servicio que otorga una gran importancia a la integración explícita de nuevos conocimientos en didáctica de las matemáticas a la práctica docente efectiva. La maestría se organiza en cuatro semestres en los que se ofrecen 12 cursos, que son impartidos en los primeros tres semestres, con el objetivo de mostrar una perspectiva general de la DM, de sus herramientas teóricas y metodológicas, así como la forma en que éstas pueden utilizarse para gestionar, regular y evolucionar la práctica docente. El cuarto semestre está dedicado íntegramente al desarrollo de un pequeño trabajo de investigación, que debe surgir en relación a algún problema de la propia práctica docente.

En este trabajo presentamos el diseño, implementación y análisis de un curso titulado “Naturaleza del pensamiento matemático” centrado en la enseñanza de la modelización matemática y de las dificultades o limitaciones de índole institucional (contexto escolar, condiciones curriculares, etc.) que emergen, o podrían emerger, en su inclusión en el aula. El curso, que corresponde al primer semestre, ha sido diseñado e impartido durante los cuatro últimos cursos académicos (2013/14, 2014/15, 2016/17 y 2017/2018) por un equipo de cinco formadores de México y de Barcelona, todos ellos investigadores en didáctica de las matemáticas y que incluye a los autores de este artículo.

Las cuestiones de la profesión que nos planteamos en el diseño e implementación del curso son las siguientes: ¿Cómo analizar, adaptar, desarrollar e integrar a nuestra práctica docente un proceso didáctico relacionado con la modelización matemática? ¿Cómo difundir entre pares e institucionalizar a largo plazo un proceso didáctico basado en la modelización y que se considera pertinente para determinado nivel de formación escolar? ¿Qué dificultades deben superarse? ¿Qué herramientas didácticas lo posibilitan? ¿Qué nuevas cuestiones surgen y en qué instancias pueden abordarse?

3.1. Características del curso online

El curso se desarrolló en la plataforma Moodle, en la que aparece la bienvenida en un vídeo hecho por los 5 formadores (Figura 1), un documento en el que se detallan los objetivos, las cuatro actividades a desarrollar, el calendario, la forma de evaluación y un foro general llamado "Cafetería" que está abierto durante todo el curso. La duración del curso es de cuatro semanas de trabajo intensivo. Las intervenciones de los formadores se hacen mediante vídeos (retroalimentaciones generales), foros (retroalimentaciones o moderación de debate en pequeño grupo), mail (individual o grupal) y documentos de soporte (artículos, material didáctico, pautas, etc.) para el desarrollo de las actividades.

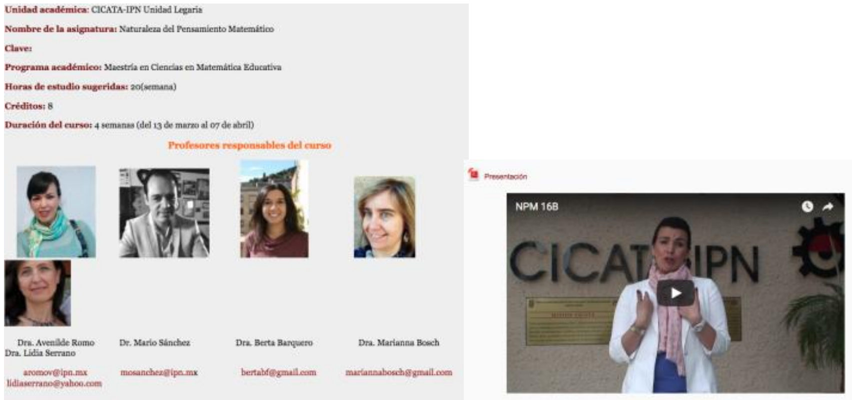


Figura 1. Interfaz del curso en Moodle.

A continuación detallamos las cuatro actividades del curso, la forma en que se presentaron, las herramientas asociadas y el análisis de las producciones de los profesores que participaron en la cuarta edición del curso en 2016/17.

Actividad 1. Evolución del número de usuarios de la red social Facebook

En esta primera actividad se pide realizar por equipos una previsión a corto y largo plazo de la evolución del número de usuarios de Facebook. Cada equipo, compuesto por cuatro profesores de matemáticas en servicio, deberá estudiar dos de las once variables (usuarios de Facebook totales, usuarios de Facebook en Europa, etc.). Se pide a los profesores que asuman un rol de matemático aprendiz o de estudiante universitario. La consigna se presenta de la siguiente manera:

> La empresa PUBLICITY solicita a nuestro grupo realizar un estudio de la evolución del número de usuarios de FACEBOOK. Los responsables del

estudio, Avenilde, Berta, Lidia, Marianna y Mario solicitan un informe parcial el 15 de marzo y un informe final dirigido a PUBLICITY el día 20 de marzo de 2017, junto con una descripción detallada de la actividad realizada (especificando el proceso seguido). Se les ofrece una tabla de datos como la que aparece en la figura 2.

Facebook MAUs (Monthly Active Users) in millions

	TOTAL	US & Canada	Europe	Asia	Rest of World
Q2-2009	242	81	85	32	44
Q3-2009	305	99	101	48	57
Q4-2009	360	112	117	62	69
Q1-2010	431	130	138	81	83
Q2-2010	482	137	151	96	98
Q3-2010	550	144	167	113	126
Q4-2010	608	154	183	138	133
Q1-2011	680	163	201	156	161
Q2-2011	739	169	212	174	183
Q3-2011	800	176	221	196	207
Q4-2011	845	179	229	212	225
Q1-2012	901	183	239	234	245
Q2-2012	955	186	246	255	268
Q3-2012	1007	189	253	277	288
Q4-2012	1056	193	261	298	304
Q1-2013	1110	195	269	319	327
Q2-2013	1155	198	272	339	346
Q3-2013	1189	199	276	351	362
Q4-2013	1228	201	282	368	376
Q1-2014	1276	202	289	390	395
Q2-2014	1317	204	292	410	411
Q3-2014	1350	206	296	426	423
Q4-2014	1393	208	301	449	436
Q1-2015	1441	210	307	471	453
Q2-2015	1490	213	311	496	471
Q3-2015	1545	217	315	522	492
Q4-2015	1591	219	323	540	509
Q1-2016	1654	222	333	566	533
Q2-2016	1712	226	338	592	556

Figura 2. Tabla de datos del número de usuarios, por regiones, de Facebook.

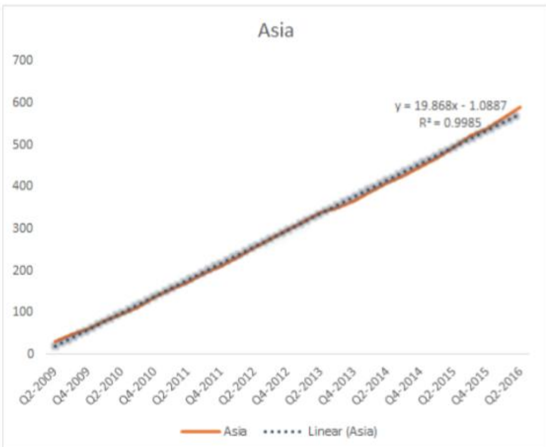
Esta actividad se realiza en tres fases (ver figura 3), en la primera se presenta el documento “Evolución del número de usuarios de la red social Facebook” con los datos sobre las variables a estudiar y se habilita un foro para que cada equipo de profesores inscritos en el curso pueda realizar el trabajo matemático solicitado: ajuste de datos, búsqueda de modelos matemáticos, criterios de selección del mejor modelo, formas de contraste y validación, etc. Esta actividad matemática debe plasmarse en un “informe intermedio” conteniendo una primera previsión, su justificación y nuevas cuestiones. En la fase 2 se habilita un foro por cada dos equipos, para que contrasten sus informes intermedios y expliciten una reflexión del trabajo realizado y de su continuación. En la fase 3, se debe presentar un informe final del estudio de las variables asignadas dirigido a la empresa PUBICITY, así como una descripción del proceso vivido para la Consultora. En este mismo informe se pide incluir nuevas cuestiones que resultan del estudio elaborado y que podrían ser útiles para continuarlo.

Actividad 1

Fase 1 **Fase 2** **Fase 3**

Figura 3. Fases de la actividad 1 en la plataforma del curso.

Para ilustrar la actividad 1, hemos elegido analizar el informe final producido por el equipo A, formado por dos profesores mexicanos y una uruguaya. Este informe, que se centra en el estudio de los usuarios de la zona geográfica de Asia (ver figura 4), se basa tanto en el informe intermedio como en la discusión generada en el foro de diálogo con el equipo B.



Se observa que el coeficiente de determinación R^2 es de 0.9985, lo que sugiere un buen ajuste del modelo. Pues este dato nos indica que un 99.85% del comportamiento de la serie queda explicada por la recta de regresión.[1]

Si bien la estimación, mediante este método, queda por debajo de los datos reales, la

Figura 4. Gráfica del modelo lineal propuesto por el equipo A.

Este equipo presentó varios modelos como polinómicos y exponenciales y determinó que el modelo lineal era el más adecuado. Un elemento interesante de la actividad de modelización de este equipo es que coloca en el anexo del informe final un modelo por diferencias, que posteriormente dejan fuera, por considerar que este modelo no sería alcanzable por los estudiantes. Esto ilustra la complejidad de que los profesores asuman el rol de "aprendiz matemático o matemático" para dar respuesta a una cuestión problemática.

Actividad 2. Producción de una guía didáctica

La actividad 2 del curso consiste en el desarrollo de una guía didáctica (basada en un análisis didáctico espontáneo) y se desarrolla en tres fases: 1) Hacer una guía didáctica de manera individual para que un colega sea capaz de implementar con un grupo de estudiantes la actividad de "Evolución del número de usuarios de la red social Facebook"; 2) Analizar y discutir en un foro las guías didácticas producidas individualmente por cada miembro del equipo, para ello se propone considerar diferentes elementos: organización de la clase (gran grupo, grupos pequeños), actividad del profesor, actividad de los estudiantes, el tipo de problema propuesto (abierto, de investigación, tarea matemática tradicional, de respuesta inmediata), conocimientos con los que cuentan los estudiantes, conocimientos que van a construirse, objetivos de la actividad, tema del programa que se aborda, discurso del profesor, etc. y 3) Generar una guía didáctica común. El objetivo de producir la guía didáctica es situar a los profesores en un nivel de *análisis didáctico* de la actividad "Evolución del número de usuarios de la red social Facebook", para estudiar su viabilidad en las aulas de secundaria, sus potencialidades y límites, así como la manera de adaptarla a las restricciones propias de la educación secundaria (conocimientos previos, tiempos y organización de la clase).

El equipo A en su guía didáctica final por equipos, de 25 cuartillas, muestra dos actividades una para nivel bachillerato y otra para nivel universitario, en las cuales presenta tareas adaptadas que guían el trabajo de modelización matemática de los estudiantes. La estructura del "REI adaptado" para estudiantes que cursan los estudios universitarios de economía es la siguiente:

Fase I: Diseño de un plan de trabajo y asignación de actividades. Repaso del método de optimización y del proceso para encontrar la ecuación de regresión.

Fase II: Elaboración de gráficos y análisis

Fase III: Lectura del método de la Universidad de Princeton y comparación de metodologías.

Fase IV: Elaboración de conclusiones y presentación.

Es posible notar cómo los profesores participantes en el curso y en este equipo han «cerrado» el REI y en la primera fase se señala «un repaso» del método de optimización. Los profesores pretenden así que sus estudiantes estén «preparados» para predecir la evolución del número de usuarios de Facebook (en la fase III se dice que darán una lectura del método utilizado por la Universidad de Princeton para calcular esta evolución, documento que también se les compartió en este curso). En la segunda tarea propuesta en la fase I en la guía de los profesores (ver figura 5) se pide que a partir de diferentes gráficas de puntos se determine la función que mejor ajuste los datos, sin importar qué representa cada conjunto de datos, ni por qué es necesario realizar el ajuste. ¿Por qué encontrar una función que "ajuste" de la mejor manera estos datos?

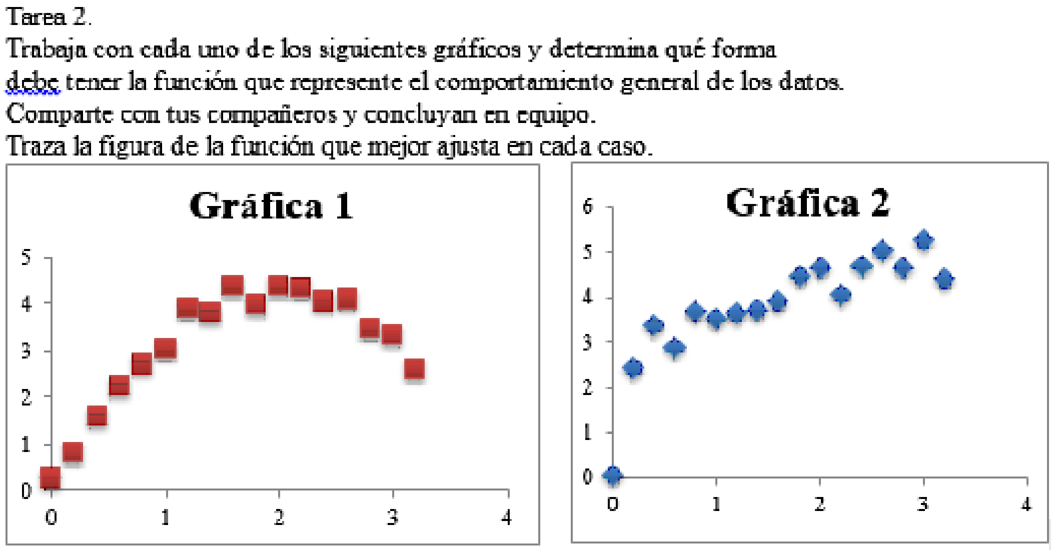


Figura 5. Tareas propuestas para el nivel universitario.

Actividad 3. Implementación de la actividad "Evolución del número de usuarios de la red social Facebook" con estudiantes

En esta actividad cada profesor participante en el curso implementa con estudiantes, su clase o un grupo de voluntarios, la actividad de "Evolución del número de usuarios de la red social Facebook" propuesta en la guía didáctica de equipo y genera un informe de su experimentación. Esta actividad resulta muy interesante debido a que el equipo de profesores ha producido conjuntamente la guía didáctica, pero la implementación es hecha individualmente y en condiciones distintas. Esto permite confrontar "lo esperado" con tres realidades escolares diferentes. La mayoría de los profesores participantes en el curso se dan cuenta en la implementación de que el "cierre" del REI no era tan necesario y que los estudiantes son capaces de investigar, de ser autónomos y que pueden interesarse en el desarrollo de una actividad de modelización. Los profesores participantes en el curso evidencian "resistencia" a implementar una actividad de modelización matemática, un REI, en su aula.

Actividad 4. Análisis conjunto y revisión final de la guía didáctica

Esta actividad tiene por objetivo generar un análisis global de la actividad "Evolución del número de usuarios de la red social Facebook". Para ello, primero se comparten en un foro por equipo los informes de las experimentaciones individuales y se analizan. Posteriormente, se revisa y modifica la guía didáctica de equipo producida en la actividad 2, haciendo explícitos un análisis matemático y didáctico de la actividad. Para realizar esta nueva guía se entrega un documento teórico, producido por los formadores, en el que se presentan herramientas de análisis didáctico para la descripción del trabajo matemático desarrollado, para gestionar y regular las actividades abiertas de modelización e investigación en comparación con las más tradicionales de transmisión de conocimiento: profesor guía del estudio y estudiante con mayor responsabilidad y autonomía, etc. En las interacciones con los formadores (vídeos, retroalimentaciones, y foros), estos ponen especial énfasis en la identificación de restricciones institucionales (proponer el estudio de contenidos y no de cuestiones, apegarse al plan de estudio y al modelo educativo vigente, no experimentar propuestas novedosas, asegurar buenos resultados en evaluaciones departamentales) que los profesores participantes en el curso no habían previsto y que surgieron inevitablemente durante la experimentación.

4. Conclusiones

La investigación que hemos presentado tiene un carácter exploratorio evidente y, en coherencia con la metodología clínica adoptada, tendrá continuidad en las nuevas ediciones del curso programadas para los próximos años. Sin embargo, los resultados obtenidos hasta la fecha nos permiten destacar algunas conclusiones provisionales en relación con los tres objetivos de nuestra investigación citados anteriormente.

La posibilidad de adaptar la metodología de los REI-FP propuesta por A, Ruiz-Olarría (2015) al caso de la formación online y a distancia ha quedado probada en el marco institucional de los cursos del CICATA.

Algunas de las restricciones institucionales que dificultan la integración de la modelización matemática como actividad normalizada en el aula, son puestas de manifiesto en el curso y consideramos que esto constituye una herramienta valiosa para permitir a los profesores avanzar en este ámbito. En efecto, la estrategia propuesta en la actividad 2 del curso de diseño espontáneo de una tarea docente sobre modelización matemática saca a la luz las principales restricciones institucionales en las que evolucionan los profesores en una instancia de profesionalización docente con normalidad: “cierre” de la actividad de modelización a una secuencia de preguntas cortas; imposición de ciertos modelos matemáticos previamente identificados por el profesor; un uso muy dirigido de los TIC; predominio del contenido matemático curricular frente al problema por resolver.

Finalmente, volviendo al problema de las posibilidades y límites de la formación online de los profesores de matemáticas en servicio y teniendo en cuenta los principios que plantea S. Scott (2010), podemos afirmar que el curso propuesto se inscribe en la dirección propuesta: toma como punto de partida un problema abierto, ¿cómo diseñar o adaptar un material didáctico que posibilite una actividad de modelización matemática? –en este caso se propuso determinar la evolución del número de usuarios de la red social Facebook- de la profesión docente; se basa en un trabajo colaborativo guiado por un grupo de formadores expertos en didáctica de las matemáticas; permite superar la división “teoría-práctica” mencionada por esta autora, poniendo al alcance de los profesores en un proceso de profesionalización docente herramientas innovadoras; facilita la experimentación de nuevas estrategias docentes que incorporan el uso de las TIC, promoviendo así la adaptación crítica de recursos didácticos, así como el compartir, analizar y evaluar entre pares las actividades implementadas en el aula, ayudados por la activación de las herramientas teóricas aprendidas en el curso, como es la estructura de los REI, su dimensión matemática y didáctica.

Referencias

Artigue, M. (2016). Soutenir le développement professionnel des enseignants : un défi majeur à relever. *Actas de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1514/739

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 161-182.

Cirade, G. (2006). Devenir professeur de mathématiques. Entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM. (Tesis de doctorado). Université de Provence, Francia.

Castañeda, L. y Adell, J. (2011). El desarrollo profesional de los docentes en entornos personales de aprendizaje (PLE). En Rogi Vila, R. y Laneve, C. (Eds.) *La práctica educativa en la Sociedad de la Información: Innovación a través de la investigación* (pp.83-95). Alcoy: Marfil.

Pedinielly, J.L. y Fernandez, L. (2015). *L'observation clinique et l'étude de cas* (3e). París: Armand Colin.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Scott, S. (2010). The theory and practice divide in relation to teacher professional development. En J. O. Lindberg & D. O. Angers (eds.), *Online learning communities and teacher professional development: Methods for improved education delivery* (pp. 20-40). IGI Global.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester, Jr. (ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Wenger, E. (1998/2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad (G. Sánchez Barberán, trad.). Barcelona: Paidós. [Reimpreso de Communities of practice. Learning, meaning, and identity, 1998, Cambridge, Reino Unido: The Press Syndicate of the University of Cambridge]

Wideman, H. (2010). *Online teacher learning communities: A literature review*. Institute for Research on Learning Technologies, York University.

La dialectique de l'individu et du collectif dans un travail de groupe : une proposition d'analyse didactique

Farida Méjani

Ecole doctorale 184, Université d'Aix-Marseille, France

Yves Matheron

Institut de Mathématiques de Marseille et IFE-ENS de Lyon, France

Abstract. This article continues the didactic study of a pedagogical device: the work of a group of students in the context of the implementation of a finalized mathematical SRC. Through a few excerpts, it aims to show how the dialectic of the individual and the collective makes the topogenesis and the mesogenesis evolve within the group.

Résumé. Cet article poursuit l'étude didactique d'un dispositif pédagogique : le travail de groupe d'élèves dans le cadre de la mise en œuvre d'un PER mathématique finalisé. Il s'attache, à travers quelques extraits, à montrer comment la dialectique de l'individu et du collectif fait évoluer la topogenèse et la mésogenèse au sein du groupe.

Resumen. Este artículo continua el estudio didáctico de un dispositivo pedagógico: el trabajo de un grupo de estudiantes en el contexto de la implementación de un REI matemático finalizado. El objetivo es mostrar, a través de algunos extractos, cómo la dialéctica de lo individual y del colectivo hace que la topogénesis y la mesogénesis evolucionen dentro del grupo.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. L'aspect didactique d'un dispositif pédagogique : le travail de groupe d'élèves

Dans son cours donné lors de la XVIII[e] Ecole d'été de didactique des mathématiques, et au sein du thème consacré à la prise en compte du collectif en didactique, Marianna Bosch (2016) situait, depuis la théorie anthropologique du didactique, l'enjeu d'une étude du travail de groupe ; étude longtemps réservée à ce qu'ont pu en écrire ceux qu'on qualifie de pédagogues. Elle indiquait : « nous faisons l'hypothèse que l'analyse didactique des collectifs d'élèves et enseignants requiert que l'on dépasse le niveau pédagogique afin d'aborder la dimension didactique (épistémologique) des phénomènes observés. »

À quelque temps de distance, cette citation fait écho à ce qu'écrivait Philippe Meirieu (2011) dans un texte intitulé *Pourquoi le travail en groupe des élèves ?* où il assigne à ce dispositif pédagogique particulier quelques objectifs qu'il désigne des termes de finalisation, socialisation, monitorat, confrontation ; termes derrière lesquels tout enseignant pourra reconnaître certains des buts éducatifs propres au métier qu'il exerce et qu'il partage sans doute. Néanmoins, concernant la finalisation, terme que nous substituerons par celui de finalité, il précise qu'au sein du travail de groupe, « l'objectif est de faire accéder les élèves à un "besoin de savoir" plus qu'à un savoir et c'est sur cet objectif que ce type de travail d'équipe doit être évalué. »

Si l'on considère qu'une des finalités attachées à l'école est de faire accéder les élèves, certes à un besoin en savoir, mais aussi à un savoir, et aux questions auxquelles il répond, autrement dit à des organisations praxéologiques motivées par des questions, l'affirmation de P. Meirieu ne peut qu'interroger.

Dans les lignes qui suivent, nous analysons, dans deux classes de deux professeurs différents, la construction d'un milieu pour l'étude d'une question, au sein du schéma herbartien, par deux groupes de quatre élèves. Il s'agit de faire construire une organisation mathématique autour du type de tâches « résoudre une équation du 1[er] degré à une inconnue » en classe de 4[e] (élèves de 13 à 14 ans).

Les épisodes auxquels nous nous attachons relèvent essentiellement d'un moment exploratoire et d'ébauche d'une technique, même si d'autres moments didactiques peuvent apparaître de manière plus labile. Ces groupes ont été constitués *a priori*, à l'issue d'une évaluation portant sur les objets idoines nécessités par la recherche de réponse à l'une des questions problématiques qui engendrent l'organisation mathématique visée.

Au sein des groupes, les niveaux des élèves sont volontairement hétérogènes, qualifiés de faibles, moyens et forts. Dans chaque classe, une caméra fixe est centrée sur un seul groupe tandis qu'une caméra mobile filme le travail des autres. Dans cet article, nos analyses reposent uniquement sur les films obtenus par la caméra fixe sur deux groupes de quatre élèves dans deux classes avec des enseignants différents, notés P et P'. Nous étudions comment la dialectique de l'individu et du collectif (Chevallard, 2009a) y est mise en œuvre à travers son influence sur la construction du milieu au sein des groupes et sur les positions occupées par les élèves en fonction de l'équipement praxéologique qu'ils donnent à voir. Cela afin de comprendre, au-delà de leurs variations, comment les interactions entre les élèves agissent dans le processus d'étude et de recherche et sur le milieu qui l'enclenche et le nourrit.

2. Description de la séance didactique observée

L'épisode support de l'analyse s'insère dans un parcours d'étude et de recherche sur l'algèbre élémentaire au Collège (élèves de 11 à 15 ans) ; domaine mathématique considéré et enseigné en tant que science des calculs sur des programmes de calcul modélisés. Nous avons repris pour cela, en la modifiant, l'une des idées de propositions issue d'un document d'accompagnement du programme édité par le Ministère de l'Éducation Nationale en France[1]. La question mise à l'étude est la suivante :

> Arthur et Bérénice jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Arthur lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bérénice multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Arthur et Bérénice ont-ils pu choisir ?

[1] Il s'agit du document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral*, daté du 6 janvier 2006

Il s'agit d'une première rencontre avec l'étude d'équations du 1er degré à une inconnue de la forme $ax + b = cx + d$. Dans la classe de niveau précédent, les élèves ont rencontré des programmes de calcul écrits en français qu'ils ont traduits sous forme de polynômes du 1er degré, ainsi que des équations du type $a + x = b$ et $ax = b$. La question, pour laquelle ils auront à construire une réponse, les place de nouveau au sein de programmes de calcul écrits en français mais qu'il n'est pas nécessaire de traduire sous forme polynômiale dans un premier temps. Trois spécimens du même type de tâches seront proposés au cours de la séquence afin d'aboutir à la construction de l'organisation mathématique visée.

La première tâche aboutit à la résolution de l'équation $7(x + 3) = 2x + 6$ dont la solution est -3. La technique prévue *a priori*, et effectivement mise en œuvre par les élèves, consiste à tester différentes valeurs. La recherche s'appuie, pour certains élèves, sur le fait qu'ils remarquent que « l'écart » entre $7(x + 3)$ et $2x + 6$ varie : diminuant lorsqu'on approche la solution, augmentant lorsqu'on s'en éloigne, variation qui peut être vue comme élément technologique pour cette ébauche technique. Les élèves s'engagent dans une recherche par tâtonnement, en testant des valeurs : tout d'abord des entiers naturels puis, devant leur échec, des entiers négatifs. Ils parviennent ainsi à trouver la réponse cherchée.

La deuxième tâche, dont l'énoncé est calqué sur le précédent, a pour infrastructure la résolution de l'équation $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 + 8x$ qui possède une infinité de solutions. Elle a pour but d'attirer l'attention des élèves sur le problème de l'unicité de la solution, après que les élèves ont trouvé *la* solution de la première équation. Les questions de continuité et de monotonie des fonctions affines du premier problème ont été, à ce niveau, rangées dans la catégorie des boîtes noires volontairement non questionnées mais implicitement utilisées. À l'issue de ces deux tâches, le milieu s'est donc enrichi d'une technique strictement opératoire, qui n'est pas algébrisée.

La troisième tâche confronte les élèves à sa faible portée et, par conséquent, à la nécessité de la dépasser, ainsi qu'à la recherche de la certitude de disposer de *toutes* les solutions de l'équation. Elle aboutit à la résolution de l'équation $11x + 5 = 4x + 9$, dont la solution est $\frac{4}{7}$. La technique par test de valeurs n'aboutit, au mieux et en se servant d'un tableur, qu'à l'obtention par dichotomie d'un encadrement de plus en plus précis de la valeur recherchée. Son dépassement conduit à rencontrer la nécessité de la construction d'une technique de portée générale, algébrique cette fois, appuyée sur une dimension technologique explicitée : $(a = b) \Leftrightarrow (a - b = 0)$.

Par la suite, nous nous concentrons sur le moment exploratoire et d'ébauche d'une technique pour la première tâche.

3. Analyse didactique dans un travail de groupe d'élèves

3.1. Problème de sous-détermination

Yves Chevallard indique que :

> Si un PER est impulsé par la volonté d'étudier une question déterminée, cette étude n'est pas elle-même entièrement déterminée – elle est toujours en quelque façon sous-déterminée. Comme il en va en tout groupe humain, quelle que soit au reste son activité, elle suppose des décisions négociées au sein de la classe, décisions qui doivent éviter tant l'opportunisme « pédagogique », péché mignon de beaucoup de professeurs, que le souci déterministe qui hante encore certains travaux d'ingénierie didactique. (2007, p. 746)

En effet, et bien que nous ayons envisagé *a priori* diverses voies qui puissent être empruntées par les élèves, connaître celles qui seront effectivement explorées au sein des groupes reste en partie sous-déterminé. Cela relève certes du contingent propre à la négociation – ou de son absence – au sein des groupes, mais encore des équipements praxéologiques disponibles ou non, des éléments constitutifs de ces équipements qui s'exprimeront ou pas, ou encore de l'aléatoire de ce que l'un d'entre nous a désigné du terme « d'expression publique, ostensive, de mémoires pratiques » (Matheron, 2009). Autrement dit d'une certaine indétermination propre aux activités humaines, sans doute renforcée lorsque celles-ci ne sont pas encore stabilisées au sein d'une institution donnée, comme c'est le cas dans un moment d'ébauche d'une technique pour une tâche problématique.

Tenant compte de cet aspect propre aux degrés d'indétermination, notre étude cherche à analyser la manière générique dont se met en place, au sein de la dynamique de construction du milieu didactique dans un moment exploratoire et d'ébauche d'une technique, une dialectique de l'individu et du collectif. Il est certes naïf de songer que le simple fait de placer quatre élèves autour d'une table suffit pour que s'enclenche l'étude d'une question. Cependant, nous pensons nécessaire de rechercher les traces possibles d'une dialectique de l'individu et du collectif, à partir des interactions des élèves engagés pour la première fois dans un paradigme scolaire qui rompt avec ceux de la visite des œuvres et de l'ostension déguisée.

3.2. Le choix des épisodes observés

Dans chacun des deux groupes observés en classe de 4^{e} (élèves de 13 à 14 ans), la majorité des élèves se lancent tout d'abord dans des calculs avec des nombres entiers naturels. Cependant, très vite et selon les élèves, les calculs vont s'affiner en fonction des résultats obtenus au sein d'une dialectique média / milieu. Certains persistent à tester des valeurs de manière aléatoire quand d'autres se sont rendu compte que les variations entre les deux programmes de calcul permettaient de n'en tester que certaines, selon « l'écart » entre les résultats. L'émergence de stratégies de calcul va dépendre fortement de l'équipement praxéologique de chacun des élèves, équipement dont nous faisons l'hypothèse qu'il peut être observé en analysant les positions que les élèves prennent au sein du groupe.

Nous avons choisi de ne retenir que des phases de travail pendant lesquelles les élèves interagissent entre eux, sans intervention de l'enseignant. Durant de nombreuses périodes, les élèves restent silencieux. Ils réfléchissent – ou du moins en prennent la posture –, écrivent ou tapent sur leur calculatrice sans aucun échange verbal. Ces moments ont été ignorés car l'analyse en serait délicate, les données ayant été obtenues à l'aide d'une caméra fixe. Une première remarque s'impose cependant : nous n'avons jamais observé de phase durant laquelle les quatre élèves du groupe échangent ensemble, les dialogues ne concernent souvent que deux, rarement trois élèves, les autres ne s'en préoccupant pas. La dialectique de l'individu et du collectif est engagée de manière épisodique et la taille du collectif varie.

Pour chacune des classes, nous présentons dans cet article quelques épisodes que avons transcrits, épisodes qui éclairent, selon nous, la dynamique d'étude dans laquelle le groupe est engagé. Ils montrent en effet comment se structure le milieu – les uns l'enrichissant de nouvelles questions, d'autres y introduisant des œuvres ou des réponses partielles – et comment évolue la topogenèse interne au groupe.

3.3. Identifier la personne à qui on assigne la position « enseignant » dans le groupe

Dans chacun des deux groupes, dès le début de la séance, un épisode comparable montre comment l'un des élèves – celui considéré comme bon selon les pré-tests et qui est identifié comme tel par les autres – est sollicité par un autre pour comprendre la tâche demandée. Dans la classe du professeur P, un élève, noté E2, a dès le départ surligné des passages du problème et commencé à réfléchir en se montrant très concentré. Comme il vient de marmonner que la solution doit être « en-dessous de zéro », il est alors interpellé par E3, situé face à lui, qui lui demande ce qu'il faut faire.

E3 à E2 : pourquoi c'est en-dessous de zéro ?

E2 répond : on l'a fait dans le calcul littéral. *E3 prend alors son cahier et le montre à E2.*

E2 : c'est pas des équations, ce qu'on a fait. *Il regarde le cahier que lui montre E3.*

E3 : c'est « calcul littéral et équations », *c'est le titre du chapitre qu'a fait écrire le professeur dans les cahiers, sans aller plus avant sur les équations*

E2 à E3 *dubitatif* : ça c'est juste que t'écris x et y, des trucs.... Mais les équations, c'est quand tu dois trouver. *Apparemment, E2 anticipe sur le temps didactique.*

Puis silence, E2 se remet à réfléchir seul. En voyant que E3 attend qu'il écrive, il lui demande de travailler aussi : Eh ! Il travaille sur moi ! Travaille toi aussi !

Dans la classe du professeur P' :

E'1 à E'2 *qui au départ ne l'écoute pas* : je voudrais que tu m'expliques.
E'1 s'écrie en tapant sur la table avec sa calculatrice : Explique moi, j'ai pas compris, j'ai pas compris !
E'2 montre alors sa calculatrice à E'1 et lui montre certaines touches : Je crois que tu prends 3, *il montre une touche,* puis tu fais *en posant son doigt sur son énoncé 3*, ce qui a écrit là Arthur plus 3 *et il tape sur sa calculatrice* multiplié par 7, tu fais 3 fois 7. Et ça donne... 24 *(sic).*
E'1 : c'est tout ?!
E'2 : oui !
Puis quelques minutes plus tard
E'1 à E'2 : c'est quoi le résultat ? Hein ? C'est quoi le résultat ?
Comme E'2 ne répond pas, il répète : c'est quoi le résultat ?
E'2 : je sais pas. Faut trouver le même résultat.

Ces deux moments, qui interviennent en début de séance, montrent comment deux élèves sont sollicités, parfois avec insistance, par un autre membre du groupe afin de l'aider dans la dévolution du problème. L'assujettissement topogénétique au système didactique diffuse et se convertit au sein du sous-système constitué du groupe : celui chez qui la dévolution a réussi est identifié par d'autres comme devant prendre la place de l'enseignant dont ils deviennent temporairement les élèves.

3.4. Direction d'étude et évolution du milieu dans le groupe

Cependant, cette fonction, habituellement assignée au professeur, n'est pas prise en charge de la même manière selon les équipements praxéologiques des deux élèves sollicités. En effet, E2 dispose d'une mémoire pratique qui le guide vers l'œuvre qui constitue le sous-bassement mathématique pour cette tâche : le domaine algébrique. Œuvre O_{E2} qu'il a tout d'abord introduite dans son milieu personnel d'étude, puis la sollicitation par E3 l'a conduit à la rendre publique ainsi que son rapport personnel $\mathcal{R}(O_{E2})$ au sein du groupe. Dans les propos de E2, le « on l'a fait dans le calcul littéral » signe la nécessité de recourir à la modélisation algébrique pour tester « en-dessous de zéro ». Tandis que le « Mais les équations, c'est quand tu dois trouver » engage vers le dépassement de ce qui ne semble relever que du seul calcul littéral mais que portent les équations, le mot étant connu puisque dans le titre du cahier. On devine à cet instant l'identification provisoire par E2 d'une équation à sa seule fonction : « quand tu dois trouver ».

E2 se place ainsi d'emblée dans un domaine qui relève d'une organisation mathématique régionale dont sa connaissance est encore restreinte : le calcul littéral « avec ses x et ses y », dit-il. En reprenant les notations utilisées par M. Bosch (2016) à partir du triplet (X, Y, Ω) dans lequel X désigne la position « élève », Y la position « professeur » et Ω un objet, on peut retracer le cheminement suivi par le sous-système didactique constitué de E2 et E3 et ce qu'il peut devenir pour le groupe. On passe du triplet (E3, E2, Q_{E3}) qui indique que l'élève E3 pose une question Q_{E3} à E2, au triplet (E3, E2, $\mathcal{R}(O_{\text{E2}})$) qui signifie que E2 indique son rapport à une œuvre en tant qu'élément de réponse. Cette indication devrait engager le groupe non plus dans la seule résolution de la tâche donnée, « déterminer une valeur numérique qui égalise les deux programmes de calcul du premier problème », mais dans un type de tâches plus large « résoudre une équation ».

Un sous-système pourrait émerger que l'on noterait (EI, E2, $Q(O_{\text{E2}})$) avec $I \in \{1, 3, 4\}$ pour signifier que le groupe des quatre élèves pourrait alors se poser des questions sur O_{E2}, à partir de $\mathcal{R}(O_{\text{E2}})$ rendu public, E2 continuant d'assumer la place de professeur. On obtient ainsi le schéma dynamique :

$$(\text{E3}, \text{E2}, Q_{\text{E3}}) \rightarrow (\text{E3}, \text{E2}, O_{\text{E2}}) \rightarrow (\text{E3}, \text{E2}, O_{\text{E2}} \cup \mathcal{R}(O_{\text{E2}})) \xrightarrow{?} (\text{E}I, \text{E2}, Q(O_{\text{E2}}))$$

où la flèche surmontée du point d'interrogation indique ce qui est susceptible ou non d'advenir par la suite. L'intervention de E2, et la mise à disposition du collectif de son rapport $\mathcal{R}(O_{\text{E2}})$, peut servir de média pour le groupe, lui offrant ainsi un environnement qui peut apporter des éléments de réponse. L'observation montre que E2 est le seul à travailler dans l'œuvre avec laquelle il a établi $\mathcal{R}(O_{\text{E2}})$ dans une dialectique média / milieu : il produit une égalité algébrique dont il ne fera rien car il ne dispose pas encore d'une technique algébrique puisque c'est celle qui est visée.

Dans tous les extraits que nous produisons par la suite, ce seront les deux mêmes élèves E2 et E'2 dans chacune des classes qui seront interpellés de manière récurrente. Les questions auxquelles ils sont soumis nous permettent de les désigner comme experts au sein du groupe. Une conséquence en résulte : ils y occuperont la place du professeur, soit comme directeur d'étude du groupe, soit comme média que l'on sollicite et qui enseigne. Le nouveau système qui se met en place peut se modéliser (EI, E2, Q) ou (E'I, E'2, Q') avec I, $I' \in \{1, 3, 4\}$, où Q concerne la résolution d'une équation et donc un enjeu technique pour un type de tâches, tandis que Q' concerne la recherche d'une valeur égalisant les deux programmes de calcul de la première tâche.

3.5. Direction d'étude et évolution du milieu dans le groupe

Dans le même groupe de la classe de P', nous relevons un épisode qui advient un peu plus tard, alors que de nombreux calculs ont déjà été effectués et qu'aucune solution ne semble être trouvée. Malgré l'intervention du professeur visant à les aider à structurer leurs recherches, une des élèves, notée E'3, agacée, s'exclame en direction de E'2 :

> E'3 : J'ai trouvé un chiffre. Il fait qu'un de plus. *Suite inaudible.*
>
> E'2 *cafouille puis dit* : peut-être que c'est un nombre à virgule... Essaye virgule 5 ça fait… *inaudible*.
>
> E'3 *reprend sa calculatrice et poursuit ses calculs.*

Une question émerge ici de manière implicite : comment réduire « l'écart » que E'3 a identifié ? Cet épisode montre comment le milieu évolue au sein du groupe. En posant une question au seul interlocuteur E'2, que le groupe considère légitime pour occuper la direction de la recherche, E'3 enclenche une dialectique des questions et des réponses. La question $Q_{E'3}$ portée par la constatation de « l'écart » de 1, que E'3 n'arrive sans doute pas à annuler sur l'ensemble des entiers naturels (au passage, on notera qu'il est impossible d'obtenir sur **N** un « écart » de 1 entre $7(x + 3)$ et $2x + 6$; ce qui signe une erreur de calcul de la part de E'3), ouvre vers de nouvelles tentatives de réponses qu'indique E'2 en proposant « essaie virgule 5 ». L'œuvre que propose en filigrane de convoquer E'2 en réponse à E'3 est constituée de l'ensemble des décimaux positifs ; elle prend place dans le milieu en l’élargissant. Cet élargissement du milieu pour le schéma herbartien procède d’une dialectique des milieux – l’impossibilité de réduire « l’écart » – et des médias – la suggestion émise par E’2 « d’essayer virgule 5 ». Cette réponse $R^{\lozenge}$ sera utilisée pour la tâche portée par ce premier problème, et elle sera cruciale dans un premier temps pour le troisième, lorsqu’il s’agira d’approcher l’écriture décimale de la solution $\frac{4}{7}$.

Dans la classe de P, l’élève E2 parle à haute voix et pour lui-même : « x sera en-dessous de 1. C’est entre 1 et 0 ». Il devient alors de fait directeur d’étude lorsque E1, qui a entendu les propos de E2, commence à taper des calculs sur sa calculatrice : « essaye avec 0,5 » dit-il à l’adresse de E1. Puis, voyant que E1 n’y arrive pas, il lui prend alors la calculatrice des mains et effectue les calculs à sa place, comme le ferait un enseignant devant un élève qui bute sur la mise en œuvre d’une technique élémentaire.

Un peu plus tard, E2 s’exclame qu’il a trouvé la solution et interpelle le professeur P : il occupe de nouveau la position d’élève. E3 essaie de s’emparer de sa calculatrice pour y voir l’affichage comme en recherche d’indices, mais E2 l’en empêche en effaçant l’écran. Il enjoint alors son camarade à trouver la solution par lui-même, tout en lui fournissant des indices. Puis, E3 montre à E2 son calcul sur sa calculatrice : E2 est de nouveau placé en position d’enseignant. Position qu’il assume par des indications du type : « non, c’est pas –5… C’est pas –2, c’est pas –1. C’est pas –… 15 ! » E2 propose de ce fait un ensemble de réponses $R^{\lozenge}$ qu’il fait mettre à l’étude par E3, comme le ferait un professeur dans un cours dialogué. E3 reprend alors l’étude relancée par E2 en poursuivant ses calculs. Le schéma précédent pourrait devenir :

$$(\mathrm{E2}, \mathrm{P}, R^{\heartsuit}_{\mathrm{E2}}) \longrightarrow (\mathrm{E3}, \mathrm{E2}, R^{\lozenge}_{\mathrm{E2}}) \longrightarrow (\mathrm{E3}, \mathrm{E2}, O_{\mathrm{E}I} \cup \mathcal{R}(O_{\mathrm{E}I})) \overset{?}{\longrightarrow} (\mathrm{E}I, \mathrm{E2}, R^{\heartsuit}_{\mathrm{E2}})$$

où $R^{\heartsuit}_{\mathrm{E2}}$ est la réponse de E2 validée par P et qu’il cherche à faire découvrir par E3 et le reste du groupe.

4. Conclusion

Le dispositif pédagogique « travail de groupe d’élèves » interroge la manière dont une dialectique de l’individu et du collectif peut exister dans un système didactique « ordinaire ». L'analyse des quelques épisodes que nous avons proposés montre que la dynamique chronogénétique portée par les questions pendant la recherche en groupe et les réponses $R^{\lozenge}$, influe sur la production d'une réponse collective $R^{\heartsuit}$. De l'état d'avancée dans l'étude privée de chacun des membres du groupe dépend sa participation à la construction du milieu didactique pour le collectif. Lorsque l'un propose des $R^{\lozenge}$ personnelles dans le cadre de la recherche (Chevallard, 2009b) ou des propositions pour relancer l'étude dans le collectif, il apparaît alors, temporairement, aux yeux des autres membres du groupe comme directeur d'étude, position qu'il assume. Lorsqu'un membre propose une réponse que tous acceptent comme $R^{\heartsuit}$, il apparaît comme l'enseignant qui indique la réponse, position qu'il assume aussi. Ainsi, se met en place un contrat didactique spécifique au groupe, inféodé par bien des aspects au système didactique principal qu'est la classe en y reproduisant des positions relatives au savoir.

Si nous adhérons à l'hypothèse avancée par M. Bosch sur la nécessité d'une analyse didactique des collectifs, notre étude en apporte une modeste contribution. Il sera nécessaire d'étudier également comment d'autres dialectiques sont mises en œuvre au sein des collectifs d'élèves dans le cadre d'un PER et comment l'enseignant gère l'ensemble des réponses $R^{\heartsuit}$ locales pour faire émerger la réponse $R^{\heartsuit}$ collective.

Références

Bosch, M. (2016). Cours 1 B : La prise en compte du collectif dans l'analyse des processus d'étude selon la TAD. Dans Y. Matheron & al. (Éds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. XVIII*[e] *école d'été de didactique des mathématiques, Brest (Bretagne) – du 19 au 26 août 2015* (pp. 127-142). Grenoble, La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaen, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2009a). La TAD face au professeur de mathématiques http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Chevallard, Y. (2009b). *La notion de PER : problèmes et avancées.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

Matheron, Y. (2009). *Mémoire et étude des mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Meirieu, P. (1999). Pourquoi le travail en groupe des élèves ? Objectifs et méthodes du travail en groupe pour les pratiques de classe. https://www.meirieu.com/ARTICLES/pourqoiletdgde.pdf

The external didactic transposition of mathematics at university level: dilemmas and challenges

Marianna Bosch
IQS School of Management, Ramon Llull University, Spain

Carl Winsløw
IND, University of Copenhagen, Denmark

Abstract. We develop the idea that research on university mathematics education needs to more systematically address the *external didactic transposition*. After outlining existing research that goes more or less in this direction, we comment on the why and how this direction could be pursued by ATD research on UME.

Résumé. Nous developpons l'idée que la reserche en didactique des mathématiques au niveau universitaire devrait étudier d'une manière plus systématique *la transposition didactique externe*. Après avoir présenté sommairement la recherche qui semble aller dans cette direction, nous commentons pourquoi et comment cette ligne pourrait se poursuivre dans la recherche en TAD sur l'enseignement universitaire.

Resumen. Desarrollamos la idea de que la investigación en didáctica de las matemáticas a nivel universitario debería estudiar de forma más sistemática la *transposición didáctica externa*. Después de esbozar las investigaciones que parecen apuntar en esta dirección, comentamos por qué y cómo se podría desarrollar esta línea desde la investigación de la TAD sobre enseñanza universitaria.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

1. Introduction

University mathematics education (UME) designates a heterogeneous set of didactic practices, occurring in a variety of higher education institutions. These institutions carry a number of conditions which are not shared by secondary and primary education, such as:

- The proximity of scholarly knowledge and teaching practice, both at the institutional and personal level (teachers are often also researchers);
- The professional and scholarly aims and potentials of instructional processes (some students will become researchers or take on other professions related to scholarly knowledge);
- Students engage in a higher education programme based on a personal choice, often linked to plans for a future career;
- Knowledge is commonly delivered in ‘modules’ (courses, project units, etc.) which may be mandatory or optional, and can be passed more or less independently;
- The teaching institution is itself responsible of the elaboration of curricula and syllabi.

It should also be noted that mathematics as a discipline takes on two specific roles in higher education programmes, which may in practice be quite different:

- As the *core discipline* within programmes of pure or applied mathematics;
- As an *auxiliary* or more or less *integrated* discipline within a large number of other specialties, such as engineering, natural science or business programmes.

This paper begins from the assumption that the basic features of didactic transposition still makes sense for the case of UME, and includes two major steps (Chevallard, 1991, 35):

- *External didactic transposition* (EDT), where scholarly knowledge (whether purely mathematical, or mathematics integrated within other specialties) is selected, adapted and declared as “matter to be taught”, resulting in documents such as syllabi, textbooks and other resources and regulations for teaching.

- *Internal didactic transposition* (IDT), through which the "matter to be taught" is transposed to fit the demands of actual teaching (lectures, assignments, evaluations etc.), with due adaptation to the more or less specific conditions and constraints of the institution and its members.

One can interpret almost all existing research on UME as primarily concerned with IDT, which considers the "knowledge to be taught" (along with the institutional conditions and constraints) as more or less given. Concluding a synthesis of 20 years of European research on university mathematics education, the authors wrote:

> … we should mention also the potential, but currently quite limited, impact [*of research on UME*] at the level of innovation of curricula and policy. Some of the more global problems identified by [*research on UME*], such as transition problems between secondary and tertiary institutions (…), the isolation of mathematics courses in non-mathematics majors (…) or the need for more systematic and research based UME teacher development and UME practice innovation (…), clearly call for research and impact at this level (Winsløw, Gueudet, Hochmut & Nardi, to appear).

Besides citing some of the major challenges identified through papers on UME presented over 20 years at the CERME congress, this quote implies a need for systematic research into EDT at university. The naïve interest of this endeavour is to achieve a better understanding of how the contents and other 'given' aspects of UME came to be what they currently are, as well as how they are (or could be) changed. But what would such research look at exactly? What results could it produce, with what effects?

Our motivation for considering these questions is an apparent paradox: in spite of the proximity of scientific research already mentioned, the work demanded of students in university mathematics courses often appears very far from research. Already Klein (1908, 250) warned against university mathematics study "building only on what one reads in books" while ignoring the development of "vivid conceptions" and "independent judgment". Burton (2004, p. 198) conducted a systematic study on mathematicians' beliefs and practices as researchers, and also reflected on the contrast with common forms of mathematics teaching: "the gap between mathematicians' views of mathematical knowing and that encountered by learners is monstrous" (p. 198). Madsen & Winsløw (2009) found that mathematicians tend to see at most indirect connections between their tasks as teachers and as researchers, and generally consider that the accumulation of specialised knowledge makes it impossible for students to encounter genuine research at the undergraduate level. Similarly, Barquero, Bosch, and Gascón (2013) pointed out that the teaching of mathematics to students in non-mathematics programmes often fails to engage students with genuine problems and models from the disciplines they study.

In the CERME context mentioned above, we do find numerous small scale innovations in UME which attempt to offer students more "research like" activities than lecture attendance and exercise solving. However, these innovations almost all concern the IDT, while many of them take note of obstacles from the "context" (such as an overloaded syllabus, exam practices etc.). Many of these obstacles are in fact products of the EDT. Research should go beyond noting them as just boundary conditions.

Unlike other school institutions, universities are to some extent themselves in charge of the EDT (from the construction of educational programmes to the production of teaching material). And this transposition work depends not only on specialized academic knowledge but also on university-internal interests and policies, external interests (such as target professions and their needs), and on further external constraints such as resources, regulations and policies decided outside of the institutions themselves.

The aim of this paper is to outline some directions and ideas for research on EDT in UME and to nourish an important methodological debate within the ATD community.

2. Theoretical questions and framework

To delimit our object of study and better define its scope, we propose a first rough terminology to talk about different university teaching entities of different size. Providing a common language is not only necessary: it also shows, by its current absence, how little attention is paid to these entities. We shall name three main units that are characterized by different extension in time:

- A *period* is an event of teaching or study which is defined by the institution and takes place within at most a day (e.g. a lecture, a tutorial, a lab session etc.).
- A *module* is a theoretical description of a set of study and possibly teaching activities which take place within at most one year, and which the student must complete as a whole, whereupon the institution will deliver some official recognition to confirm completion, usually after some form of *assessment* (a specific part of the module). A module may for instance describe a course unit such as 'Calculus 3', or an independent project or assignment.
- A *study programme* is a collection of modules which, once they are all completed, entitles the student to a *degree* that is often used to name the programme (e.g. bachelor, master, PhD, etc.). The length can vary from one to several years.

Certainly, the above notions reflect the 'programming of learning' which Verret (1975, 146) considers one of the characteristic features of the 'bureaucratic transmission' of knowledge delivered by contemporary mass universities. They are thus pragmatic categories for research into current practices.

We shall consider also an intermediate level: within a programme, modules may be structured in *sequences* of modules (a collection of modules concerned with the same knowledge sector, in the sense of ATD, and often to be taken in a certain order – e.g. Calculus 1-2-3). Our terminology is summarized in Table 1, which indicates the approximate relationship with the levels of didactic co-determination (Chevallard, 2002), along with examples of these levels in the case of a classical study programme on mathematics.

Unit:	Duration:	Level of didactic co-determination
Study Programme	≥ 1 year	Discipline (1 or more) - e.g. Mathematics
Sequence of modules	> 1 module	Domain - e.g. Calculus
Module	≤ 1 year	Sector - e.g. vector fields
Period or small sequence of periods	≤ 1 day	Theme or Subject – e.g. curve integrals, gradient theorem

Table 1. Some first terminology

A possible way to explain what could cause the between teaching and scholarly knowledge (current research) in universities, is that EDT is not a simple, one-step transformation of fresh, scholarly knowledge to principles and presentations of knowledge to be taught. EDT relies crucially on what Chevallard (1991, 61) calls the *textualisations of knowledge*, which detaches the 'synthesis' of research productions from the original context of production, and its problems. What is even more important: the resulting texts are soon rewritten and combined with other previous texts, and in other ways generate a whole posterity of supposedly refined and improved texts (including present day textbooks, Wikipedia entries, etc.). For instance, the hundreds of textbooks on Calculus written in English over the past 50 years probably draw more on previous textbooks than on scholarly sources. The same could be the case for legal descriptions of modules, study programmes and so on: they are continuously rewritten. A large part of ongoing EDT may thus be *solely concerned with other products of EDT*, not direct transpositions of scholarly knowledge (see fig. 1). Thus, the relation between knowledge to be taught and the scholarly institution and its praxeologies may be more indirect, even in the case of universities. For instance, the ongoing transposition might be informed in some way by a development in the scientific field, without necessarily relating to the actual sources of the knowledge to be taught (cf. Fig. 1, dotted arrow).

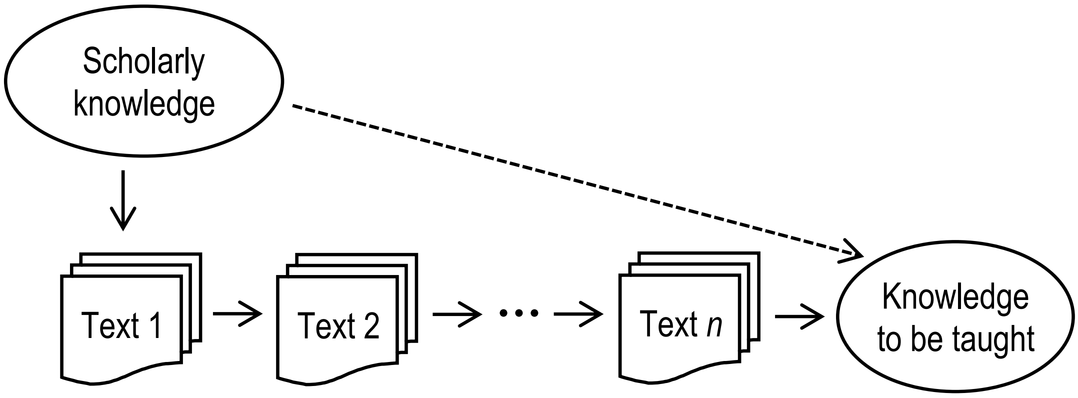


Fig. 1. A refined model of external didactic transposition.

We can now formulate, with a bit more precision, the general research questions which we consider in this paper:

1. What are the main processes and rationales in the elaboration and change of UME study programmes, sequences and modules?
2. What institutional mechanisms contribute to the process? What is the *noosphere* in this case? What conditions and constraints appear?

In particular, how does scholarly knowledge (for instance, university teachers' own research activity) affect the construction of UME programmes and modules at the level of institutions? What is the respective role of 'didactic syntheses' of knowledge (e.g. textbooks, articles) and of problems (pursued by scholars, at present or in the past)?

Studying the *process* of EDT has two major implications, which can raise important methodological challenges for researchers. The first one is an essential specificity of the French tradition in didactics: being aware of the fact that a transposition takes place, and studying its historical variations, reveals that the pieces of knowledge involved in an instructional process are not evident or transparent. They are the fruit of a process where many decisions are taken by several agents. This process can happen in different ways and bring about different final products. Research should question and analyse the quality and the specificities of these products. Moreover, the study of EDT also reveals that what is taken as the core of the teaching and learning process depends on the institutions involved in the whole process and on their way of conceiving knowledge (the institutional epistemologies). Even the way of delimiting, labelling and describing the 'target knowledge' of a teaching and learning process may have important implications.

The second implication is a direct consequence of the first. It refers to the *units of analysis* that researchers consider when analysing a given teaching and learning process. Because instructional processes depend on what is elaborated as bodies of knowledge to be taught and leant (and not only in the way it is taught and learnt), researchers should consider the origin of these bodies and its process of production. And, of course, the institutional time and space dependence of the EDT process should be included in the empirical evidence to support the analysis. It is not enough to take into account what teachers and students do in a classroom (and outside it), it is also necessary to consider the steps followed by the knowledge since it is produced in a scholarly institution till it becomes an instructional target: what pieces of knowledge (and know-how) are selected and why, where these pieces come from, who produced it and what for, etc.

Elaborating suitable methodological tools to take all this social, historical, epistemological and even political institutional evidence into account requires a wide range of expertise, including (but certainly not limited to) that of scholars, i.e. advanced mathematics. This might explain, in part, the rarity of research which undertakes a critical study of EDT in the UME context.

3. Preliminary answers from previous research

We now outline some of the (not very numerous) studies which could inspire and contribute to the pursuit of the research questions and which hold ideas or results that could be taken further with the theoretical affordances of ATD.

Evidently, university teachers and researchers of mathematics are central agents whose shared views and knowledge are of great impact on the questions raised. Grigutsch and Törner (1998) investigated the global views on mathematics held by German mathematicians and found that they privilege a view of mathematics as a process of 'discovery and understanding', rather than as a 'collection of complete knowledge' (amongst a total of five positions identified by factor analysis on a questionnaire with multiple items which respondents could indicate their agreement with). They note that "the reality of mathematics teaching in practice is not identical with this view - lectures are the imparting of complete knowledge with a high degree of formal exactness", which aligns with the 'gap' later found by Burton (cf. above). Many opinion pieces by individual mathematicians argue that university teaching should somehow be changed to reflect the 'creative side' of mathematics and not (just) the 'created side':

> In the end we won't be able to cover all the mathematics that every student will need in later life, so we need to think about how best to teach students so that they are capable of finding out new, to them, mathematics if and when they require it (Holton, 2005, 306).

In a similar vein, based on interviews with a large number of interviews with mathematics students and graduates, Petocz and Reid (2012, 90) argued for a "curriculum that is outward looking focuses on the use of mathematics as a way of thinking, an approach to life, an inclusive tool to investigate—and even change—the world". Naturally such general ideas do not settle what study programmes actually should consist of, and can be considered general philosophies about the discipline as a whole, which are quite similar to the "competence approach" to curriculum writing (e.g. Niss, 2018).

Historical studies and accounts could also furnish important insights into the above questions, both as regards the origins of the knowledge to be taught in scholarly developments, and in terms of how the curriculum itself has developed.

At the level of study programmes, Tucker (2013) offers an overview of how undergraduate programmes developed in the USA in the 20th century. He distinguishes three major periods: before 1950, 1950-1970, and after 1970. It appears that until 1950, the components of undergraduate mathematics programs remained relatively stable, and held few modules on more advanced domains than calculus. Calculus here means the study of functions in one and several variable, focusing on calculation techniques while relying on very informal theory (cf. Winsløw, 2015, for the praxeological interpretation of Calculus vs.

Analysis). Tucker notes (p. 697) that *in the late 1950's, there still were many able students going to graduate school from mathematics programs that did not teach the Riemann integral*. As in other Western countries, the cold war in the 1950's led to a sharp increase in funding and student numbers for mathematics degrees. In the following years (up to 1970), the study programmes were profoundly changed, with the introduction of advanced mandatory modules (such as abstract algebra and topology) which are common today. Around the same time, research replaces teaching as the main priority for many professors at universities offering doctorates (but not in 'colleges' offering only undergraduate programmes, lasting from 2 to 4 years). Famous universities such as Berkeley develop a deliberate policy of attracting the best researchers by offering them positions with "no undergraduate teaching and a light graduate teaching load" (p. 700). And indeed, the assortment of more advanced modules in the undergraduate mathematics programme paves the way for graduate studies. Tucker notes that since 1970, study programmes have not changed dramatically as far as the module structure is concerned.

A similar, but more extensive survey was done in the recent thesis of Huntington (2015). Related accounts are available in other countries. They offer at least initial hypotheses about our research questions, concerning the timewise origin of the current inventory of modules in mathematics programmes all over the world, and the idea of a relative stability of programmes over the past 40 years, when it comes to the modules offered.

Stability is much less pronounced when it comes to the detailed contents and other requirements for modules and sequences. It is interesting to consider in more details how "new" modules become stable, and again a historical point of view can be useful. For instance, courses on linear algebra, discrete mathematics and computing were introduced in most universities in the 1950's (Huntington, 2015, 94), with some mutual dependence. Dorier (2000, 56-61) explains how linear algebra became teachable through the production of didactic syntheses like Birkhoff and MacLanes' *Modern Algebra* (1941), as the culmination of a relatively long process of maturation and clarification in the scholarly field. Indeed, abstract linear algebra was among the novelties introduced into mathematics programmes in the 1950's, both in Europe and in the USA. Pursuing the study of textbooks and module descriptions from these first courses would indeed represent an excellent case of the model in Figure 1. We might also investigate further the causes of subsequent developments of the linear algebra modules. For instance, as noted by Dorier (2000, 61), there seems to be a tendency that the strict axiomatic approach has been 'softened' in later years, in response to the needs of students who have not been exposed to axiomatic mathematics in upper secondary education, as they had been in many countries up to around 1980.

A similar – if not entirely parallel – development may be seen in the area of Calculus, but it appears to have been somewhat more controversial in the United States, where the so-called *Calculus Reform* is the subject of numerous studies and opinion papers (cf. Robert and Speer, 2001). An interesting special case, studied in depth by Lavicza (2007), is the extent to which computer algebra systems are required (EDT) or just optionally chosen (IDT) as devices for the teaching in the Calculus or Linear Algebra sequences.

4. Conclusions: future ATD research on EDT in RUME

This paper highlights a gap in UME research regarding the process of EDT. We believe that for didactic research to make non-trivial and long term impact on UME, it is of crucial importance to consider this process as a research object in itself. The fact that study programmes have varied very little in the last 30-40 years, makes the necessity of its study less visible. In the case of changes – or crises – the EDT becomes more apparent, as for the Calculus Reform in the US (within sequences of modules). However, acknowledging the existence of EDT is not enough. We need methodological tools to investigate the phenomena involved. Previous ATD research on EDT (e.g. Chevallard, 1991), as well as the studies considered in section 3, provide us with some directions, which we finish by outlining.

The first direction is to study the variation of study programmes over time and across institutions, based on relevant documents. The analysis of curriculum documents, along with interviews with those directly involved in the drafting of study programmes, should focus on the didactic technology and theory that prevail in the *noosphere*, and which hinders or furthers change.

The second one refers to the 'texts' that constitute the main products of EDT at the level of sequences, modules and chapters, such as text books and syllabi. Tracing the evolution of these texts over a longer period of time can shed light on the way mathematical contents are (re)structured, on the parts that remain untouched, on the sources used in the process, on the balance between problems and synthesis (cf. Bosch & Winsløw, 2015), etc. Prefaces and other commenting documents (reviews, outlines), as well as official recommendations, such as Tuning (2007), can be an important source for analysing the specific didactic technology and theory which prevails in a given domain.

Thirdly, the scholars' prevailing epistemology about the mathematics to be taught, including its relation to mathematical research, appears to be an important object for research. Even if much of it is implicit, interviews with teachers could be designed to uncover the rationales and other factors that support or hinder changes in EDT. And as these decisions are collective and founded in institutional beliefs, several interviews may be needed. Interview studies are still quite rare in ATD (an example can be found in Madsen & Winsløw, 2009) and will require separate methodological attention for the above purposes.

References

Barquero, B., Bosch, M. and Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 33, 307–338.

Bosch, M. and Winsløw, C. (2016). Linking problem solving and mathematical contents: the challenge of sustainable study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 35 (3), 357-401.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné* (2nd. edition). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In Dorier, J. L. et al. (Eds.), *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dorier, J. L. (Ed., 2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer.

Ganter, S. (Ed., 2000). *Calculus renewal: issues for undergraduate mathematics education in the next decade*. New York: Kluwer.

Huntington, H. (2015*). A historical analysis of the mathematics major requirements at six colleges in the United States from 1905 to 2005.* Ph.D.-thesis, University of Columbia. On-line at https://academiccommons.columbia.edu/catalog/ac:187818.

Klein, F. (1908/2016). *Elementary Mathematics from a higher standpoint, vol. 3: Precision mathematics and approximation mathematics.* Berlin: Springer.

Lavicza, Z. (2007). Factors Influencing the Integration of Computer Algebra Systems into University-Level Mathematics Education. *International Journal for Technology in Mathematics Education,* 14(3), 121-129.

Madsen, L. and Winsløw, C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at research-intensive universities. *International Journal of Science and Mathematics Education* 7, 741-763.

Niss, M. and Højgaard, T. (to appear). *Mathematical competencies in mathematics education*. Springer, in press.

Petosz, P. and Reid, A. (2005). Rethinking the tertiary mathematics curriculum, *Cambridge Journal of Education*, 35(1), 89-106.

Robert, A. and Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/elementary Analysis. In D. Holton (Ed), *The teaching and learning of mathematics at university level, an ICMI study* (pp. 283-299). Springer.

Tucker, A. (2013). The History of the Undergraduate Program in Mathematics in the United States. *The American Mathematical Monthly* 120 (8), 689-705.

Tuning Project (2007). Tuning educational structures in Europe: reference points for the design and delivery of degree programmes in mathematics. On-line at http://www.unideusto.org/tuningeu/images/stories/key_documents/tuningmathematicsfinal.pdf

Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Paris: Honoré Champion.

Winsløw (2015). Mathematical analysis in high school: a fundamental dilemma. In: C. Bergsteen & B. Sriraman (Eds), *Refractions of Mathematics Education: Festschrift for Eva Jablonka*, pp. 197-213. Charlotte, NC: Information Age Publ.

Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmut, R. and Nardi, E. (to appear). Research on university mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.). *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe*. London: Routledge.

An overview of “bridging courses” from the ATD perspective

Lídia Serrano
The Cooper Union for the Advancement of Science and Art (USA)

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull (Spain)

Josep Gascón
Dpt. Mathematics, Universitat Autònoma de Barcelona (Spain)

Abstract. The presence of bridging courses in the European university panorama has evolved from a simple spontaneous proposal to being part of a consolidated resource for new students in many universities. In Spain, the tendency points to the usual presence of these courses in almost all degrees containing mathematics in their first year. The analysis of different «bridging courses» led us to formulate the hypothesis that, due to the large number of mathematical praxeologies introduced and the type of didactic praxeologies used, they seem to contribute to increase the isolation and rigidity of mathematical praxeologies studied at secondary level (Serrano 2013). From the ATD, we have designed and experimented a course that tries to overcome this isolation by proposing connecting elements in the terms introduced by Fonseca (2004).

Resumen. La presencia de los cursos puente en el panorama universitario europeo ha pasado de una simple propuesta espontánea a ser un recurso consolidado para los nuevos estudiantes que acceden a la universidad. En el caso de España, esta tendencia apunta a la presencia de estos cursos en casi todos los grados que integran cursos de matemáticas en su primer año. El análisis de diferentes cursos nos llevó a formular la hipótesis que, debido al gran número de praxeologías matemáticas introducidas y al tipo de praxeologías didácticas utilizadas, estos parecen contribuir al aislamiento y a la rigidez de las praxeologías matemáticas estudiadas en secundaria (Serrano 2013). Desde la TAD, hemos diseñado y experimentado un curso que intenta superar este aislamiento proponiendo conectar elementos en los términos introducidos por Fonseca (2004).

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Exploratory analysis of the "bridging courses"

The implantation of bridging courses in Spain goes back to the late 1990s. Among the several reasons for their appearance, we highlight on the one hand, the implementation of an educational reform in 1990, which modified the structure of secondary school, increasing compulsory secondary school to 16 years old and reducing non-compulsory secondary school to 2 years (16-18) instead of 4 (14-18). On the other hand, the new political scenario in Spain allowed the opening of the university to a large number of high school students. The distance between the new secondary school and the (old) university was perceived as so severe that most Spanish universities began to propose courses to facilitate the transition between the two institutions. The so-called "bridging courses" or "propaedeutic courses" are supposed to complete the mathematical contents of higher secondary school with those considered essential to attend the mathematics courses at the university.

Since 2005 we are analyzing these courses and their evolution in the Spanish universities. To delimit their status, we have been carrying out a detailed study through different instruments such as interviews with designers of the courses and with lecturers responsible for implementing, both "bridging" and "academic" courses; interviews with students; class observations; analysis of both teachers' and students' notes and materials. In this analysis, we have found several common characteristics. In most cases, the interviews with professors responsible for "bridging courses" revealed that most had not made the decision to implement them, and therefore, they were not very clear about their "raison d'être", understanding them as a mere review of secondary mathematical content.

This make us think that its implementation has become a fad imposed in each university to not be less than the others, without carrying out a prior analysis of its need, effectiveness and adequacy of the design. Faced with the question of their relation to university mathematics, they mostly say that despite not advancing the subject that will be seen in the university, they select those basic topics that will be developed throughout the course. In addition, as these courses are not always assessed, it is difficult to obtain data for their effectiveness.

The “bridging courses” are addressed to a wide range of students who will start different careers, where theoretically, mathematics also has different levels of complexity. This might suggest that the design and content of each of these courses would have to be fit to the peculiarities of the different university studies. Reality, however, belies this assumption. The main goal in most of these courses is to cover the maximum number of contents in the short time of the course, trying to make an exhaustive review of all secondary mathematics, regardless of its relation to the course or the type of students to whom they are addressed.

According to Serrano (2013) we classify the courses observed in two large groups, considering the kind of *didactic moments* (Chevallard, 1999) that appear more directly addressed. Let us remind that the theory of didactic moments provides a frame to describe study processes based on the praxeological structure of the knowledge to be learned: a *first encounter* with the *question* or *type of tasks* to be solved; the *exploratory moment* of the type of tasks till a germ of *technique* emerges (or is introduced); the *moment of the technical work* where the variations of the technique and its scope are examined; the *technological-theoretical moment* when questions about the description and justification of the techniques used and the delimitation of the types of tasks are addressed ; the *evaluation moment* to assess the value and robustness of the praxeological elements obtained ; and the *institutional moment*, which provides a public version of the work mobilised and relates it to the outside world.

The first group of the observed “bridging courses”, these were based on a list of problems organized by thematic areas but not too articulated among themselves. The study of this list of different problems led the students to live a kind of *eternal first encounter and exploratory moments* that, due to lack of time, was not necessarily productive. It was then the teacher who ended up with a continuous “bombardment” of reminders of (supposedly known) techniques and technologies in a very opportunistic way, following the needs of each case. The students were thus faced with a large number of specific and isolated mathematical praxeologies, starting from their practical block (types of problems and techniques). Despite the appearance of an “active” methodology focused on solving problems, classroom work was done mainly by the lecturer. This strategy prevailed in the case of courses offered in scientific careers.

The second large group consisted of what we call "classical style" courses characterized by a large number of mathematical praxeologies introduced throughout a series of topics fixed a priori, where the only common thread between them, if any, was situated at the level of the theoretical discourse, far from the mathematical responsibility of the students, and exclusively assumed by the teacher. In the end, the student also ended up working with a large number of specific and isolated mathematical praxeologies, although the teacher's speech appeared more connected and structured in local or regional mathematical praxeologies. This structure mainly corresponds to the courses offered in social careers. The theoretical block of the praxeologies was here the main element of the structure presented. In this case, the *moment of the first encounter* was strongly linked to the *technological-theoretical moment.*

In the observations made, the "bridging courses" were (implicitly) based on didactic models that, at the most, take into consideration two of the didactic moments or dimensions of the study process. They also appeared to be based on epistemological mathematics models essentially "conceptualist" and "cumulative" – that is, interpreting mathematical knowledge as a network of concepts that can be expanded by the accumulation of new concepts and new relationships between them. As a consequence, these courses tend to reinforce two moments of the study process to the detriment of the others, thus favoring the isolation and disarticulation of the mathematical praxeologies that are studied in secondary (Fonseca, 2004).

We can connect these observations with the proposal made by Biehler and Hochmunth (2016) when they distinguish four types of bridging courses according to the elements of the praxeologies to be taught that are taken into account:

- Improving skills in applying techniques stemming from current or past school mathematics (development of the practical block);
- Improving technical skills and technological competences in school mathematical contexts (development of the theoretical block);

- Introducing theoretical and technological aspects of university mathematical practice within topics from school mathematics (questioning the practical block);
- Reflecting relations between school and university mathematics (questioning the whole praxeology).

In these types of strategies, all praxeologies (those already available from secondary level and those newly introduced) are supposed to be previously established and the focus is put in the way to prepare the transition from the previously studied to the new ones to come.

2. A "bridging course" based on the ATD

The previous analyses led us to propose an alternative "bridging course" that, in a certain way, goes on the opposite direction of the observed ones. If, as we have argued, the main handicap of students arriving at the university is their inability to articulate theoretical and practical knowledge to go beyond the simple application of specific techniques to isolated problems, then we believe that the main goal of a Secondary-University transition course would have to facilitate this work. Instead of a quick and necessarily superficial review of an important part of the knowledge that the students have just studied (or should have studied), we propose to carry out a detailed and in-depth study of a few problematic questions related to the university degree students are about to start (Barquero, Bosch & Gascón 2009, Bosch & Gascón 2007). This study is aimed at letting them connect different praxeologies, to question the techniques learned at secondary school and to develop them until endowing them with more scope and validity (Ruiz-Munzón & Serrano 2011).

Considering the results on the mathematical and didactic discontinuities between the secondary and the university presented by Fonseca (2004), we designed a course that tries to overcome such discontinuities. In other words, facing the phenomenon of the atomization and rigidity of school mathematical praxeologies, the didactic problem that we pose is to design a process of study that makes it possible to integrate certain specific praxeologies into a relatively complete local praxeology.

The course that we propose fulfills the following characteristics. First, the general goal is the articulation of a few specific or local mathematical praxeologies studied in secondary, which present a low degree of "completeness". These are praxeologies that the students are not able to connect spontaneously and that they are part of a central mathematical praxeology in the curriculum of the mathematics course that students will begin at university. Second, the articulation of these specific mathematical praxeologies should be done in response to an initial problematic question that has interest and "meaning" for the students. It is intended that the articulation of specific mathematical praxeologies has a mathematical functionality and does not respond (only) to pressures of the didactic contract. And third, the reconstruction of the local mathematical praxeology from the specific mathematical praxeologies "belonging" to students, must cause that the different moments of the study process arise and are integrated in a functional way without the predominance of a few to the detriment of the others.

The initial question Q_0 that we have chosen as the starting point of the didactic process can be condensed in the study of inequalities of the type $f(x) \geq g(x)$ where f and g are elementary functions of real variable. The origin of this question is linked to a problem of comparison of economic magnitudes:

> Q_0: Determine for what sales company's incomes are greater than costs (or unit prices higher than average costs, or profits greater than a given value, or costs less than a given value, etc.).

If we model incomes, costs, unit prices, average costs or profits of a company through functions that depend on a single variable –sales– then, the question raised leads to the study of an inequality of the type considered. We will suppose that in all cases the mathematical model $f(x) \geq g(x)$ is already given, that is, we will not ask the students to determine the functions from certain information about the company, and the problem lies in determine the values of x for which the inequality is satisfied.

The mathematical praxeology that will allow to answer the initial question Q_0 can be considered as an articulation of three specific mathematical praxeologies that are studied at secondary level:

- The *resolution of equations* (linear and quadratic, cubic with integers or rational roots, logarithms or very simple exponentials), which we will call P_{EQ};
- The *resolution of algebraic inequalities* (first and second grade basically), very incipient at secondary level and that will be designated by P_{IN};
- The *graphical representation of elementary functions* (polynomials of degree ≤ 3, exponential functions and rational functions), that we will denominate by P_G.

For students who finish high school, these three praxeologies appear poorly connected to each other. The study of equations is part of the algebraic work with expressions of first and second degree that the students study before the introduction of functions. The resolution of the other types of equations (cubic or logarithmic and elementary exponentials) appears in different subjects of the curriculum, usually linked to the study of functions, but not very linked to their graphic representation. Although the resolution of equations can appear as a sub-technique for the graphical representation of functions, the graphs are never used as a tool to solve equations or inequalities. In fact, within the study of functions, graphs always appear as the end product of a very standardized technique that begins with the determination of the domain, the study of the limits of the function in the border points of the domain, the determination of points cutting with the axes, calculation of the derivative, the study of monotony, concavity and convexity, etc. In this sense, the graph is always the sole and final objective of the process, it is never considered as a model of the relationship between two magnitudes that can be useful to solve problems. Students learn to represent functions, but they do not learn to do anything with these representations. For this reason, each function, whether elementary or not, is considered as an isolated element, almost as a pretext to implement a technique whose steps are specified previously (domain, limits, etc.) and that leads to the construction of the graph. In particular, families of elementary functions are not always studied as such, neither the relationships between the values of the parameters that determine a function of the family and the form of the function graph.

We assume that praxeologies P_{EQ}, P_{IN} and P_G are available for students who finish secondary school. Thus, we present as a *reference epistemological model* the way in which these three praxeologies provide the needed ingredients to produce an answer to Q_0, allowing the articulation of those ingredients and inserting them in a more complex and wide local praxeology. For this, we need to start from a powerful questioning that guides and at the same time justifies the process of study that has to be taken. In our case, we proposed the problematic question:

Q_0; What values of x satisfy $f(x) \geq g(x)$ if f and g are any function?

Given the impossibility of giving a unique and definite answer to this question, it is decided to consider particular cases of it, taking as a criterion the families of elementary functions f and g: linear, quadratic, cubic, hyperbolic and exponential. The introduction of new families of functions will modify the techniques used to solve inequalities. Thus, the variable *family of functions* is the motor of the study dynamics. When enlarging the kind of functions considered, the limitations of the algebraic techniques are soon made visible, and the graphic techniques, that seem initially more complex, appear as more efficient and economical, although they only provide, in general, approximate answers that must be "finalized" by some numerical method. This work leads to new problematic questions to be considered. For example, how do solutions vary if one of the functions is fixed and not the other?

In a second part of the course, we proposed a new type of problems generated by the study of an economic question where a cost function is available and the income function has to be constructed given some constraints. The question is how to choose the appropriate unit price for the company to always have benefits from a certain sales value. This kind of problems reinforces, in a certain sense, the work with the graphical technique and the interest of graphically representing the two functions $f(x)$ and $g(x)$ instead of the difference $f - g$.

The course here presented has been addressed to students who started a Business degree at IQS School of Management of Ramon Llull

University in Barcelona (Serrano, 2013). The course had a duration of 30 hours distributed in 10 sessions, and the number of participants varied between 40 and 50 per session. The course was structured in two distinct blocks. The first, dedicated to work with inequalities between elementary functions: “Income and Costs”, and the second to elementary modeling with parameters: “T-shirt buying and selling” (Ruiz-Munzón 2006). At the end of these two blocks a final test was performed.

Even if closely related, this strategy does not seem to correspond to any of the four types of courses proposed by Biehler and Hochmunth (2016). It coincides with the two first ones in the fact that, as a bridging course, it is part of a remedial strategy based on “completing” the mathematical education students receive at secondary level – a strategy that can only fail since it pretends do in three weeks something that has not been done in two or more years…

3. Conclusions

The appearance of bridging courses on the university scene seems closer to a provisional remedy proposed by universities than to a really support of the secondary-university transition. Therefore, the only proposal is a short reinforce of this preparation in a 30 hours course. This strategy appears as a “coup de force” from the university institution in front of secondary education that marks a strict institutional hierarchy. In other words, what would be a problem of university education – where students begin to fail more than what is considered “tolerable”– is transformed into a problem of secondary education. Little is questioned of the university pedagogy. And little is made to elaborate a joint solution in a collaboration between secondary school and university.

In our analysis, we have seen that the university spontaneous response materializes in bridging courses with a vast program, seems to reinforce some of the university pedagogy pitfalls, instead of overcoming them. Students are proposed to “visit” a large number of mathematical praxeologies in a very short period of time and through a poor didactic praxeology regarding the different moments of study they prioritize: the exploratory moment when considering the *topos* of the student; a double institutionalization and theoretical moment when considering the *topos* of the teacher. This situation leads us to postulate that, apart from other possible benefits, which undoubtedly contribute, this type of “bridging courses” aggravate the disarticulation and rigidity of the mathematical praxeologies that make up the students' background and, therefore, the mathematical and didactic discontinuities between the secondary and university educational levels.

Our proposal based on the ATD is to design a course that give students the chance to implement experimental *research and studies courses or activities* that, starting from an initial question with a strong generating level, allow them to articulate some of the praxologies that are studied in high school and which, for different reasons (the university access exam among others) cannot be inter-connected. Two important differences between the bridging courses observed and our proposal are, on the one hand, the number of “concepts” that are considered during these 30 hours (much lower in our case) and, on the other hand, the fact that the activities proposed in our course are guided by an economic question (the study income and costs) that structures and gives a rationale to the study process.

In any case, we postulate that their incidence remains very limited in relation to the enormous problem of the discontinuities mentioned. Bridging courses are located in a “limbo” between secondary education and the university. They appear more as a way to avoid the discontinuity problem than a strategy to address it in all its complexity.

References

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2146-2155). Nicosia: University of Cyprus.

Biehler, R. & Hochmuth, R. (2016). In Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (Eds.). Relating different mathematical praxeologies as a challenge for designing mathematical content for bridging courses*Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Kassel, Germany: Universitätsbibliothek Kassel.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: del taller de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. *II Congreso de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD)*. Uzes.

Bosch, M. Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4* (2), 129-159.

Ruiz-Munzón, N. (2006). *Ecologia de la modelització algebraico-funcional al Batxillerat.* Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados, Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N. & Serrano, V. (2011). Una visión innovadora de los cursos cero de matemáticas enfocada al grado de Administración y Dirección de Empresas. *Revista d'Innovació Docent Universitària, 4*, 26-40.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* Tesis doctoral, IQS School of Management, Universitat Ramon Llull.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer curso universitario. En Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. & García, F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 757-764). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Les praxéologies comme idiosyncrasies institutionnelles

Corine Castela

LDAR, Université de Rouen, France

Abstract.
Considering that the praxeological model is a key point of ATD, that gives to this theory a specific position within the ideological debates about education, this submission focuses on the notion of institutional legitimation. It aims at highlighting the praxeological diversity in order to favor the dissemination of this model.

Resumen.
Se considera que el modelo praxeológico constituye un concepto clave de la TAD, confiriéndole una posición especifica en los debates ideológicos sobre educación. Por eso, esta presentación propone una reflexión focalizada en la noción de legitimación institucional. Se trata de destacar las diversidades praxeológicas con el proyecto de favorecer la diseminación del empleo del modelo en campos más variados de investigación.

Résumé.
Considérant que le modèle praxéologique est un point fort de la TAD qui lui confère une position particulière au sein des débats idéologiques sur l'éducation, cette présentation propose une réflexion centrée sur la notion de légitimation institutionnelle. Elle vise à exhiber les diversités praxéologiques de façon à favoriser l'usage du modèle dans des champs plus variés.

La définition de l'axe 1 pose la question de l'élargissement du champ des recherches en didactique pour lesquelles la TAD est utilisée. Le texte évoque des domaines donnant lieu à des disciplines scolaires, « depuis la littérature jusqu'aux sciences, en passant par l'art et l'informatique ». S'en tenir là serait limiter l'ambition de la TAD, qui, théorie anthropologique du didactique, considère que le didactique est partout dense dans tous les phénomènes de la vie des savoirs, ou plutôt des praxéologies, dans un monde humain dont l'essence sociale est au fondement de la théorie. Ceci explique qu'elle puisse pénétrer le champ des recherches sur la vulgarisation, la muséographie ou la communication qui s'intéressent à des processus de transmission hors des institutions

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

scolaires. Dans cette perspective, il faut envisager un élargissement du spectre des domaines culturels constitués dont la TAD pourrait outiller la didactique, c'est-à-dire l'étude des phénomènes de transmission et apprentissage. Mais au-delà, c'est le développement culturel humain qui est intrinsèquement didactique, et la TAD peut avoir l'ambition de pénétrer les champs de recherche qui se consacrent à l'étude des processus de production culturelle, de développement des savoirs et praxéologies, recherches en histoire et épistémologie des domaines de référence des disciplines scolaires, et au-delà, recherches en ethnologie. Utilisant une notion très générale d'institution, lui donnant une dimension d'acteur épistémologique dans les travaux sur les processus transpositifs, la TAD peut prendre pour objets d'étude les processus de production et transmission praxéologiques dans une entreprise, une profession ou une ethnie. En cela, elle fournit un cadre particulièrement adapté aux investigations ethnomathématiques. En montrant son intérêt dans de telles recherches, la théorie ferait la preuve de sa dimension véritablement anthropologique, c'est-à-dire sa capacité à explorer les phénomènes spécifiques de l'humain sans leur appliquer des filtres forgés dans une culture particulière.

1. Le modèle praxéologique, une prise de position idéologique

La TAD fournit aux domaines de recherches évoqués précédemment un outil crucial, celui de praxéologie, avec un double postulat dont nous voulons souligner ici la portée. D'une part, il s'agit d'un modèle universel des ressources mises en œuvre par l'être humain pour traiter les problèmes qu'il rencontre, d'autre part, ces ressources ne sont pas pour l'essentiel des productions individuelles, leur production est attribuée en première instance aux institutions. Ce modèle met en avant l'importance de la généricité des tâches et la dimension socioculturelle des ressources utilisées. Il se différencie donc complètement de la notion de compétence (et ses divers avatars, capacité, habiletés) ; celle-ci insiste sur la singularité des situations rencontrées par les individus ou collectifs qui, *in situ* et au fil de l'action, doivent inventer des solutions spécifiques. Ces deux modèles ne sont pas nécessairement contradictoires ; ils peuvent être utilisés de manière complémentaire : la compétence rend compte de la distance entre la généricité des techniques et la singularité de leur mise en œuvre dans des tâches relevant cependant d'un même type. La TAD ne nie pas l'existence d'une telle distance. Néanmoins, pour cette théorie, les objectifs sociaux de développement des compétences d'un individu pour certains types ou genres de tâches présupposent l'intégration de praxéologies socialement développées à l'équipement praxéologique de cet individu. Dans cette perspective, les curriculums ou programmes d'étude doivent reconnaître les organisations praxéologiques dont la transmission est prise comme objectif didactique. Alors que de très nombreux curriculums nationaux sont réécrits en termes de compétences, la condition précédente n'est pas partout réalisée. Au Pérou par exemple, la structuration des plans d'étude repose sur des compétences et capacités de grande généralité. Des objets mathématiques sont mentionnés mais il n'est pratiquement jamais fait référence à des praxéologies les impliquant. Dans ce curriculum, l'accent est mis sur l'inventivité des individus face à des problèmes toujours nouveaux. La théorie de l'apprentissage sous-jacente est celle de l'apprentissage situé, où faire et apprendre sont identifiés. Dans cette perspective, les références aux savoirs sociaux sont évanescentes, sinon pour des savoirs métacognitifs. L'opérationnalisation péruvienne de l'approche de l'éducation par les compétences montre par comparaison combien, à travers le concept de praxéologie, la TAD fait un choix de grande portée au niveau éducatif. Ce choix est une prise de position idéologique qui dépasse le cadre scolaire. L'invasion du système éducatif par le point de vue des compétences est en effet parallèle au développement de son usage (démarche compétence) dans les entreprises, au service de stratégies managériales dont les effets sont étudiés en sociologie du travail : valorisation de l'adaptabilité à des tâches nouvelles au détriment de l'expertise du métier, individualisation des évaluations et mises en concurrence, destruction des collectifs de travail. La notion de compétence est mise au service d'une gestion des travailleurs qui les fragilisent en les dépouillant de leur expertise professionnelle, qui en fait des « apprentis à vie » selon l'expression de D. Linhart[1] (2017, p.20) pour

[1] Danièle Linhart est sociologue, directrice de recherches émérite au CNRS. Elle a publié de nombreux livres dont *La comédie humaine du travail* (2015).

les contraindre à adopter des praxéologies à finalités financières voulues par les directions. Que l'éducation prenne ses distances avec les objectifs de développement de l'équipement praxéologique des étudiants ne peut pas être considéré comme fortuit, c'est la traduction au niveau de l'école d'un choix de société, par rapport auquel la TAD n'est pas neutre. Travailler à développer son usage est un enjeu idéologique et politique.

2. Le caractère institutionnellement relatif des praxéologies

Parmi les objets fondamentaux de la TAD figurent les notions conjointes d'institution et de sujet. Les activités des sujets sont soumises à des contraintes institutionnelles lesquelles influencent nécessairement les praxéologies produites dans ce cadre, cette hypothèse valant pour les quatre composantes. Les praxéologies sont donc relatives à l'institution dans laquelle elles vivent ou pour le moins contiennent une part de spécificité plus ou moins importante. Cette idée est présente dès les premiers travaux d'Y. Chevallard avec l'étude de la transposition didactique (1985), outillée ultérieurement par l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (2002, 2007) qui prend en compte l'influence de différents niveaux d'institutions sur la discipline scolaire et ses organisations praxéologiques. (Chevallard, 1999) étend l'hypothèse de l'existence d'effets transpositifs à l'ensemble des processus de circulations inter-institutionnelles des praxéologies :

> Les conditions imposées par l'écologie de *I* [institution importatrice] font alors que la praxéologie désirée ne pourra y être reproduite à l'identique, mais qu'elle subira, dans ce « transfert », diverses modifications adaptatives : on parlera donc, non de transfert, mais de transposition de *I'* [institution de production] à *I*. (Chevallard 1999, p. 231)

L'auteur de cette présentation s'autorise à renvoyer pour quelques exemples à ses seuls travaux : étude réalisée en collaboration avec A. Romo Vázquez sur la transformation de Laplace et la double transposition opérée pour son enseignement en automatique dans le cadre d'une formation professionnelle (C. Castela & A. Romo Vázquez 2011, Castela 2016, 2017) ; étude réalisée à partir de la recherche de C. Elguero sur les praxéologies des couturières à façon en Argentine (Castela & Elguero 2013).

Mais l'écologie institutionnelle ne se manifeste pas seulement dans les cas de circulation, les praxéologies sont d'emblée marquées par l'institution qui les produit. N'est-ce pas ce qui sous-tend le commentaire suivant de Chevallard sur les deux composantes du *logos* :

> Mais il est sans doute plus important encore de préciser que les notions de technologie et de théorie doivent être entendues en un sens propre à l'institution ou à la personne considérée. Est technologie ce qui, dans une institution ou pour une personne, remplit la fonction technologique […] De même, est théorie ce qui assume, en cette institution ou pour cette personne, une fonction théorique. (Chevallard 2007, p. 714)

Ceci conduit à considérer les praxéologies comme des idiosyncrasies institutionnelles, ce terme d'idiosyncrasie étant emprunté par Chevallard à l'anthropologiste français Marcel Mauss : « I will say that a praxeology is a "social idiosyncrasy", that is, an organised way of doing and thinking contrived in a given society" (2006, p. 23). Dans cette perspective, l'unité minimale fournie par la TAD aux recherches en histoire, épistémologie et ethnologie peut être schématisée de la façon suivante : $[T, \tau, \Theta, \Theta] \leftarrow I$. Ce schéma, présent dans Castela (2016, 2017), ne se limite pas à indexer la praxéologie par l'institution, il introduit comme objets d'étude les processus, représentés par la flèche, par lesquels l'institution produit, légitime et institutionnalise la praxéologie. Sous une forme complexifiée mettant en jeu deux institutions, il est utilisé dans les articles cités précédemment et dans (Castela & Elguero, 2013) pour représenter les effets transpositifs dus à la circulation d'une praxéologie de l'institution qui l'a produite à une institution qui l'utilise. La version la plus récente a la particularité par rapport aux choix antérieurs d'envisager l'existence d'une théorie spécifique de l'institution utilisatrice :

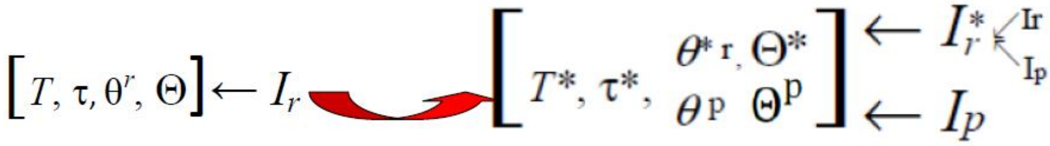


Figure1. De I_r à I_p, le modèle des effets transpositifs (Castela 2017, p. 422)

Nous renvoyons aux articles cités pour l'interprétation de ce schéma. Précisons seulement que l'astérisque représente les transformations apportées aux composantes de la praxéologie initiale.

3. Réflexions sur la notion de légitimation

Nous avons signalé ci-dessus que le modèle d'idiosyncrasie institutionnelle proposé incluait les processus de production, légitimation et institutionnalisation de la praxéologie considérée par l'institution considérée. Dans cette communication, nous présentons la réflexion que nous avons commencée sur la notion de légitimation.

3.1. Où nous conduit l'étymologie ?

L'adjectif 'légitime' vient du latin *legitimus*, dérivé du nom *lex*, la loi. Selon le dictionnaire Gaffiot (édition de 1934), cet adjectif a deux sens : 1. Fixé, établi par la loi, légal ; 2. Qui est dans la règle, conforme aux règles, régulier[2]. Le verbe 'légitimer' a aujourd'hui un premier usage dominant, (a) rendre légitime un enfant naturel. Plus largement et en lien direct avec les sens 1 et 2 de l'adjectif, il signifie (b) faire reconnaître pour authentique et juridique. Mais on l'emploie aussi au sens (c) justifier, rendre excusable (https://fr.wiktionary.org/wiki). Parlant du processus de légitimation impliqué dans le développement praxéologique d'une institution, nous utilisons le sens (b). La définition suivante de la notion de 'Légitimité', issue du *Dictionnaire du droit privé* de S. Braudo & A. Bauman[3] permet de préciser l'extension que nous lui donnons :

> La "Légitimité" est la conformité à un principe supérieur qui dans une société et à un moment donné est considéré comme juste. La notion de légitimité ne recouvre pas celle de légalité qui est plus restreinte et qui caractérise ce qui est seulement conforme à la Loi. La notion de légitimité est contingente de la culture ; la légalité s'apprécie en fonction du droit positif.
>
> (cité sur https://www.dictionnaire-juridique.com/definition/legitimite.php)

Nous considèrerons donc que la légitimation a trait aux processus développés par l'institution pour établir que les composantes de la praxéologie sont conformes à ses normes, terme que l'on pourrait sans

[2] http://www.lexilogos.com/latin/gaffiot.php,

[3] Serge Braudo, Conseiller honoraire à la Cour d'Appel de Versailles, Alexis Bauman, avocat au Barreau de Paris

doute remplacer par ceux d'attentes, de contraintes, gouvernées par le système des besoins objectifs mais aussi des valeurs de l'institution.

3.2. Les normes techniques

L'institution impose pour commencer un certain nombre de normes sur les tâches à accomplir et sur les techniques pour ce faire, ce que nous appelons normes techniques. Les textes qui ont introduit le modèle praxéologique ont de manière constante affirmé le caractère universel de deux de ces exigences, justification et intelligibilité :

> Las «condiciones de vida» de una técnica en una institución pueden ser variadas, pero en todos los casos deberá responder a una restricción que tomaremos como universal, es decir válida para toda institución y toda técnica utilizada en la institución. Consiste en una doble exigencia de justificación e inteligibilidad de la técnica puesta en práctica, exigencia que genera un discurso (logos) sobre la técnica, para justificar su empleo y hacerla « comprensible ». Llamamos a este discurso la tecnología. (M. Bosch 1994, p. 25)

Selon Chevallard (1999, pp. 226-227), justifier la technique consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, rendre intelligible consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi.

Étendons à toute norme technique l'hypothèse selon laquelle lui correspond au sein d'une praxéologie légitimée des éléments de discours technologique. Ceux-ci ont au minimum pour fonction d'exprimer la garantie institutionnelle du fait que la technique satisfait à la norme. On peut donc considérer que les composantes technologiques des praxéologies légitimées par une institution fournissent un accès aux normes techniques de l'institution. Considérons donc sous cet angle la grille des fonctions de la technologie développée par Castela et Romo Vázquez (2011, pp. 10-12) pour analyser le discours relatif à l'organisation praxéologique locale pilotée par la transformation de Laplace dans le cadre d'un enseignement d'automatisme. S'y distinguent les fonctions : Décrire, Valider qui remplace le verbe 'Justifier' des citations précédentes de Bosch et Chevallard, Motiver, c'est-à-dire décrire les objectifs de la technique et de ses gestes, Expliquer (au sens des citations précédentes de comprendre pourquoi la technique est valide), Évaluer et Faciliter. Une septième fonction est apparue dans les thèses de D. Solares (2012) et de O. Covián (2013) qui s'intéressent à des contextes professionnels, elle prend en compte la nécessité de Contrôler l'implémentation par les sujets : même si la technique est reconnue valide, il n'empêche que des erreurs individuelles peuvent en obérer l'effectivité, terme correspondant à l'anglais '*effective*', au sens de ' *Adequate to accomplish a purpose; producing the intended or expected result'* (http://www.insightsquared.com).

Avec les fonctions Valider et Contrôler d'une part, Motiver et Expliquer d'autre part, nous retrouvons les deux types d'attentes vis-à-vis des techniques considérées comme universelles par M. Bosch et Y. Chevallard, respectivement l'effectivité et l'intelligibilité des fins et des causes. A quels besoins répond la description ? Décrire une technique suppose dépersonnalisation, désynchrétisation et décontextualisation (on reconnaîtra les références de (Chevallard, 1985) aux analyses de M. Verret sur les conditions que doit satisfaire un savoir pour être enseigné). Cela suppose également l'élaboration de représentations sémiotiques, *in fine* d'un vocabulaire technique, permettant aux utilisateurs d'échanger sur la technique pendant la mise en œuvre, puis de la commenter en dehors de son implémentation. Ceci contribue d'abord à objectiver la technique pour l'institution, c'est-à-dire la poser comme un objet auquel appliquer les processus d'évaluation de la conformité aux normes conduisant à la légitimation. Même si l'objectivation de la technique peut s'appuyer sur la production d'instruments spécifiques et de dispositifs sociaux, nous ferons l'hypothèse qu'elle passe universellement par des développements discursifs relevant donc de la composante technologique. La description de la technique contribue par ailleurs à ce qui peut constituer une attente institutionnelle, à savoir la possibilité de transmettre cette technique aux sujets de l'institution et éventuellement de la diffuser plus largement.

Considérons maintenant les éléments technologiques rattachés à la fonction Évaluer, catégorie plutôt imprécise mais très instructive pour ce qui nous préoccupe : s'y explicitent en effet certaines attentes institutionnelles par le biais des critères selon lesquels sont évaluées ou comparées les techniques (voir les articles cités précédemment pour des exemples). Nous en distinguerons deux types : d'une part, celles qui relèvent d'une recherche d'efficience, avec des critères pouvant concerner la portée de la technique (quelle est l'étendue du domaine des tâches qu'elle permet de traiter ?), sa rapidité d'exécution et la quantité de ressources utilisées, autrement dit sa rentabilité, sa fiabilité (quelle est le risque de défaillance dans sa mise en œuvre ?) ; d'autre part, celles qui concernent plutôt les utilisateurs, avec des critères portant sur l'ergonomie et la sécurité de la technique. Un jugement de déficit par rapport à une de ces normes peut conduire à des reprises de la technique initiale : ainsi la fonction Contrôler répond à une fiabilité insuffisante, la fonction Faciliter améliore l'ergonomie.

Avec ces dernières catégories d'attentes, nous sortons clairement d'une recherche d'universalité. Il s'agit au contraire de prendre en compte la diversité des normes techniques suivant les institutions. Concernant la transmissibilité, on sait que certaines institutions cultivent l'ésotérisme ; quant à l'efficience et à l'ergonomie, leur inégale valorisation dans les entreprises est une évidence. Ayant ainsi commencé à prendre en compte l'éventail des normes pouvant assujettir les techniques dans la diversité des institutions, évoquons, pour conclure cette partie, la possibilité de critères portant sur l'éthique, l'esthétique, l'équité, la durabilité (*sostenibility*), la liste n'est pas close.

3.3. Évaluation de la conformité aux normes et technologie

La légitimation d'une technique dans une institution suppose que soient menées à bien certaines tâches consistant à vérifier que la technique satisfait (suffisamment) aux normes techniques institutionnelles. Chevallard (1999, pages 226-227) définit la technologie comme « un discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T ». Dans la perspective d'une extension des champs d'utilisation de la TAD, il est important d'examiner cette citation à la loupe. Elle ne dit pas que le processus de validation de la technique est nécessairement de nature purement discursive. On a pu l'interpréter dans ce sens du fait du contexte initial de développement de la TAD, puisque c'est vrai en mathématiques (en tout cas jusqu'à l'apparition des preuves numériques).

Mais, si c'était le cas, le modèle praxéologique serait de portée limitée. Par exemple, il ne pourrait s'appliquer aux sciences expérimentales. Nous interprétons au contraire la citation dans le sens suivant : la fonction minimale de la technologie est de formuler la garantie institutionnelle de l'effectivité de la technique. Ceci est valable pour chacune des normes techniques dans l'institution. La garantie est fondée sur la mise en œuvre des processus (praxéologies), reconnus par l'institution, d'évaluation de la conformité aux normes techniques. Peut-on envisager que le rôle de la technologie soit réduit à cela, c'est-à-dire que, pour satisfaire les exigences d'une norme, une technique n'ait pas besoin d'un développement technologique associé ? Nos considérations précédentes sur le processus d'objectivation conduisent à penser qu'une description est un préalable au processus de légitimation dans son ensemble. Nous avançons également que les attentes d'intelligibilité appellent essentiellement un développement discursif. Mais il est inversement envisageable que la vérification des attentes d'effectivité, d'efficience, d'ergonomie relève plutôt du domaine d'actions auquel appartiennent les tâches et techniques considérées. Encore ne faut-il pas négliger que, quelle que soit la norme en jeu, la garantie institutionnelle exprime un accord social dont il est imprudent d'affirmer qu'il ne passe pas par un processus discursif de construction d'un consensus relatif à la technique, donnant lieu au développement d'un discours partagé (*homologein*) qui nous paraît relever de la composante technologique, voire théorique suivant son niveau de généralité.

On pourrait reprocher à ces propos d'être contradictoires, c'est que nous tentons de prendre en compte la complexité de la question soulevée à propos de la technologie : quel rôle joue-t-elle, suivant les institutions et suivant les normes, au sein des processus d'évaluation de la conformité aux normes techniques ?

3.4. Normes technologiques, place de la théorie : ébauche de réflexion

Les éléments du discours technologique sont des affirmations qui, à leur tour, doivent satisfaire certaines normes institutionnelles, pour commencer qu'elles disent ce que l'institution tient pour la vérité.

L'affirmation de la conformité de la technique aux normes techniques se déduit de la mise en œuvre des praxéologies d'évaluation de cette conformité. Mais, si comme nous l'avons envisagé dans la section précédente, d'autres éléments technologiques se développent parallèlement, leur véracité pour l'institution doit être vérifiée selon d'autres praxéologies. Il en est de même pour les autres normes technologiques, portant par exemple sur la forme du discours, sur son accessibilité à un public donné.

Achevons cette présentation en évoquant la quatrième composante praxéologique, à savoir la théorie. Notre analyse du processus de légitimation d'une technique et de sa technologie nous a conduits à considérer l'existence de praxéologies institutionnelles d'évaluation de la conformité aux normes techniques et technologiques. En parlant de praxéologies, nous attribuons une certaine généralité aux techniques d'évaluation mises en œuvre. La technologie de ces praxéologies exprime la position de l'institution vis-à-vis de ces techniques, reconnues comme établissant la conformité aux normes. On peut donc la considérer comme relevant de la composante théorique des praxéologies qui sont évaluées.

4. Conclusion

Dans la mesure où nous considérons que le modèle praxéologique est un point fort de la TAD, lui conférant une position particulière aux seins des débats idéologiques sur l'éducation, nous avons proposé dans cette présentation une réflexion prenant en compte les diversités institutionnelles des praxéologies. Ce travail nous paraît de nature à montrer la généralité du modèle, très au-delà des mathématiques et de leur didactique.

Inversement, nous pensons que la prise en compte de la multiplicité des normes qui dans une institution donnée régissent les techniques est un point d'appui pour générer des PER, mathématiques ou non, de grande portée. Inventer une technique effective pour certaines tâches d'un type, accéder à une intelligibilité de cette technique, ne sont en effet souvent que les premiers pas d'un processus au cours duquel les attentes institutionnelles vont se faire plus exigeantes, soulevant de nouvelles questions et donnant ainsi lieu à de nouveaux développements praxéologiques. Le travail de T. Sierra et J. Gascón (à paraître) sur les systèmes numériques en fournit une magnifique illustration.

Enfin, nous insisterons sur le fait que les normes techniques et technologiques ainsi que les praxéologies d'évaluation de la conformité à ces normes constituent selon nous des objets d'étude pour l'épistémologie, et l'histoire des cultures, mais aussi pour l'ethnologie et l'anthropologie des institutions. Il en est de même du processus d'institutionnalisation non traité dans cette présentation.

Références

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis de doctorado. Universitat Autonóma de Barcelona.

Castela, C. (2016). Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing". *Revista Educación Matemática 28(2)*, 9-29.

Castela, C. (2017). When praxeologies move from an institution to another one: an epistemological approach of boundary crossing. In Göller r, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H-G. (Eds.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings*, pp. 418-425. Kassel, Germany: Universitätsbibliothek Kassel.
https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121/5/khdm_report_17_05.pdf

Castela, C., Elguero, C. (2013). Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie. Recherches en Didactique des Mathématiques 33 (2), 79-130.

Castela, C. & Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage. Rééd. augmentée (1991).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation. In J-L. Dorier & Al. (Eds) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques – Corps, 21-30 Août 2001*- (pp. 3-22 et pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics* Education (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruiz-Higueras & Al. (Eds) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) (pp. 705-746). Jaén: publicaciones de la Universidad de Jaén.

Linhart, D. (2017). Imaginer un salariat sans subordination. L'uberisation du code du travail n'est pas une fatalité. *Le Monde Diplomatique, Juillet 2017,* pp 20-21.

Covián Chávez, O.N. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción*. Tesis de doctorado en matemática educativa. Ciudad de México: CINVESTAV-IPN.

Sierra, T. A. & Gascón, J. (à paraître). Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Solares, D. (2012). *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes*. Tesis doctoral. México: DIE-CINVESTAV.

Praxeologies du professeur : analyse comparative du manuel scolaire dans l'enseignement des équations polynomiales du premier degré

Edelweis Jose Tavares Barbosa
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE (CAA), Brasil
Anna Paula Avelar Brito Lima
Universidade Federal de Rural de Pernambuco, UFRPE, Brasil (Professeure Tutrice)

Abstract. The aim of this article was to analyze, comparatively, praxeologies, in didactic books and praxeologies carried out by the teacher, concerning the teaching of polynomial equations of the first degree, investigating the relations of conformity between them. This study is based on the view of the Anthropological Theory of Didactics (ATD), proposed by Yves Chevallard and his collaborators (1999, 2002, 2009, 2010). The methodology consisted of a qualitative ethnographic approach, in which the mathematical and didactic organizations of three teachers were compared with those of their reference books. The results indicate that there is a conformity between the praxeologies to be taught, proposed by the authors of the textbooks, and the praxeologies effectively taught by the teachers in the classroom. Teachers were the organizers of the tasks, techniques and technology of increasing complexity (FONSECA, 2004) that were made routine and problematized in the classroom. The T1 $ax + b = c$ task was the common point among the three teachers, although teachers two and three have worked with more tasks $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$.

Resumen. El objetivo de este artículo fue analizar, comparativamente, las praxeologias, en libros didácticos y las praxeologias efectivas por los profesores en su práctica docente, referentes a la enseñanza de ecuaciones poligonales del primer grado, investigando las relaciones de conformidad entre ellos. La realización de este estudio está fundamentada en la óptica de la Teoría Antropológica del Didáctico (TAD), propuesta por Yves Chevallard y sus colaboradores (1999, 2002, 2009, 2010). La metodología se constituyó en un abordaje cualitativo de cuño etnográfico, en el que se analizaron las organizaciones matemáticas y didácticas de tres profesores comparándolas con las de los libros de referencia. Los resultados indican que existe cierta conformidad entre las praxeologias a ser enseñadas, propuestas por los autores de los libros didácticos y las praxeologias efectivamente enseñadas por los profesores en el aula. Los profesores fueron los organizadores de las tareas, técnicas y tecnología de creciente complejidad (FONSECA, 2004) que se hicieron rutinarias y problemáticas en el aula. La resolución de la ecuación polinomial del primer grado del tipo $ax + b = c$ fue el punto común entre los tres profesores, aunque los otros dos profesores trabajaron con la ecuación del tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$.

Résumé. Le but de cet article est d'analyser, de manière comparative, les livres didactiques et les praxéologies réalisées par les enseignants dans leur pratique pédagogique, concernant l'enseignement des équations polynomiales du premier degré, en étudiant les relations de conformité entre elles. Cette étude est basée sur la vision de la théorie anthropologique didactique (TAD), proposée par Yves Chevallard et ses collaborateurs (1999, 2002, 2009, 2010). La méthodologie était basée sur une approche ethnographique qualitative, dans laquelle les organisations mathématiques et didactiques de trois enseignants ont été analysées, en les comparant à celles des livres de référence. Les résultats indiquent qu'il existe une certaine conformité entre les praxéologies à enseigner, proposées par les auteurs des manuels scolaires et les praxéologies effectivement enseignées par les professeurs en classe. Les enseignants ont été les organisateurs des tâches, des techniques et de la technologie de complexité croissante (FONSECA, 2004) qui ont été rendus de routine et problématisés dans la salle de classe. La résolution de l'équation polynomiale du premier degré du type $ax + b = c$ était le point

commun parmi les trois enseignants, bien que les deux autres enseignants travaillaient avec l'équation de type $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$.

1. Introduction

Cet article fait partie d'une thèse de doctorat qui a discuté du problème de l'enseignement de l'algèbre scolaire dont l'objectif principal était d'analyser les praxéologies mathématiques proposées dans trois livres didactiques sur la résolution des équations polynomiales du premier degré par rapport aux praxéologies réalisées par trois enseignants dans la salle de classe selon la théorie anthropologique didactique (TAD). L'algèbre scolaire ne se limite pas à l'enseignement et à l'apprentissage d'un ensemble de règles et de techniques, mais cela devient une manière de penser et de raisonner, dans lequel les élèves généralisent, modèlent et analysent les situations mathématiques (KIERAN, 2007).

2. Théorie didactique anthropologique (TAD)

Selon Chevallard (1999), cette théorie étudie l'homme devant les connaissances mathématiques, et plus particulièrement, dans des situations mathématiques. L'une des raisons de l'utilisation du terme «anthropologique» est que le TAD situe l'activité mathématique et, par conséquent, l'étude des mathématiques dans un ensemble d'activités humaines et d'institutions sociales.

Pour Fonseca (2004), la description des organisations mathématiques en niveaux (pratique, technique, technologique, théorique) est suffisante (initialement) pour modéliser l'activité mathématique institutionnelle, est l'un des postulats du TAD qui doit être testé empiriquement. Lors de l'organisation des tâches, il incombe à l'enseignant de choisir les techniques et les technologies appropriées, c'est-à-dire que le rôle central de l'enseignant est d'organiser le travail de l'élève, tandis que l'élève doit accepter le professeur comme aide à l'étude.

3. Processus méthodologique

La méthodologie était une approche ethnographique qualitative, composée par la caractérisation, l'analyse et la comparaison des praxéologies mathématiques et didactiques existantes sur l'enseignement des équations du premier degré, constituées de trois moments. Le premier moment est la modélisation a priori des praxéologies mathématiques spécifiques existant autour de la résolution des équations de premier degré, au moins en termes de sous-types de tâches, de techniques et de technologies. Le deuxième moment consistait à analyser les praxéologies à enseigner (prédites) dans trois manuels.

3.1. Modélisation a priori

Chevallard (1994) considère/classifie les procédures de résolution des équations de premier degré en deux catégories: (1) équations de type $ax + b = c$, qui peuvent être résolues par des procédures arithmétiques et (2) équations du type $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$, qui ne peuvent pas être résolues par des procédures pour soutenir, plus précisément, les opérations arithmétiques. Dans cette définition, x c'est l'incognito et avec $a_1 \neq 0$.

Pourtant, les équations polynomiales du premier degré ne sont pas toujours écrites sous la forme simplifiée. Souvent dans une activité, ils apparaissent sous différentes formes, parmi lesquels nous mettons en évidence deux autres catégories: les équations des types $A(x) = c$ e

$A_1(x) = A_2(x)$ et, $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ où e sont des expressions polynomiales, dans la variable x qui n'a pas encore été réduite à la forme canonique, $ax+b$, e $a,b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, mais qui peut être réduit à cette forme par le développement et la réduction.

4. Principaux résultats

La professeure (P_1) a choisi de travailler avec T_1-tasks $ax + b = c$ $(2x + 3 = 9)$ et axé sur deux techniques: changer le membre, inverser le signal et passer le nombre à la seconde membre avec un signal commuté et effectuer l'opération arithmétique.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons une comparaison entre le manuel Time of Mathematics que l'enseignant a utilisé dans la salle de classe pour constituer sa praxéologie mathématique et les tâches effectivement élaborées.

Types de tâches	**Tâches suggérées dans Manuel**	**%**	**Tâches proposées par professeur**	**%**
T_1	12	32	38	100
T_2	04	10	0	0
T_3	06	16	0	0
T_4	16	42	0	0
Total	38	100	38	100

Tableau 1 : Répartition des types de tâches liées à l'équation dans les classes de P1 et par rapport à celles suggérées dans le manuel

Selon le tableau décrit ci-dessus, le nombre de tâches résolues, représentant le «topos» de l'enseignant, nous permet de décrire que, dans le cas de ce manuel, les auteurs privilégient les tâches T_4 (42% des tâches à résoudre). Cependant, lorsque nous avons suivi la séquence des cours de l'enseignant, nous avons remarqué que: P1 axé sur le travail en classe les tâches du groupe un (T_1), totalisant 100%.

L'enseignant (P2) a choisi collection Mathématiques. Les tâches proposées par l'auteur de la collection étaient les travaux en classe. En ce qui concerne les techniques, P2 a diversifié les tâches. Dans le tableau ci-dessous, nous avons fait une comparaison entre les tâches et les techniques proposées par le manuel (mathématiques) et les tâches et techniques effectivement travaillées par l'enseignant en classe.

Types de tâches	**Tâches suggérées dans Manuel**	**%**	**Tâches proposées par professeur**	**%**
T_1	52	37	11	46
T_2	12	9	01	4
T_3	10	7	10	42
T_4	65	47	02	8
Total	139	100	24	100

Tableau 2 : Répartition des types de tâches liées à l'équation dans la classe de P2 et comparaison avec le manuel

Selon le tableau décrit ci-dessus, le nombre de tâches résolues, représentant le «topos» de l'enseignant, nous permet de décrire que, dans le cas de ce manuel, les auteurs privilégient les tâches T_4 (47% des tâches à résoudre). De cette façon, lorsque nous suivons la séquence des cours de l'enseignant, nous nous rendons compte que: l'enseignant a travaillé les quatre types de tâches dans la classe sur les équations polynomiales de premier degré qui sont résolues par des procédures arithmétiques (T_1 et T_2) et résolues par des moyens algébriques (T_3 e T_4) et qui exigent une plus grande mobilisation des termes et des coefficients pour la résolution des équations.

Par rapport au manuel adopté par P2, on peut voir qu'il a proposé 139 tâches qui ont priorisé les types T_1 et T_4 (84%) plutôt que les types T_2 et T_3 (16%). L'enseignant, dans ses cours, a choisi 24 tâches, ce qui représente 17% par rapport aux tâches proposées par l'auteur. De ces tâches prioritaires du type T_1 et T_3 (88%), qui se distingue de ce qui a été suggéré par le manuel. L'enseignant (P3) a concentré ses activités sur les tâches de type T_1 et T_2 et n'a pas travaillé sur les tâches T_3 et T_4.

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons une comparaison entre le didactique (Nouvelle pratique en mathématiques)que l'enseignant utilise dans la salle de classe et les tâches techniques effectivement élaborées en classe.

Types de tâches	**Tâches suggérées dans Manuel**	**%**	**Tâches proposées par professeur**	**%**
T_1	47	44	10	67
T_2	22	20	03	20
T_3	10	9	-	-
T_4	29	27	2	13
Total	108	100	15	100

Tableau 3 : Répartition des types de tâches liées à l'équation dans les classes de P3 et comparaison avec le manuel

Selon le tableau décrit ci-dessus, le nombre de tâches résolues, qui représentent le «topos» de l'enseignant, nous permet de décrire que, dans le cas de ce manuel, les auteurs privilégient les tâches de type T_1 (44% des tâches à résoudre). Ainsi, lorsque nous suivons la séquence des cours de l'enseignant, nous nous rendons compte que: d'abord, le professeur a concentré ses cours sur les tâches T_1 (67% des tâches résolues dans la classe), sont résolus par des procédures arithmétiques (T_1 et T_2) et résolubles Par des moyens algébriques (T_4).

5. Considérations finales

Les manuels analysés présentent différentes propositions pour l'enseignement des équations polynomiales du premier par rapport à la tâche T_1 $(2x + 8 = 17)$ et la technique de transposition des termes et des coefficients. Dans les livres Mathématiques et Mathématiques Pratiques, les auteurs proposent la même séquence pour cette tâche, cependant, dans le livre

Time of Mathematics, l'auteur propose le travail avec les techniques de neutralisation des termes et des coefficients et transpose les termes et les coefficients (méthode pratique).

Enfin, nous analysons la trajectoire de la connaissance pour enseigner aux connaissances effectivement enseignées en classe. Nous avons constaté que l'enseignant était le médiateur de ce processus et, malgré les documents officiels ou d'autres moyens didactiques, le professeur choisit de suivre en partie ce que les auteurs de manuels scolaires proposent, c'est-à-dire que le manuel continue d'être formidable. Influence dans la classe. Bien que même l'enseignant choisissant votre cahier de référence, fera des adaptations dans le processus d'enseignement dans votre classe.

6. Références

ANDRINI, A. *Praticando Matemática*, 7 / Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. 3ª Ed. Renovada- São Paulo: Editora do Brasil, 2012 (Coleção Praticando Matemática)

BARBOSA, E. J.T, *Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau*. Tese de doutorado, UFRPE. 2017.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In : *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, pp. 221-266.

________. *Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college*. Deuxieme partie. Petit x n° 19, IREM de Grenoble, pp.43-75, 1989.

FONSECA, C. (2004), *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria.* Tesis Doctoral.Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo.

IMENES, L. M. *Matemática*. Imenes & Lellis. Obra em 4 v. para alunos de 6° ao 9° ano. São Paulo: Moderna, 1ª ed. 2010.

KIERAN, C. Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K. Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.

NAME, M. A. *Tempo de Matemática*, 7: ensino fundamental, 2 ed.- São Paulo: Editora do Brasil, 2010

Relations entre deux institutions noosphériennes : effets d'un système d'évaluation de manuels didactiques

Danielly Kaspary

Univ. Fédérale du Mato Grosso do Sul, UFMS, PPGEdumat, Campo Grande, Brésil
Univ. Grenoble Alpes, UGA, Laboratoire Informatique de Grenoble - LIG, France

Abstract.
This text is a brief presentation of a doctoral research project in development. Inspired by the notion of subjection to institutional relations, it seeks to understand relations between two institutions that are part of the noosphere, considering that one institution is a constraint of the other. The analyzed context is the Brazilian system of evaluation of textbooks. To carry out this work, we also refer to the T4TEL model developed within the anthropological theory of the didactic.

Resumen.
Este texto es una breve presentación de un proyecto de investigación doctoral en desarrollo. Inspirado en la noción de sujeción a las relaciones institucionales, se busca entender las relaciones entre dos instituciones que forman parte de la noosfera, considerando una institución como restricción de la otra. El contexto analizado es el del sistema de evaluación de los libros didácticos brasileños. Para llevar a cabo este trabajo también nos referimos al modelo T4TEL desarrollado dentro de la teoría antropológica de lo didáctico.

Résumé.
Ce texte constitue une brève présentation d'une recherche de doctorat encore en phase de développement. Inspirés de la notion d'assujettissement aux rapports institutionnels, on cherche à comprendre des relations entre deux institutions qui font partie de la noosphère, en considérant une institution comme contrainte de l'autre. Le contexte analysé est celui du système d'évaluation de manuels didactiques brésiliens. Pour mener ce travail nous nous référons aussi au modèle T4TEL développé au sein de la théorie anthropologique du didactique.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

1. La problématique

Le manuel scolaire a une place importante - ou du moins non négligeable - dans différents systèmes éducatifs. Parfois, il est la principale ressource des professeurs et des élèves pour enseigner et apprendre, comme c'est le cas du Brésil. Mais, pour qu'il puisse exister, il est subordonné à certaines conditions et contraintes. On peut considérer le manuel comme un résultat des interprétations des auteurs par rapport aux programmes et *ce qui disent* les autres institutions *noosphériennes* (Chevallard, 1985, 1992 ; Chaachoua et Comiti, 2010).

Les conditions et contraintes de viabilité d'un manuel ne sont pas les mêmes d'un pays à autre. Par exemple, en France la régulation se fait par les usagers, à savoir les enseignants ; au Brésil, cette régulation se fait à travers un programme d'évaluation national. Notre recherche porte sur l'étude du cas brésilien.

Les politiques publiques sur les manuels scolaires sont une partie importante de l'histoire de l'éducation brésilienne. En 1929 l'État a mis en place le Programme National du Manuel Didactique - PNLD[1], une institution officielle et spécifique pour légiférer les politiques liées à cette ressource - l'achat, l'utilisation et la distribution. En 1994 arrive la première évaluation des manuels utilisés par les écoles publiques du pays. Cette évaluation a révélé une situation alarmante et a montré le besoin de changements de ces manuels, un mouvement qui est toujours d'actualité. Ainsi, la qualité des manuels scolaires est devenue un point de débat politique. Les manuels sont soumis à des évaluations périodiques dont les critères changent dans le temps : seulement ceux qui ont été approuvés peuvent être achetés (et utilisés) par les écoles publiques du pays.

Dans cette recherche notre objectif principal est d'étudier les effets de ce système d'évaluation sur les manuels, spécifiquement en ce qui concerne les savoirs mathématiques et les aspects didactiques.

Dans notre travail nous nous limitons au champ additif au niveau de l'école primaire où l'étude des opérations d'addition et de soustraction est un enjeu important d'apprentissage.

Pour notre étude nous mobilisons différents concepts de la théorie anthropologique du didactique.

2. Une relecture du problème d'un point de vue de la TAD

On considère le manuel et le PNLD comme deux institutions qui font partie de la noosphère, I_M et I_{PNLD}. Ces deux institutions noosphériennes expriment chacune à sa manière *les rapports attendus* d'un élève aux objets de savoirs. I_M met en place des organisations mathématiques ; de même I_{PNLD}, à travers les résultats des évaluations et les recommandations sur les objets qui peuvent vivre dans I_M et comment ils doivent y vivre. Ainsi, les rapports attendus par I_M sont *assujettis* aux rapports attendus par I_{PNLD}.

En TAD l'assujettissement est compris comme la quête de la conformité des deux rapports : le rapport personnel d'un individu x à un objet *o*, $R(x, o)$, et le rapport institutionnel de ce qui est attendu d'un sujet de I, en une certaine position, à l'objet o, $R_I(p, o)$. L'assujettissement entre ces deux rapports est représenté par $R(x, o) \simeq R_I(p, o)$.

> En devenant sujet de *I* en position *p*, un individu *x*, qui est toujours déjà une personne dotée d'un certain univers cognitif *U*(*x*), s'assujettit aux rapports *institutionnels* $R_I(p, o)$, qui vont remodeler ses rapports personnels : si *o* existe pour les sujets de *I* en position *p*, le rapport personnel de *x* à *o*, $R(x, o)$, tendra à

[1] Au début son nom était Institute Nationale du Livre.

ressembler au rapport institutionnel $R_I(p, o)$, à moins que *x* ne se révèle être, à cet égard, un *mauvais sujet* de *I*. D'une manière générale, nos rapports « personnels » sont ainsi le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents. (Chevallard, 2003, p. 83)

Il s'agit de l'assujettissement d'un individu à une institution. Mais, dans notre cas, le sujet élève ne vit que dans des conditions hypothétiques, soit pour l'évaluateur des manuels, soit pour l'auteur du manuel. De plus, le sujet élève est pris en compte dans le processus transpositif. D'où le besoin d'introduire une relation d'une autre nature : rapport attendu par une institution dans le processus transpositif « RaI(p, o) ».

Dans ce sens, on peut relire la situation de la façon suivante :

Soit,

$\boldsymbol{Ra_{I_n}(p, o)}$: Rapport de *p* à *o* attendu dans le processus transpositif $\{I_2 \rightarrow (I_3 \rightarrow I_4)\}$ par l' I_n, où $I_n \subset I_2$.

$\mathbf{I_M}$: Manuel Didactique.

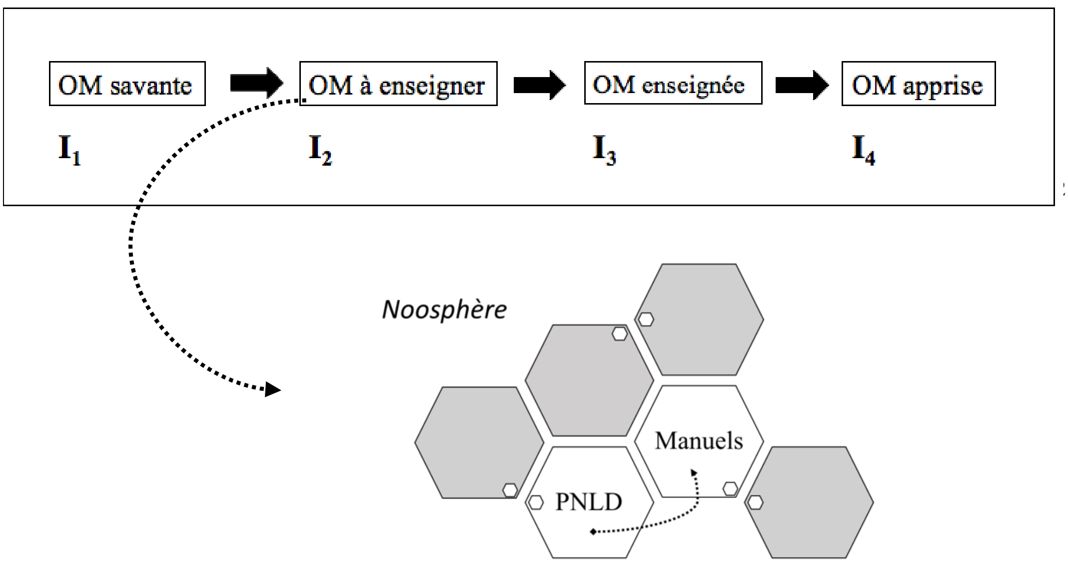
$\mathbf{I_{PNLD}}$: Programme National du Manuel Didactique (Système d'évaluation).

o : est tout ce qui peut être évalué dans I_M comme adéquat ou pas par I_{PNLD} – pour nous il s'agit d'objets qui concernent le champ additif.

p : élève hypothétique de l'école primaire.

De façon générale, au Brésil un manuel peut faire partie du système éducatif publique si $Ra_{I_M}(p, o) \cong Ra_{I_{PNLD}}(p, o)$

Sachant que,



$$\boxed{I_M \subset \text{Noosphère} \Leftrightarrow I_M \text{ est une bonne institution pour } I_{PNLD} \Leftrightarrow RaI_M(p, o) \cong RaI_{PNLD}(p, o)}$$

Figure 1. Schéma de la problématique de la thèse

[2] « Dans ce schéma, I1 est l'institution productrice du savoir mathématique, I2 la noosphère, I3 l'institution scolaire et I4 la communauté d'étude protagoniste du processus didactique » (Bosch & Gascón, 2005, p. 116)

Comme indiqué plus haut, I_{PNLD}[3] gère les rapports aux différents *objets* qui peuvent vivre dans I_M. Autrement dit, pour pouvoir être utilisés par les écoles publiques, I_M doit être en conformité avec les rapports attendus par I_{PNLD}. La quête pour cette conformité dessine certaines conditions et contraintes qui gouvernent aussi la vie des objets qui vivent en I_3 et I_4.

Dans la suite nous présentons des choix méthodologiques pour étudier ce phénomène didactique, en cherchant à répondre la question *: Comment décrire les rapports attendus de I_M et de I_{PNLD} ? Comment mettre en évidence les effets de I_{PNLD} sur I_M ?*

3. Une esquisse de la méthodologie d'étude

Notre grand défi méthodologique est de pouvoir confronter *les rapports attendus de* deux institutions noosphériennes qui ne s'expriment pas de la même façon.

Dans un premier temps nous construisons un modèle épistémologique de référence sur le champ additif à partir des travaux existants. Celui-ci ne sera pas décrit de façon exhaustive mais sur la base de deux notions : générateurs de type de tâches et de variables.

Chaachoua et Bessot (2016), au sein du modèle T4TEL[4], proposent d'introduire dans le modèle praxéologique la notion de *variable*. Cette notion nous donne une manière particulière pour décrire notre modèle de référence, mais le plus intéressant pour nous est que cette notion nous permet de révéler certains conditions et contraintes « sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement » (p. 08) à partir de l'identification des valeurs qu'une variable peut prendre. Les points de vue épistémologique et didactique sont pris en compte dans cette identification.

De manière sommaire[5], sans laisser de côté les notions de base de la TAD, dans T4TEL les types de tâches proviennent d'un générateur (GT) par instanciation des valeurs d'un système de variables :

GT : [Verbe, Complément, Système de variables]

Les variables permettent de mettre en évidence des relations intrinsèques entre les types de tâches et les techniques, qui sont, à leur tour, décrites par un ensemble de types de tâches *{(Ti)i}*.

Notre *unité d'analyse*[6] consiste, alors, à déterminer les GT – et par conséquence les variables et leurs valeurs – qu'il *convient*[7] de prendre en compte pour *approcher* l'objet « champ additif ». *Cela consiste dans une première étape à étudier le phénomène en jeu.*

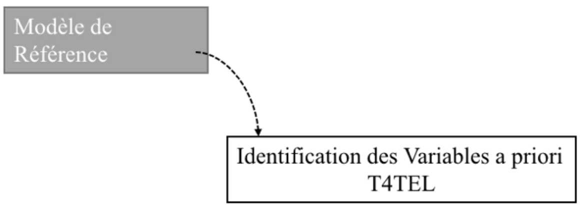


Figure 2. Première étape de la méthodologie

[3] Bien entendu l'institution PNLD est aussi influencée et assujettie aux autres institutions noosphériennes.

[4] T4TEL : *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* pour Technology Enhanced Learning.

[5] Pour bien comprendre l'essence de cette modélisation il faut lire Chaachoua et Bessot (2016).

[6] Du point de vue proposé par Bosch et Gáscon (2005) pour une Organisation Mathématique de référence.

[7] La *convenance* est ce qu'on utilise pour justifier les frontières qui limitent ce qu'on juge, ou pas, nécessaire pour répondre notre problème ; ce qui repose surtout sur la sensibilité du chercheur pour traiter l'objectif de sa recherche et sur la littérature employée à ce moment-là.

Munis de notre modèle de référence, on procède à l'analyse de I_{PNLD}. On a accès aux *rapports attendus* par I_{PNLD} dans les documents officiels publiés par cette institution, où on trouve les critères et les résultats des évaluations et l'analyse de chaque manuel approuvé. On produira une interprétation des discours présents dans I_{PNLD} liés à l'objet « champ additif » à travers des variables identifiées - ce travail peut à son tour nous indiquer d'autres variables que nous n'avons pas considérées *a priori*. On formulera, alors, sous forme d'hypothèses de recherche des corrélations entre conditions/contraintes et variables pour décrire les rapports attendus par cette institution. Cette analyse permet d'identifier les possibles impacts de I_{PNLD} sur I_M.

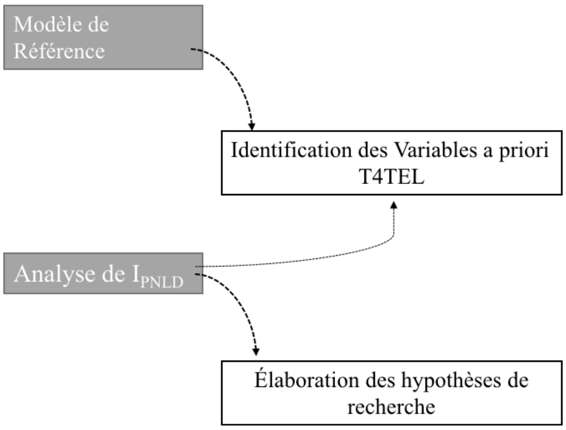


Figure 3. Deuxième étape de la méthodologie

Ensuite on mettra à l'épreuve ces hypothèses de recherche par l'analyse des manuels approuvés par I_{PNLD} en cherchant les changements praxéologiques autour des variables.

En résumé, on a donc :

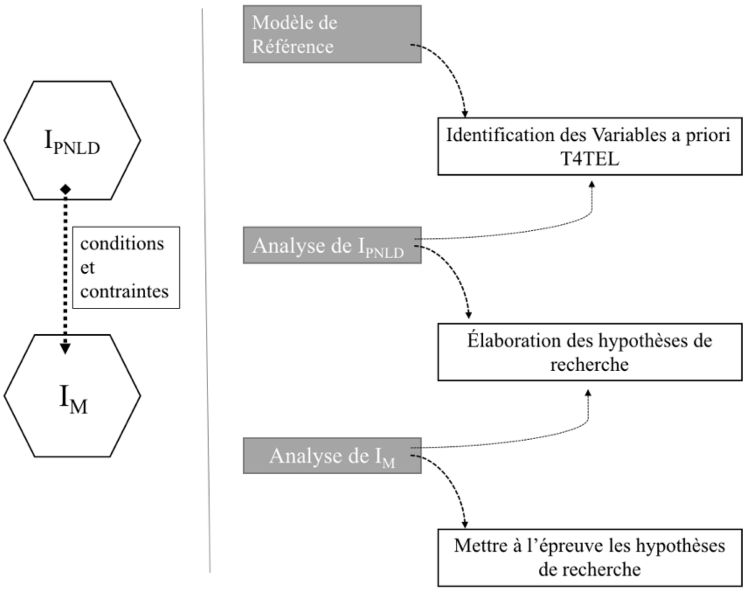


Figure 4. Schéma de la méthodologie

Cette méthodologie nous permettra de mettre en évidence l'évolution des manuels au cours des vingt années d'évaluation par rapport aux variables retenues et leurs valeurs. En particulier, elle nous permettra d'identifier les variables qui ont disparu, de nouvelles variables et de nouvelles valeurs, mais aussi l'importance donnée à certaines variables au fil du temps. Ainsi, la mise à l'épreuve de nos hypothèses permettra de mettre en évidence l'influence de I_{PNLD} sur I_M.

Bibliographie

Bosch, M. & Gáscon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.), Balises en Didactique des Mathématiques, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage : Grenoble.

Chaachoua, H., Bessot A. (2016) (à paraître) Introduction de la notion de variable dans le modele praxéologique. Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique. Castro-Urdiales, Espagne.

Chaachoua, H., Comiti C. (2010) L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique, ACTES CITAD2, p. 771-789.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par un approche anthropologiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 12/1, 83-121.

Chevallard, Y. (2003). Rapport au savoir et didactiques, Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), Éditions Fabert, Paris, p. 81-104.

Cognición en la teoría antropológica de lo didáctico: un estudio sobre la enseñanza de probabilidad en la licenciatura en matemáticas

Cavalcante, José Luiz

PPGEC-UFRPE-UEPB, Universidade Estadual de Paraíba, Brasil

Brito Lima, Anna Paula A.; Andrade, Vladimir L. V. X.

PPGEC-UFRPE, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil

Abstract. The objective of our doctoral research is to analyze the set of conditions and restrictions that are manifested in the functioning of the didactic system (DS) established around the teaching of Probability in the Mathematics Degree, and how this set acts on the relational change of the subjects involved with The object of knowledge into play. From the ethnography of a subject of Introduction to Probability in the Mathematics Degree and the analysis of the conditions and restrictions for the functioning of the DS that forms there, we discuss the potential of ATD to deal not only with the epistemological dimension of didactic phenomena but also the cognitive dimension. We assume cognition as a phenomenon that emerges in the practices of social subjects (Lave & Wengel, 1991). Although the focus of the ATD is not exactly that, according to Chevallard (1992, 1996, 1999), we hope to bring important reflections on the potentialities of theory to think about cognition and on the teaching of Probability in Teacher Training.

Résumé. Le but de notre recherche doctorale est d'analyser l'ensemble des conditions et restrictions qui se manifestent dans le fonctionnement du système didactique (SD) mis en place autour de l'enseignement en probabilités en licence de Mathématiques, et comment ceux-ci agissent sur le changement relationnel des sujets impliqués avec l'objet de savoir en jeu. Partant de l'ethnographie d'un cours d'Introduction aux Probabilités en Licences de Mathématiques ainsi que de l'analyse des conditions et des restrictions au fonctionnement du SD formé, nous discutons du potentiel de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) non seulement pour traiter la dimension épistémologique des phénomènes éducatifs, mais aussi leur dimension cognitive. Nous considérons la cognition comme un phénomène émergent dans les pratiques sociales des sujets (Lave & Wengel, 1991). Bien que l'objectif de la TAD n'est pas exactement cela, de la même façon que Chevallard (1992, 1996, 1999), nous espérons apporter des réflexions importantes sur le potentiel de cette théorie afin de penser la cognition ainsi que sur l'enseignement des probabilités dans la formation du corps enseignant.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. Introducción

Escrito para la presentación en el seminario de doctorandos, el presente texto discute algunos aspectos de nuestra investigación, que está desarrollándose. Al proponer una investigación de la dimensión cognitiva a partir de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), comprendemos que sus herramientas teóricas nos suministran elementos para discutir el fenómeno del aprendizaje en una dimensión epistemológica, además de psicológica.

La enseñanza de probabilidad ha sido tema de intenso debate en el ámbito internacional (Borba, Monteiro, Guimarães, Coutinho & Kataoka, 2011). No obstante, todavía hay cuestiones en abierto, especialmente con respecto a la formación de profesores (Chevallard & Wozniac, 2011; Lopes, 2008).

Nuestro interés es mirar la dinámica de las relaciones de sujetos que participan del sistema didáctico (SD) que se forma en torno a la enseñanza de probabilidad en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Lopes (2008) destaca que, en Brasil, las Licenciaturas en Matemáticas, respecto a la probabilidad, dan énfasis al enfoque clásico-teórico. Esa limitación puede ser uno de los factores que contribuyen para el establecimiento de relaciones confusas con el objeto probabilidad, por parte de los futuros profesores, luego, varias cuestiones surgen como: ¿el SD en torno al saber probabilidad en la licenciatura en Matemáticas permite qué tipo de cambios en R(X,O) para sus sujetos? ¿La infraestructura epistemológica de ese SD interactúa de qué forma en esos cambios? ¿Cuáles son las posiciones asumidas por los sujetos en ese SD? ¿Esos aprendizajes (cambios relacionales) reflejan las demandas para la enseñanza de probabilidad en la educación básica?

Sintetizamos esas preguntas en la siguiente cuestión de investigación: ¿es posible identificar, a través del análisis del funcionamiento del SD, establecido en torno de la enseñanza de probabilidad para futuros profesores de Matemáticas, elementos que caractericen cambios en sus relaciones en una dimensión cognitiva del aprendizaje?

Nuestro objetivo central es analizar el conjunto de condiciones y restricciones que se manifiestan en el funcionamiento del SD establecido en torno a la enseñanza de probabilidad en la licenciatura en Matemáticas, y su papel en el cambio relacional de los sujetos involucrados con el objeto de saber en cuestión.

Comprendemos que la cognición es un fenómeno relacional que se revela en las prácticas colectivas, situado en el contexto institucional (Lave, 1988). Concebimos todavía, que el sujeto que se somete al aprendizaje y uso de praxeologías en el interior de una institución es también un sujeto psicológico (Mauss, 1935, 2003), y por fin, reconocemos la importancia de las instituciones en constitución de la cognición de sus sujetos (Douglas, 1986, 2011).

Ese posicionamiento, en nuestro entendimiento, corrobora la mirada antropológica y las dimensiones epistemológicas de la TAD. Al mirar lo didáctico y las prácticas institucionales, la TAD saca el foco del individuo y pasa a mirar las prácticas colectivas manifestadas en el seno de las instituciones, en torno del saber en cuestión. (Bosch & Chevallard, 1999).

Asumimos que los procesos de sujeción institucional y la cognición mantienen estrecha relación con las prácticas de los sujetos de la institución. La identificación de esa problemática es una de las facetas explotadas en otros trabajos, en términos de praxeologías personales y praxeologías en acto conforme (Chaachoua, 2011; Croset, 2009).

2. Aspectos metodológicos

Para el análisis del funcionamiento del SD realizaremos la observación participante, conforme André (2007). Además de la observación, iremos complementar el análisis del funcionamiento del SD con entrevistas, cuestionarios y análisis documental para identificar las relaciones oficiales de la institución formadora con los objetos de saber que involucran la probabilidad, a fin de contextualizar las experiencias vividas por los sujetos en la realidad institucional.

Los sujetos son los participantes directos en el SD estudiado, en un curso de Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública de Brasil, en la disciplina de Introducción a la Probabilidad. El estudio comprende tres etapas: 1. Estudios teóricos sobre la TAD, su dimensión epistemológica y relaciones con la cognición en una perspectiva antropológica (Lave, 1988); 2. Aplicación de estudio piloto; 3. Análisis de los datos.

Realizamos, hasta ahora, dos estudios exploratorios, además del diseño y aplicación de la primera colecta de datos empíricos. En el primer estudio, hicimos una profundización teórica de los textos de Douglas (1986; 2007) y Mauss (1935; 2003), y, desde un punto de vista antropológico, levantamos argumentos teóricos para discutir el papel de las instituciones como agentes en la cognición de los sujetos, además de la comprensión de que los sujetos, en las instituciones son personas totales (ser biológico, sociológico, psicológico) en el sentido de Mauss (1935; 2003).

En el segundo estudio, investigamos las relaciones de los estudiantes de un curso de Licenciatura en Matemáticas con la probabilidad. Los resultados indican que los futuros profesores, en general, tienen una relación frágil con los saberes relacionados a la probabilidad. El cuestionario reveló también que los estudiantes que ya cursaron la disciplina de Probabilidad, mantienen una relación más próxima a la conformidad, demostrando que hubo algún tipo de cambio en R(X,O). (Cavalcante, Andrade y Régnier, 2016).

Para analizar la dimensión cognitiva en los cambios R(X,O) y sus relaciones con las herramientas de la TAD creamos categorías a partir de los textos de Lave y Wenger (1991). Para los autores, la cognición involucra por lo menos cuatro dimensiones: 1. Participación; 2. Producción y negociación de significados; 3. Apropiación de saberes/prácticas; 4. Constitución de identidades.

Utilizamos la TAD para identificar esas dimensiones en el contexto institucional que analizamos. Así, realizamos un estudio de las expectativas institucionales sobre la probabilidad, con la finalidad de observar las condiciones y las restricciones para la difusión de los saberes en aquel SD, analizamos también el contrato didáctico establecido y la dinámica de las posiciones asumidas por los sujetos y la evolución en sus praxeologías personales. El análisis está en fase inicial, pero presentamos algunas indicaciones, en la próxima sección, de los fenómenos observados hasta ahora.

3. Consideraciones y Avances

Los datos del estudio piloto están siendo analizados, indicando, hasta ahora, que el contrato didáctico asumido para la enseñanza de probabilidad en la formación docente limita los cambios en la relación de los sujetos, conforme expectativas en otros niveles de codeterminación didáctica, en esos niveles la Pedagogía aparece como fuerte restricción, luego, la relación al saber del profesor con la probabilidad necesita ser examinada. Los sujetos inmersos en el contrato mantienen acciones individuales y colectivas que favorecen el cambio en la relación, indicando un proceso de mudanza de posición a través de la participación en la práctica institucional, conforme prevé Chevallard (1992; 1996).

En algunos casos, observamos que cuando los estudiantes utilizan determinadas técnicas para resolver tipos de tareas, involucrando el concepto de independencia de eventos, el empleo de la técnica y los resultados generados no garantizan la toma de decisión. Mismo empleando la técnica correctamente, algunos sujetos cambiaron la respuesta, justificando la decisión contradictoria, del punto de vista de la técnica, por experiencias vividas en el cotidiano de otras instituciones. Para Mauss (1935; 2003) ese tipo de situación requiere un examen del punto de vista también psicológico.

El estudio piloto reveló que el cambio en R(X,O) no está solamente condicionado a la ecología de los saberes en la institución, sino está también relacionado a: 1. La interacción con los demás sujetos, que cambian de posición; 2. Las relaciones establecidas en otros contextos institucionales, que forman SD paralelos; 3. La intensificación de la participación individual en el SD principal. Sobre este último punto, Lave y Wenger (1991) destacan que esa imbricación entre cognición y la práctica engajada es una de las condiciones para el acto de aprender.

Por fin, destacamos que el análisis de la ecología de los saberes ha sido fundamental para que pudiésemos comprender la dimensión cognitiva en R(X,O).

Referencias

André, M. E. D. A. (2007). *Etnografia da prática escolar*. Campinas: Papirus.

Borba, R., Monteiro, C., Guimarães, G., Coutinho, C. & Kataoka, V. Y. (2011). Educação Estatística no ensino básico: Currículo, pesquisa e prática em sala de aula. *Revista em teia*, *2*(2), 1-18.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques*. La pensée sauvage. *19*(1), 77-123.

Cavalcante, J. L.; Andrade, V. L. V. X.; Régnier, J.-C. (2016). O conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela análise estatística implicativa. *Revista VIDYA*. *36*(2), 441-455.

Chaachoua H. (2011). La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. En Abboud-Blanchard M., Flückiger A. (eds). *Séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris. 81-102.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage, *12*(1), 73-111.

Chevallard, Y. (1996). Conceitos fundamentais da didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. En Brun, J. *Didáctica das matemáticas* (Figueiredo, M. J. Trad.), Lisboa: Instituto Piaget. (Obra original de 1992).

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In: *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Wozniac, F. (2011). Un cas d'infrastructure manquante: statistique et probabilités en classe de troisième. En Bosch, M. et al. (Eds.). *Un panorama de la TAD*. Barcelona: CRM, 831-853.

Croset, M. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d´un logiciel éducatif d´algèbre Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse d´université. Joseph-Fourier, Grenoble, Français.

Douglas, M. (2007). *Como as instituições pensam*. São Paulo: Editora USP. (obra original de 1986).

Lave, J. (1998). *Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge, UK: CU Press.

Lave J., Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation. Cambridge*, UK: CU Press.

Lopes, C. E. O. (2008). Ensino da estatística e da probabilidade na Educação Básica e na formação de professores. *Cadernos CEDES*, Campinas, *28*(74), 57-73.

Mauss, M. (2003). As técnicas do corpo. In: *Sociologia e Antropologia*. São Paulo: Cosac Naify. (Obra original de 1935).

La utilización del recorrido de estudio e investigación y el contrato didáctico en la Licenciatura de matemática: abordando el concepto de función

Rodrigues, Rochelande Felipe
PPGEC-UFRPE-UFCA, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil

Câmara dos Santos, Marcelo; Menezes, Marcus Bessa
PPGEC-UFRPE-UFPE, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil; PPGEC-UFRPE-UFCG, Universidade Federal de Campina Grande, Brasil

Abstract. Based on some problems that are present in Mathematics Degree programs this work presents the Study and Research Course (SRC) as a didactic device that can be used as a methodology for teaching and learning of the application of mathematical concepts. We will use as theoretical basis the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), as well as the notion of Didactic Contract, which contains important elements of analysis of SRC referrals. The proposal to apply the SRC will be through the Function content, an important Basic Education and Higher Education content. For the application of the device, we elaborated an Epistemological Reference Model for the application of the elementary functions concept (affine, quadratic and exponential), as well as the proposal of a pilot that approaches the concept of an affine function. With the application of the SRC, we hope to better understand its evolution in the Basic Mathematics subject, when approaching the application of the function concept.

Résumé. En prenant pour base quelques problèmes qui arrivent dans les cours de licence en Mathématiques, ce travail montre le Parcours d'Étude et Recherche (PER) comme un dispositif didactique qui peut être utilisé comme méthodologie d'enseignement et apprentissage d'application des concepts mathématiques. Nous prenons comme base théorique la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et aussi la notion de contrat didactique, tel qui apporte des éléments importants à l'analyse des enchaînements du PER. La proposition d'application du PER sera faite à partir du contenu de fonction qui est importante pour l'éducation de niveau basique et supérieur. Par l'application du dispositif nous avons élaboré un Modèle Épistémologique de Référence pour l'enseignement du concept de fonctions élémentaires (linéaire, quadratique et exponentielle), ainsi comme la proposition d'un guide qui aborde le concept de fonction linéaire. En mettant en place le PER, on espère meilleur comprendre l'évolution du cours de Mathématiques basiques lorsque le concept de fonction soit évoqué.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Introducción

Nuestra discusión describe una investigación de doctorado que está en andamiento que aborda las instituciones de nivel superior brasileñas, específicamente la licenciatura en Matemática, que adopta conducciones metodológicas que influencian en la formación y actuación profesional de los futuros profesores.

Como consecuencia de esas conducciones metodológicas, tenemos las consideraciones de Onuchic y Allevato (2009), que afirman que los alumnos de las licenciaturas en Matemática están saliendo de las universidades sin una formación adecuada para enfrentar los problemas presentes en la educación básica, en lo que se refiere a su actuación como profesor. Ese hecho puede estar relacionado al modelo actual de las universidades que presentan un autismo institucional, es decir, existe una deficiencia de comunicación de la universidad con la sociedad (PARRA E OTERO, 2011), como también, la “epistemología escolar monumentalista”1 presente en las educaciones básica y superior en que los contenidos son visitados durante la formación, pero su real finalidad y aplicación no son comprendidas (CHEVALLARD, 2006).

Delante de esas consecuencias en la formación de futuros profesores de Matemática citadas anteriormente, utilizaremos el dispositivo didáctico recorrido de estudio e investigación (REI), que se apoya teóricamente en la teoría antropológica del didáctico (TAD). El REI está relacionado a un estudio de una cuestión viva (Q) o cuestión generatriz, es decir, una problemática relevante que puede generar otras problemáticas menores derivadas de ella (Qi). Tal problemática (Q) y sus derivaciones (Qi), conducen a un gran número de saberes que posibilitará caminos de resoluciones diferentes (Ri) y la verificación de sus limitaciones en las conducciones de esos caminos. Chevallard (2009) presenta un modelo basado en el “esquema herbartiano” para representar las formas posibles de cualquier REI:

[1] El término utilizado por Chevallard, que usa el sentido de monumento, donde son visitados, observados y apreciados, pero después de un corto espacio de tiempo las características son olvidadas. En ese sentido, se hace la semejanza con los conceptos matemáticos estudiados en la escuela.

$$[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow \{\, R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}^{\lozenge}, \ldots, O_m^{\lozenge} \,\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

En el modelo propuesto tenemos S(X ; Y ; Q) que es caracterizado por un sistema didáctico formado por un grupo Y (profesor, orientador, coordinador de investigación) que debe hacer, estudiar, reconstruir y dejar accesibles los caminos posibles para un grupo de alumnos X, en la búsqueda de responder una cuestión generatriz Q. El sistema $\{\, R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}^{\lozenge}, \ldots, O_m^{\lozenge} \,\}$ representa el conjunto de recursos que servirá para producir la respuesta final R♥, en la cual $R_i^{\lozenge}$ son respuestas ya formalizadas y $O^{\lozenge}$ son las praxeologías adoptadas para verificar la validez de $R_i^{\lozenge}$ para construir una buena respuesta R♥.

Durante el desarrollo del REI algunos elementos deben ser analizados, un de ellos es el contrato didáctico (BROUSSEAU, 1996), pues para un cambio de postura del profesor y del alumno mediados por el saber en cuestión. Entendemos que existirá la necesidad de cambio del contrato didáctico antiguo para uno nuevo contrato didáctico, ocasionando nuevas rupturas y posibles nuevas praxeologías, por medio de la observación de las relaciones implícitas o explícitas que se establecen en el contrato didáctico y de qué modo ellas se manifiestan. Brousseau (1986) comenta que lo más importante no es intentar explicitar la totalidad de las reglas que constituyen el contrato didáctico, pero delinear algunos puntos de sus posibles rupturas. Por lo tanto, podemos considerar la afirmación de Sarrazy (1995, p. 6): “De facto, el aprendizaje va a reposar no sobre el funcionamiento del contrato, pero sobre sus rupturas”.

En ese sentido, observar la aplicación del REI sobre la luz del contrato didáctico se vuelve importante, para observar las renegociaciones/rupturas que ocurrirán en los contratos establecidos durante la aplicación del dispositivo, así como nuevas praxeologías.

Otros elementos a ser analizados al REI son las dimensiones epistemológica, económica y ecológica, que tienen la finalidad de comprender las restricciones y sus orígenes para crear condiciones para el desenvolvimiento dispositivo didáctico, o sea, su existencia y razón de ser (GASCÓN, 2011).

Sin embargo, el objetivo de nuestra investigación es analizar las rupturas del contrato didáctico y las organizaciones praxeológicas construidas y/o reconstruidas durante la aplicación del recorrido de estudio e investigación en la disciplina de Matemática Básica, del Curso de licenciatura en Matemática, en el proceso de comprensión de la aplicación del concepto de función. Tal objetivo es direccionado para responder a la siguiente cuestión: ¿Cuáles son las restricciones y las condiciones para el desenvolvimiento del recorrido de estudio e investigación al abordar el concepto de función en una disciplina de Matemática Básica, del Curso licenciatura en Matemática, sobre la luz de los elementos de la noción del contrato didáctico?

2. Desenvolvimiento de la Investigación: datos parciales

Iniciamos nuestra investigación con la construcción de nuestro modelo epistemológico de referencia (MER) y del REI, direccionado para la aplicación del concepto de función, en el cual fue elaborado y aplicado un estudio piloto para obtener resultados preliminares. La elección del concepto de función fue motivada por ser utilizado como contenido de las disciplinas de Matemática Básica o equivalente en los cursos de Licenciatura en Matemática en Brasil, como, también, hace parte de la base conceptual para los demás contenidos, a ejemplo del cálculo diferencial e integral.

Al aplicar el REI fundamentado por nuestro MER, buscamos analizar su desenvolvimiento observando el contrato didáctico y las organizaciones praxeológicas en la disciplina de matemática básica del curso de licenciatura en Matemática utilizando el concepto de función.

Para la construcción de nuestro MER direccionado a la aplicación de funciones elementares, algunos puntos fueron llevados en consideración: un breve levantamiento histórico de la evolución del concepto de función hasta su presentación en los libros didácticos utilizados actualmente en los cursos de licenciatura en Matemática; documentos oficiales de la educación brasileña, con una mirada para el concepto de función; las dificultades en el proceso de enseño y aprendizaje del concepto de función presentadas por algunas investigaciones realizadas en Brasil y análisis praxeológica de un libro didáctico utilizado en los cursos de licenciatura.

La construcción y desenvolvimiento de nuestro MER está fundamentado en la modelización matemática (Chevallard, 1989; Gascón, 2001), en los niveles de modelización funcional (Ruiz-Muzón, 2010) y en la actividad de modelización funcional para el cálculo diferencial elementar (Lucas, 2015). La propuesta del modelo está dividida en el campo discreto y en el continuo, que posee tareas para ser realizadas. También es compuesto de cuatro niveles de modelización funcional que parte de la delimitación del problema y levantamiento de hipótesis, de la elaboración del modelo a ser utilizado, del análisis y aplicación del modelo y, por fin, la formulación de otras cuestiones derivadas y de nuevas hipótesis, llevando a la repetición del proceso.

En la aplicación del REI (estudio piloto)2, proponemos un problema que en su resolución es utilizado el concepto de función afín. Para su aplicación fue elaborada una ficha diagnostica que trata sobre el concepto de función, y, en seguida, una ficha de actividad tratando sobre el concepto de la función afín y, por último, la cuestión generatriz.

La cuestión generatriz trata sobre uno de los modelos de jubilación en Brasil que es la fórmula 85/95 aprobado por la ley 13.183/2015. En el caso, la mujer tendrá que alcanzar una suma de 85 años, sumando tiempo de su contribución con su edad, y en el caso del hombre será 95 años siguiendo el mismo principio hasta el 2018. Para los años siguientes, la ley hace una proyección hasta el 2027, llegando a una suma de 90 años para las mujeres y de 100 años para los hombres. En ese contexto fue elaborada la siguiente cuestión generatriz:

Q0: ¿Como representar la situación actual y futura de los casos de jubilación de las mujeres y de los hombres, tomando por base la ley 13.183/2015 que trata de los cambios en algunas reglas para las jubilaciones?

[2] El piloto de investigación en Brasil representa una aplicación y análisis parcial de la investigación propuesta por el investigador. Con los resultados parciales, el investigador puede responder algunas preguntas y hasta mismo hacer otras.

El desenvolvimiento del REI fue realizado en 8 (ocho) secciones presenciales: dos direccionadas para la formación de profesor, buscando presentar los principales puntos conceptuales y de ejecución del dispositivo; 6 (seis) encuentros con los alumnos y con el profesor de la disciplina de Funciones I. En la aplicación del REI, además de la cuestión generatriz otras cuestiones derivadas fueron desarrolladas, proporcionando cuestionamientos y utilización de nuevas praxeologías.

Con el desenvolvimiento parcial de la investigación, observamos que algunos efectos de los contratos didácticos establecidos tienen una fuerte presencia durante la aplicación del dispositivo, a ejemplo del topazio. La aplicación del REI proporcionó un cambio de una OMP para una OML por parte de los alumnos. Al concluir nuestro análisis esperamos comprender mejor como el REI es desenvuelto en las disciplinas de matemática básica de los cursos de licenciatura en Matemática al abordar el concepto de función, como también, colocar a prueba nuestro MER analizando la posible evolución de las organizaciones matemáticas utilizadas por los alumnos, complementando el análisis por el contrato didáctico. Con eso, podemos responder nuestra pregunta de investigación, en el sentido de comprender mejor las restricciones y condiciones de aplicación del REI en una disciplina de matemática básica al abordar el concepto de función.

Referencias

Brousseau, G. (1986). Fondementes e Methodes de la Didactique des Mathematiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1996). Os Diferentes Papéis do Professor. En Cecília Parra & Irma Saiz...[et. al.]. *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*; trad. Juan Acuña Liorens. Porto Alegre: Arte Medicas.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER**:** problèmes et avancées. *UMF/ADER*. Toulouse, le 28 avril.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche. Publicação nº 16 de *l'IREM* Aix-Marseille.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 14 (2), p. 203-231.

Lucas, C. O. (2015). Una Posible “Razão de Ser” del Cálculo Diferencial Elemental en el Ámbito de la Modelización Funcional. (Tesis de doctorado). Universidade de Vigo.

Onuchic, L. R & Allevato, N. S. G. (2009). Formação de Professores: mudanças urgentes na licenciatura em matemática. En Frota, M. C. R & Nasser, L. (Org.) *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.* SBEM. Recife.

Parra, V. E & Otero, M. R. (2011). Praxeologias didácticas en la universidad y el fenômeno del<encierros> **:**unestudio de caso relativo al limite y continuidad de funciones. En Bosch M. [Et Al]; *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico: Un panorama de la TAD*. Centre de RecercaMatemàtica. Barcelona.

Sarrazy, Bernard. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*, n. 112, p. 85-118, 1995. (Note de synthèse).

Connecting Factors for the Application of a Digital Algebra Learning System: A Study with Textbook Authors

Maike Braukmüller

Westermanngruppe in cooperation with University of Bremen, Germany

Abstract. The MAL-project (Multimodal Algebra Learning) develops a digital system for learning algebra. A key issue is its applicability in schools and textbooks. The paper reports about a partial study of the project which aims at uncovering connecting factors that allow adapting the system to praxeologies in schools and textbooks. In the paper, the study and preliminary results are presented.

Résumé. Le projet MAL (*Multimodal Algebra Learning*) développe un système numérique d'apprentissage de l'algèbre. Un problème central est son applicabilité dans les écoles et les manuels scolaires. Cet article part d'une étude partielle du projet qui se propose de découvrir des facteurs de rattachement qui permettraient au système de s'adapter aux praxéologies de l'école et des manuels. Nous présentons ici l'étude de départ et les résultats préliminaires de notre recueil de données.

Resumen. El proyecto MAL (*Multimodal Algebra Learning*) desarolla un systema digital para el aprendizaje del álgebra. Una cuestión central es su aplicabilidad en las escuelas y en los libros de texto. Este artículo parte de un estudi parcial del proyecto qu se propone descubrir factores de conxión del systema para adaptarse a als praxeologías da la escuela y de los libros de texto. Presentamis aquí el punto de partída del estudio y algunos resultados preliminares de nuestra recolección de datos.

.

1. Introduction

The project presented in this paper is part of the MAL-project (*Multimodal Algebra Learning*) (Janßen et al., 2017). Its aim is to develop an interactive digital algebra learning environment (MAL-system) enhanced with tangible user interfaces, so called smart objects (O'Malley, Fraser & Danae, 2004). These smart objects combine virtual and haptic features making the students interact multimodally with the system and receive automated feedback on their actions.

The tangibles are designed in the style of Algebra Tiles (Dietiker, Kysh, Sallee & Hoey, 2010). In the project they are supposed to cover at least three thematic branches: solving linear equations, working on quadratic expression, and algebraic patterns. The basic idea of Algebra Tiles is to represent integers and variables according to the shape and colour of a rectangle. There are three different types of shapes: a small square with side length one representing the number one; a rectangle with side length one and side length x representing x; and a large square with side length x representing x^2. Laid out on a surface the tiles are added and represent an algebraic expression. The determination of a left and right side allows stating an equation. Equations can be solved by laying out additional tiles or taking away the same tiles on both sides.

There are two possibilities to express subtraction with Algebra Tiles. One is to introduce a subtraction zone, where all the tiles within this zone are supposed to be subtracted. The other is to introduce negative tiles. Negative tiles have the same shape as the positive ones, but they have a different colour, usually red. There are more features about Algebra Tiles that are not mentioned at this place, because it is sufficient to know the basics in order to follow this paper.

From the beginning of the development of the MAL-system, its applicability in schools is a central issue. Therefore a specific partial project investigates the institutional conditions of teaching and learning algebra in schools and textbooks, conceptualised as praxeologies (Bosch & Gascón, 2014).

Textbooks as well as teachers have their own praxeologies. These praxeologies evolve into school praxeologies when they are put to use in class. In contrast, the MAL-system will also bring into play its own praxeologies shaped by the researchers. Hence to ensure the applicability of the MAL-system, it must be adaptable to the prevailing praxeologies in schools and the textbooks used. Based on that the research question is formulated:

What are the connecting factors within a conflicting situation of different praxeologies, especially when the MAL-system is supposed to be used in class or adapted to textbooks?

2. Methodology

The specific methodological approach is to reconstruct these connecting factors of the praxeologies within groups of textbook authors. These groups represent the praxeologies used in textbooks or are at least familiar with them, as they are the developers of the textbooks. Furthermore they are in-service teachers. Thus they are also familiar with central praxeologies within schools, which use the same book.

In order to find these connecting factors, the author groups were asked to take part in a group discussion. Group discussion is a familiar practice to the authors, as this is what they do when developing the textbooks. Within two different groups the topics algebra learning, digital learning, gamified learning, and the MAL-system were discussed. The authors were given input on material, applications and conceptions, which are unknown to them. In this way not only the praxeological elements of the textbooks become visible but also possible connecting factors for the presented input within the team. In addition the constraints, obstacles and challenges when introducing the new system in school will become apparent. Thus it will be possible to find favourable conditions for the MAL-system and to indicate where resistance can be expected.

Although the textbook praxeologies are dominant in the discussion, the authors also take into account their individual and school praxeologies. These will be the focus in a second round of data collection. In this round, compressed results of a first analysis of the group discussions are given back to the participants individually. The authors are asked to comment on the results and to complete a questionnaire which still needs to be constructed. In the style of Delphi methods (Linstone & Turoff, 1975) there will be several iterations of this procedure.

3. Preliminary Results

The data collection is still work in progress. Therefore, just preliminary results of the two discussions are presented. In group A, working on a book for comprehensive schools - Maths Alpha - twelve authors participated in the discussion; group B counts five participants and is working on a book for low achieving students, called Maths Beta.

From each discussion, a short section shows, the authors comparing Algebra Tiles with the balance model, which is widespread in Germany. Using a balance with two pans, additive equations with positive integers can be modelled. Therefore, the numbers in the equation are represented by blocks with weights according to the number and the variable is represented by blocks with unknown weight. In both sections the authors came up with the balance model on their own, without any intervention from the researcher.

The preliminary analysis of the data is a praxeological analysis. Starting from the mathematic praxeologies the aim is to recognize parts of didactic praxeologies. In the chosen sections the mathematical praxeologies are made up of tasks where pupils are asked to solve linear equations. These tasks are not explicit in the discussion, but as the authors are talking about tools to help students learn and understand how to solve equations, this is part of the mathematical praxeology.

For solving these tasks, the authors consider two different techniques. The first one is using the scale model and the second one is using Algebra Tiles. Since the authors' interest focusses on the didactic praxeologies, I skip the explanation of the logos part of the mathematics praxeologies.

The first section displayed here is taken from the discussion in the Maths Alpha group:

Expert1: I don't think that it is suitable for solving equations. I rather take my balance model that I can stick on the board. This is easy for the kids, easier to understand.

And they know the balance. They know what it means if the same is done on both sides. For me this [Algebra Tiles] is too abstract.

Expert2: Obviously the problem of the balance model is that I cannot express negative numbers with it.

Expert3: Yes, well, negative doesn’t work.

Expert2: This somehow makes it [Algebra Tiles] quite attractive I think. That if you have something like 5x+7-8x+6 the one can slide together the xs, that cancel out each other. Well, this also always helps and with the balance this not possible. To that extend it is […]

The first expert offers a didactic technology and points at a theory supporting the mathematical technique of using the scale model and rejects the use of Algebra Tiles. The technology “the scale model is easier to understand for kids” is underlined by the statement “they know what it means if the same is done on both sides”. This shows aspects of a theory that backs up the mentioned technology.

Then Expert2 comes up with a technology supporting the mathematical technique of using Algebra Tiles. She[1] recognizes that the limits of the scale model concerning negative numbers can be evaded when using Algebra Tiles. This technology is related to the scale model but in the further course she detaches it when saying that something where positive and negative variables can be cancelled out is helpful. The theory in this case is hidden. To find out which theory Expert2 has in mind, the question why this cancelling out is helpful has to be answered. The answer could be either an individual empirical theory or an elaborated didactical theory.

A similar development can be identified in the discussion of the Maths Beta authors:

Researcher: […] Can you imagine that it makes sense to use Algebra Tiles in class?

[1] The gender is not taken into account so I always use the feminine pronoun, however both genders were represented in both groups.

Expert1: Honestly, I cannot imagine that. I think that the balance model is much easier.

Expert2: More illustrative as one has the pans, well the balance in mind. That has to be balanced all the time. One has to introduce these [Algebra Tiles] first and this concept why is this x, why is this one and th- (sighs). It is so, one has to, well this is again a new introduction that the kids must keep in mind. So for our clients I think it is very abstract.

Expert3: Uhm I find it uhm not so not so bad (laughing). I only had uhm myself uhm with this laying and the subtraction zone, minus three, why do I place it there and sure they lay out like this. But this is, this needs to be told to the pupils, why uhm they are placed in the subtraction zone or wheresoever. But if this is clear, then everything else is clear. I balance it and take it from one side. Uhm pff the balance only helps by imagination but it does not help in real life. Because we cannot place the tiles there. And here I can do it, so I find it

Expert4: I also think, well I have uhm (incomprehensible) tell pupils when one also tells them that the equals sign effectively stands for the balance. It must be the same amount on both sides. I think in this way the equals sign should be, well not only as a sign leading to the result but one says it has the meaning that on both sides must be the same. This could be introduced with the balance. Then I think one could get to a representation like that. I mean, the subtraction zone surely is something abstract. Well to say here is something that actually is something that is to be taken away. This is a demanding conception. Basically I think this laying out on both sides and maybe in the beginning only using additive elements. I can imagine that.

In this section the researcher implicitly gave the didactical task to integrate Algebra Tiles in classroom practice. The openness of the question provides space to rejecting and integrating the tiles. It allows finding obstacles and constraints that are in the authors' minds and gives space to a process of approaching the integration of Algebra Tiles. This process is highly interesting as it directly reveals connecting factors.

At first Expert4 rejects the Algebra Tiles using the same technology as Expert1 in the Maths Alpha discussion. She only states that the balance model is easier. Expert5 then goes more into detail outlining parts of a theory, "the balance has to be balanced all the time", which is again similar to the theory of Expert1 (lines 4-5, Maths Alpha). In addition Expert5 gives a technology that explicitly rejects the use of Algebra Tiles, saying that it "is again a new introduction that the kids must keep in mind". This statement refers to low achieving students. The implicit theory in this case could be that learning new things is hard for those low achieving students.

Expert6 then brings in a new point of view. She first argues on the level of a didactic technique. For her it is necessary to give the pupils an explanation of the mathematic techniques for the use of Algebra Tiles. Having done this Expert6 does not see any problems in working with Algebra Tiles. Similar to Expert2 from the Maths Alpha discussion she sees an advantage over the balance model. She reasons that the *concrete action*, which can be performed with the tiles, is more helpful than having *the balance in mind*. This is a technology she presents to justify the mathematic technique of solving equations using Algebra Tiles. The theory again is hidden. It would be the answer to the question why the concrete action is more helpful in this case.

4. Conclusion and Outlook

The two sections presented above offer an insight in the collected data. Especially similarities within the groups are shown here, however, also many differences can be found throughout the discussions. In both cases one of the experts detects a need (the ability to express negative numbers, and the concrete action with the tiles) that cannot be satisfied with the elaborated balance model. This is the starting point for the consideration of using Algebra Tiles. It shows that new material can be better accepted if it fills a gap of the familiar material. This provides an idea of how connecting factors can be identified in the discussion.

The next step after the preliminary praxeological analysis is a discourse analysis. The aim is to see how the discussed praxeologies change and develop during the discussion. The second step in the data collection will be the organized feedback with questionnaires addressing the praxeologies of schools and detecting differences between the praxeologies identified in the author groups, and the individual ones, which are clearly influenced by schools.

Acknowledgement

The MAL-project (*Multimodal Algebra Learning*) is funded by the German Federal Ministry of Education and Research in the grant programme “Erfahrbares Lernen” (experiencable learning).

References

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, & S. Prediger, *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (S. 67-83). SpringerInternational Publishing Switzerland.

Dietiker, L., Kysh, J., Sallee, T., & Hoey, B. (2010). *Making Connections: Foundations for Algebra, Course 1.* Sacramento, CA: CPM Educational Program.

Janßen, T., Reid, D., Bikner-Ahsbahs, A., Reinschlüssel, A., Döring, T., Alexandrowsky, D., et al. (2017). Using tangible technology to multimodally support algebra learning: The MAL project. *Poster Presentation at CERME10.* Dublin.

Linstone, H. A., & Turoff, M. (Eds.). (1975). *The Delphi Method: Techniques and Applications.* Reading, MA: Addison-Wesley.

O'Malley, C., Fraser, S., & Danae. (2004). *Literature Review in Learning with Tangible Technologies.* nesta Futurelab Series.

Reference epistemological model: what form and function in school institutions?

Ignasi Florensa

Escola Universitària Salesiana de Sarria, Univ. Autònoma de Barcelona, Spain

Marianna Bosch

IQS School of Management, Univ. Ramon Llull, Spain

Josep Gascón

Dep. de Matemàtiques, Univ. Autònoma de Barcelona, Spain

Abstract. Many teaching problems are related with the lack in the school institutions of epistemological tools to design, manage and evaluate study processes. We propose to include within these tools the question-answer maps as a partial representation of the reference epistemological models. In this paper we summarize the conclusions of four experiences including teacher education courses and study and research paths. The results show the potentialities of question – answer maps and new open questions.

Resumen Muchos problemas docentes están relacionados con la ausencia, en las instituciones escolares, de herramientas epistemológicas para diseñar, gestionar y evaluar procesos de estudio. Proponemos incluir entre dichas herramientas los mapas de cuestiones y respuestas que constituyen una representación parcial del modelo epistemológico de referencia. En este artículo resumimos las conclusiones de cuatro estudios experimentales que incluyen formación del profesorado y recorridos de estudio e investigación. Los resultados muestran las potencialidades de los mapas de cuestiones y respuestas y las nuevas cuestiones que se abren.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. The representation for reference epistemological models

The need for establishing explicit models of school mathematical activity is at the foundations of the constitution of the didactics of mathematics as a field of research (Brousseau, 1972). The specific form of this model in the Theory of Didactic Situations is the *fundamental situation,* defined as the minimal set of adidactical situations that allow to generate, by manipulation of the values of its didactic variables, a big enough field of problems to provide a good representation of the targeted knowledge.

The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and its "didactic anthropology of mathematics" (Chevallard, 1990) entails not only an *anthropologization* of mathematics but a *didactization* of the epistemology of mathematics (Gascon, 1998). This mutual enrichment is stated by Chevallard (1985, p. 59, our translation) as follows: "the genesis and the development of mathematical knowledge cannot be detached from the communication, the use and the institutional transposition of such knowledge". Gascón (2001, p. 155, our translation) describes this new paradigm as a twofold challenge. On the one hand, a challenge for didactics "assuming the responsibility to propose new epistemological models of mathematical knowledge" and, on the other hand, for epistemology "having the need to use as an essential part of its empirical basis, the facts produced in didactic systems".

Since the decade of the 1990, ATD has been enriched with notions and methodologies such as *praxeology, praxeological analysis institutional relations to knowledge* and *levels of codetermination*. Among them, the notion of Reference Epistemological Model (REM) or Reference Praxeological Model (RPM) was proposed to assume in a certain way the role of fundamental situation in TDS. The use of this model has many examples: García (2005) developed a REM about proportionality and Sierra (2007) about numeration systems. These examples led research within the ATD to develop whole research projects about elementary algebra and functional modelling of discrete and continuous systems (Barquero, 2009; Lucas, 2015; Ruiz-Munzón, 2010).

The way REMs are presented in the cited works is diverse. For example, Sierra (2007) presents a REM as a sequence of praxeologies of increasing complexity, the limitations of one praxeology leading to the emergence of a more complete praxeology (Figure 1). Ruíz-Munzón (2010) uses a similar structure when presenting a REM in the field of elementary algebra: in her work three levels of algebrisation are defined and, again, the limitations of the lower levels lead to the following levels (Figure 2). In contrast to this representation, Barquero (2009) and Lucas (2015) present the REM as an arborescence of questions and answers initiated by a generating question (Q_0), taking the notion of Herbartian schema as standing point.

$$\mathbf{OM_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \rightarrow OM_a = [T_a/\tau_a/\theta_a/\Theta_a] \rightarrow OM_h = [T_h/\tau_h/\theta_h/\Theta_h]}$$

$$\mu$$

$$\mathbf{OM_p = [T_p/\tau_p/\theta_p/\Theta_p]}$$

Figure 1 Reference Praxeological Model for numerical systems. Starting with additive systems followed by additive-multiplicative systems and finishing with positional systems (Sierra, 2007)

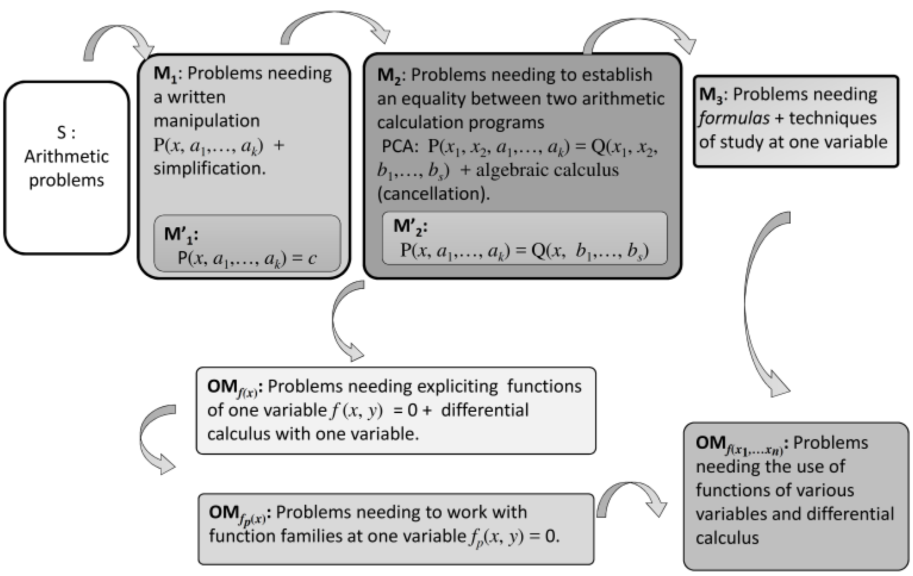


Figure 2 Reference Epistemological Model proposed in Ruiz-Munzon (2010) about elementary algebra

The use of these models is indispensable in didactic research within the ATD framework. The model acts as a necessary emancipating tool (Gascón, 2014) enabling the researcher to detach from the school and the scholar institutions and to propose explicit alternative models for the knowledge to be taught. In consequence, the REM plays a crucial role in the analysis of didactic transpositive processes, the study of didactic phenomena and the design of new processes of study.

2. Epistemological tools at the school institution

These new study processes (that in the ATD framework usually take the form of a Study and Research Path, SRP) will be experienced by a specific set of teachers and students of a specific institution. This fact leads to a problematic situation, already stated by Florensa, Bosch and Gascón (2015, p. 2640):

> "The most remarkable feature is the shortage and inadequacy of tools available in the teaching institution to describe, manage, and evaluate the dynamics of mathematical activity. This lack of tools could in the first place be attributed to the scarcity of spontaneous epistemological models (…).

Consequently, the following research questions are formulated:

> Which new notions or tools are needed to describe and manage the dynamics of the mathematical activity that will take place in study processes? How to describe these tools depending on the role addressed (didactic researcher, teacher and students)? How to make them available in the teaching institution and to the participants of the didactic process?" (*Ibid.*)

Winsløw, Matheron and Mercier (2013) present the question-answer maps (Q-A maps) as a tool to model "mathematical knowledge from a didactical perspective". In addition, they hypothesize that "such a representation is sufficiently close to teachers' concerns, and also captures such essential parts of a didactic design, that one could use it as a tool for collaboration and communication with and among teachers, regarding concrete teaching designs" (p. 281). As said before, the Q-A maps have already played the role to materialise a REM (Barquero, 2009; Lucas, 2015). We hypothesize that Q-A maps will enrich the epistemological tools available at scholar institutions.

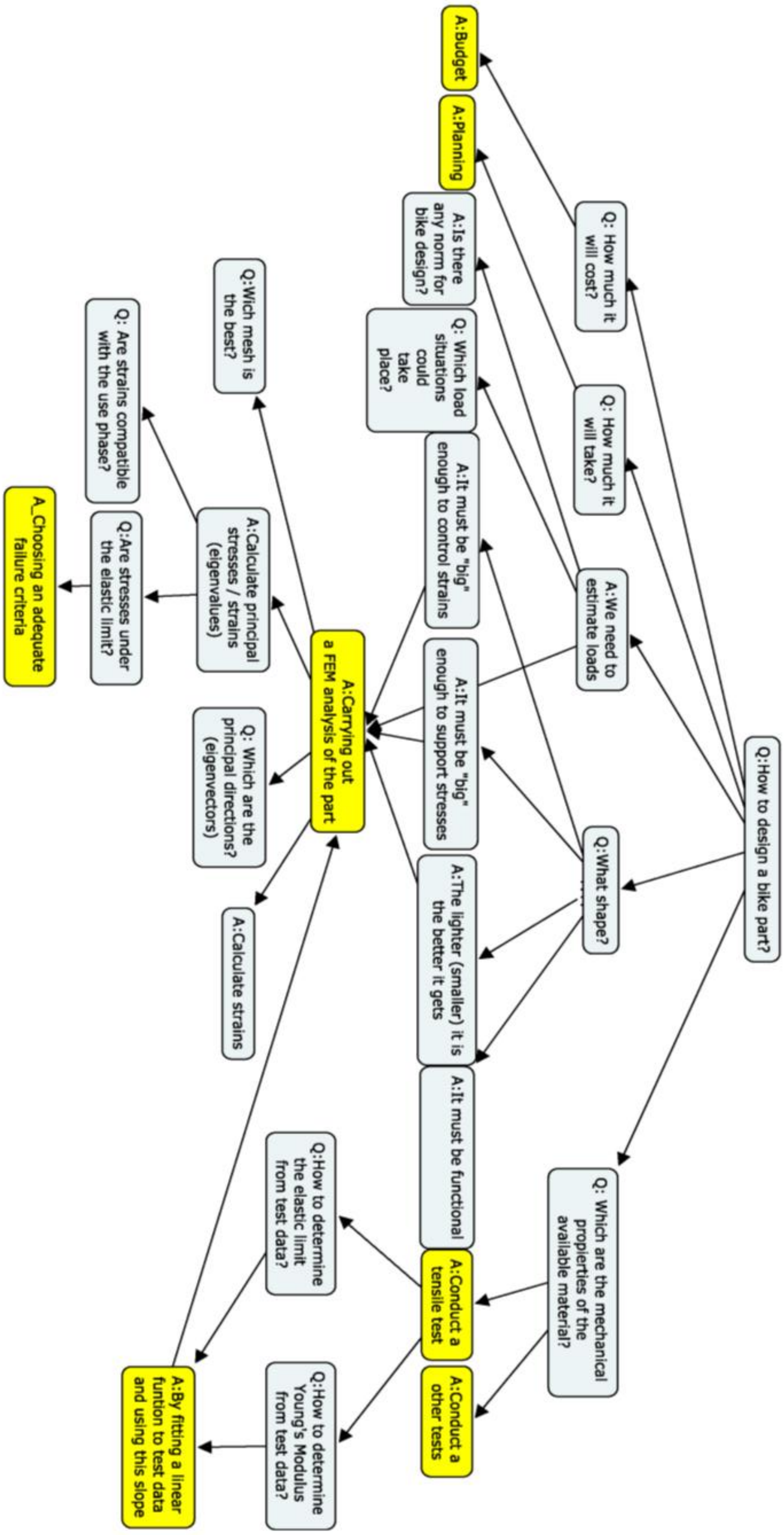


Figure 3 A priori Q-A map for the SRP in Elasticity.

We consider that these new tools to be provided to teachers and students should empower them to (1) describe the knowledge involved during a study process overcoming the limitations of the previous conception of knowledge, (2) contrast the new study process with the previous one specially in terms of responsibilities assumed and richness of the *media* and the *milieu* and (3) make explicit the raison d'être of the knowledge to be taught. In fact, these aspects are, among others, expected to be developed by the REM.

In order to validate this hypothesis we have developed four empirical studies: (1) a secondary teacher education course (Florensa, Bosch, & Gascón, 2016a), (2) the design, experimentation and analysis of an SRP in General Elasticity (Florensa, Bosch, Gascón, & Mata, 2016), (3) a lecturer's course on didactics (Florensa, Bosch, & Gascón, 2016b), and (4) the design, experimentation and analysis on an SRP in strength of materials developed with one of the participants of the lecturers' course. In all these experiences the role attributed to the Q-A maps is central both in the teacher education courses and in the experienced SRP with students.

3. Q-A maps: a crucial epistemological tool

Regarding the description of knowledge, in both experienced SRP, Q-A maps have been the tool that have helped teachers and students to describe the development of the SRP. One of the maps produced by the lecturers as tool for the a priori analysis of the SRP is presented in Figure 3. The maps have been used to assign tasks to parts of the community of study and to plan the weekly activity. The maps also have helped students to identify on of the possible raison d'être of the knowledge at stake. A very illustrating example of these phenomena is the statement of one of the students participating in an SRP in an interview after the SRP. The student stated: "Q-A maps in the weekly reports were useful: iterations appeared there, we saw where we were progressing." Also during the interviews, one of the lecturers managing the SRP stated: "implementing the SRP and using the Q-A maps has changed how I teach the course (…) the SRP generating question has become the raison d'être of the taught knowledge. Now I feel that my teaching task has a rationale."

The Q-A maps also played an important role when introducing the media-milieu dialectics to in-service teachers. The notion was presented in order to highlight the scarceness of objects in the media and the milieu in the scholar institution and to compare them to an experienced SRP. The Q-A map enabled them to describe for each question which objects were used to generate a specific answer and how and why did the community of study accepted the answer as a correct one. This capacity of the Q-A maps to analyze and highlight the individual-collective dialectic was stated by Bosch (2015).

We conclude that these four experiences reveal that Q-A maps used by teachers and students can empower them to develop tasks that usually are absent from scholar institutions but that are crucial to manage an SRP. We consider that these maps fulfil, at least partially

References

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas (Doctoral dissertation)*.

Bosch. (2015). Collectifs d'élèves : étude et recherches en classe. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, … S. Besnier (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1972). *Processus de mathématisation. La Mathématique à l'Ecole Élémentaire*. Paris: APMEP.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné [The didactic transposition - From scholarly knowledge to taught knowledge]* La pensée sauvage. Grenoble.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - troisième partie: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit X*, (23), 5–38.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics : Two problematic issues To cite this version : The epistemological dimension in didactics : Two problematic issues. In *CERME 9 - Ninth Congress of the ˇ European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2635–2641). Praha.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2016a). A posteriori analysis of a SRP-TE as a teachers training tool. In T. Á. Sierra Delgado (Ed.), *5th International Conference of the Anthropological Theory of the Didactic*.

Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2016b). Lecturer Education: a course design. In *13th International Congress on Mathematical Education*. Hamburg.

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J., & Mata, M. (2016). SRP design in an Elasticity course : the role of mathematic modelling. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Montpellier, France.

Fonseca, C., Gascón, J., & Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemologico de referencia en torno a la modelizacion funcional. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *17*(3), 289–318.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Universidad de Jaén.

Gascon, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches En Didactiques Des Mathématiques*, *18*(52), 7–33.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *4*(2), 129–159.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, (Special Issue: XXV years), 99–123.

Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Universidad de Vigo.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional (Doctoral Disseratation)*.

Sierra Delgado, T. Á. (2007). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Universidad Complutense de Madrid.

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267–284.

Los problemas espaciales: una propuesta alternativa para enseñar geometría en la Educación Secundaria Obligatoria

Carlos Rojas Suárez
Universidad Complutense de Madrid, España

Tomás Ángel Sierra Delgado
Universidad Complutense de Madrid, España

Abstract. We present an outline of the research problem that we want to address in our doctoral thesis. After analysing the Spanish mathematics curriculum and some textbooks, we have found an absence of the questions to which the geometric knowledge proposed for high school (students aged 12 to 16 years) responds. After reviewing different studies related to the teaching of geometry, we postulate that spatial problems can help to find a possible justification for such geometric knowledge. Thus, we intend to identify and address some spatial problems in order to confirm this hypothesis.

Resumen. Presentamos un esbozo del problema de investigación que queremos abordar en nuestra tesis doctoral. Tras analizar el currículo español de matemáticas y algunos manuales escolares, hemos encontrado una ausencia de las *cuestiones a las que responden* los conocimientos geométricos propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria (alumnos de 12 a 16 años). Después de haber revisado diferentes estudios relacionados con la enseñanza de la geometría, postulamos que los problemas espaciales pueden ayudar a encontrar una posible *razón de ser* de esos conocimientos geométricos. Así, pretendemos identificar y abordar algunos problemas espaciales a fin de confirmar dicha hipótesis.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Antecedentes

Nuestro estudio ha surgido en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y analiza fenómenos didácticos que se presentan dentro del *paradigma de la visita de las obras* (Chevallard, 2013), donde los saberes se presentan como monumentos u obras de arte que deben ser aceptados e idolatrados por los estudiantes. En nuestro caso, evidenciamos la problemática que surge en la enseñanza de la geometría tras revisar el currículo de matemáticas (MECD, 2014), y algunos de los manuales escolares[1] propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (alumnos de 12 a 16 años) en España.

2. Problema de investigación

Actualmente, el análisis de los textos para la enseñanza de la geometría pone de manifiesto que en el currículo de matemáticas para la ESO y en los manuales escolares correspondientes, se proponen de manera explícita una serie de saberes geométricos a enseñar, sin que aparezcan las cuestiones a las que responden, es decir, no se explicitan las razones de ser de dichos saberes.

Con la intención de atender a esta problemática, encontramos que en los trabajos que parten de la tesis doctoral de René Berthelot y Marie-Hélène Salin (Berthelot & Salin, 1992; Berthelot & Salin, 2000; Bloch & Salin, 2004 y Salin, 2004), y otros anteriores como Grecia Gálvez (1985) y Guy Brousseau (2000), se explica que existe una importante interrelación entre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos.

Esta interrelación indica que la búsqueda de solución a dichos problemas espaciales puede hacer que emerjan necesariamente ciertos conocimientos geométricos. Así, tenemos el caso de la búsqueda de la solución mediante la *modelización espacio-geométrica* (Berthelot & Salin, 2000; Bloch & Salin, 2004 y Salin, 2004), caracterizada porque va más allá de lo inmediato, y por la construcción de un modelo coherente

[1] Hemos analizado inicialmente libros de texto propuestos para la ESO de las editoriales: SM, Santillana, y Anaya.

mediante conocimientos geométricos, que permite dar solución a la cuestión central del problema tratado.

En nuestro estudio, nos interesan los problemas espaciales y su solución mediante la modelización espacio-geométrica. Creemos que de este modo podría justificarse la presencia de algunos de los conocimientos geométricos que actualmente se proponen para la ESO. Por ello, decidimos revisar nuevamente el currículo y los manuales escolares de España para rastrear la presencia de este tipo de problemas, a la luz del modelo que propone la TAD. Cabe anotar que este modelo:

> Describe el conocimiento matemático en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas* […] cuyos componentes principales son *tipos de tareas,* T; *técnicas,* τ; *tecnologías,* θ y *teorías,* Θ. […] Las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico "saber-hacer" formado por los tipos de tareas y las técnicas [T/τ] y por un bloque teórico o "saber" formado por el discurso tecnológico-teórico [θ/Θ] que describe, explica y justifica la práctica. (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004)

En nuestra nueva revisión (Rojas & Sierra, 2017), encontramos principalmente que:

- El currículo de secundaria no presenta el estudio de los conocimientos geométricos a partir de tipos de problemas o tareas, donde la mejor solución pase por utilizar dichos conocimientos, sino, donde los datos, fórmulas y la técnica que conducen a ella, vienen dados de antemano.
- La mayoría de las tareas propuestas, invitan a replicar la misma técnica (i.e., ver, reproducir, aplicar una fórmula)
- Algunas de las situaciones presentes en los manuales escolares que vinculan datos y eventos reales resultan situaciones pseudo reales, es decir, no constituyen *verdaderos* problemas espaciales, puesto que en el mismo texto se sugiere el conocimiento geométrico a utilizar.
- Las tareas y técnicas propuestas en los manuales escolares se justifican entre sí, por lo que aparentemente su aplicabilidad y sentido están limitadas a ellas mismas. Por ejemplo, se definen

las razones trigonométricas y se usan para calcular la medida de los lados o ángulos en un triángulo rectángulo.

Concluimos, que los problemas espaciales no se contemplan como una alternativa para justificar la presencia de los conocimientos geométricos que actualmente se proponen para la ESO.

3. Los problemas espaciales y los conocimientos geométricos

En M. H. Salin (2004), se explica qué son los conocimientos espaciales y geométricos y la relación que existe entre ellos. Así se indica que los conocimientos geométricos pueden surgir como herramientas para resolver los problemas espaciales. Los problemas espaciales, vienen caracterizados porque se presentan dentro del espacio sensible, es decir, el espacio que contiene los objetos y es accesible por medio de los sentidos, contemplan acciones como fabricar, desplazar o representar objetos, etc., situarse, desplazarse, o también comunicaciones sobre dichas acciones, y su solución es verificable mediante la comparación del resultado obtenido y el esperado. Son tipos de tareas a los que se suele enfrentar el cristalero, carpintero, fontanero, etc. en su labor diaria.

G. Brousseau (2000), plantea que los problemas espaciales son aquellos “en cuya solución [se] requiere efectivamente de la implementación de un conocimiento que el observador reconoce como bien descrito por un saber de naturaleza espacial y más particularmente geométrica” (p. 6)[2]. Por ejemplo, la situación en donde un estudiante necesita una ficha trapezoidal de un rompecabezas, y debe describírsela a su compañero (quien la ve junto con otras piezas) para obtenerla, depende de ciertas circunstancias precisas. Así, si solo hay una pieza para elegir, la descripción sobra; si las que hay conforman pequeños grupos, bastará con pedir el trapecio, sin que ello esté indicando que se conozcan sus propiedades; pero, “si la pieza que falta se debe dibujar y cortar en un cartón, los conocimientos espaciales y una cierta cultura geométrica resultan esenciales para ambos niños” (p. 6)[3].

[2] Traducción propia.

[3] Traducción propia.

La relación que se establece entre los problemas (Salin, 2004) o las situaciones (Brousseau, 2000) espaciales, y los conocimientos geométricos, forma parte importante de nuestro estudio, debido a los resultados encontrados tras revisar el currículo y algunos manuales de matemáticas propuestos para la ESO. En la enseñanza de la geometría se ponen de relieve tres problemáticas que están en juego (Berthelot & Salin, 2000; Bloch & Salin, 2004), a las que no se suele atender en la escuela de manera global:

- una problemática práctica,
- una geométrica,
- y una de modelización, que busca trascender las soluciones inmediatas mediante el uso de conocimientos geométricos; con la intención de generar modelos comunicables y reproducibles, en términos propios de las matemáticas.

Veamos un ejemplo que ilustra esta relación:
A un cristalero se le encomienda la tarea de construir un cristal rómbico que equivale a plantearle la siguiente cuestión:

Q_1: ¿Cómo proceder para construir el cristal?

El tipo de tareas T = “construir un cristal”, podría llevarse a cabo de manera práctica. En el caso de la tarea t_1 = “construir un cristal rómbico (no cuadrado)” puede utilizarse la técnica τ_{10} = “trazar sobre una pieza de papel la forma y tamaño que debe tener el cristal”. Además de ser costosa, τ_{10} corre el riesgo de conducir a la construcción de un cristal que no encaje en su lugar de destino, es decir, se trata de una técnica poco fiable.

Otra técnica posible es τ_{11} = “tomar la medida de un lado del rombo y de uno de los ángulos”. Pero esta técnica es poco fiable también ya que en la práctica es difícil medir con precisión la amplitud de un ángulo.

Podemos realizar también t_1 mediante la técnica τ_{12} = “medir las diagonales del rombo y dibujarlas sobre un cristal de manera que se corten perpendicularmente en sus puntos medios”. De este modo tendremos determinados los cuatro vértices del rombo y podremos trazarlo y cortar el cristal. Así, τ_{12} requiere utilizar los conocimientos geométricos necesarios para garantizar que un cuadrilátero convexo sea rombo.

Una variación de esta técnica consiste en construir un rectángulo cuyos lados midan igual que las longitudes de las diagonales del rombo. Para ello disponemos de un instrumento para trazar perpendiculares. Entonces bastará con encontrar los puntos medios de los lados de este rectángulo que coincidirán con los vértices del rombo.

El discurso tecnológico de τ_{12}, que llamaremos θ_{12}, se apoya en la caracterización de la forma y el tamaño de un rombo (Gascón, 2004).

Esta tarea forma parte de un tipo de tareas que se puede formular del siguiente modo:

> Dado un cuadrilátero del que se conoce su “tipo de forma” (rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio, cometa, etc.) cómo reproducirla (forma y tamaño) sobre una superficie plana si solo disponemos de un instrumento para medir longitudes y de otro para trazar perpendiculares. No disponemos de un instrumento para medir de manera fiable para medir ángulos.

Para resolver alguna de las tareas de este tipo será necesario variar la técnica τ_{12} incluyendo en entre otras cosas el uso del teorema de Pitágoras.

4. Pregunta de investigación y primera hipótesis

Con base en lo enunciado hasta ahora, nos hemos planteado la siguiente hipótesis:

> Existen problemas espaciales que pueden constituirse en una posible razón de ser de algunos de los conocimientos geométricos escolares referidos en el currículo la ESO.

En correspondencia con esta hipótesis, hemos propuesto algunas preguntas a las que pretendemos dar respuesta con nuestra investigación, a saber:

> ¿Cuáles son los tipos de problemas espaciales a los que se enfrentan las personas en las distintas profesiones manuales? ¿Qué técnicas permiten resolverlos y cuál es su dominio de validez y su grado de eficacia? ¿Cuáles de estas técnicas hacen referencia a los

conocimientos geométricos? ¿Cuáles son los elementos tecnológicos que permiten explicar, justificar y hacer más comprensibles dichas técnicas?

La identificación y estructuración de los problemas espaciales que hagan de los conocimientos geométricos una necesidad resulta una tarea difícil, máxime si tenemos en cuenta que:

> Una característica importante de la enseñanza del espacio y la geometría en la escuela primaria [como en la secundaria], es la de subestimar la dificultad en la adquisición de los conocimientos espaciales, y dejar al alumno la responsabilidad de establecer las relaciones adecuadas entre el espacio y los conceptos que se le enseñan. (Salin, 2004, p. 51)

Actualmente nos encontramos en esta búsqueda, que, por el momento, nos está llevando al estudio y análisis de un tipo de tareas en el ámbito del oficio de cristalero, con el objetivo de diseñar e implementar un recorrido de estudio e investigación con alumnos de un Instituto de Educación Secundaria de Getafe (Madrid, España).

Referencias

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Doctoral dissertation). Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (2000). L'enseignement de la géométrie au début du collège–Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. *Petit x*, *56*, 5-34.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. Recherches En Didactique Des …, (April), 1–47. Obtenido de http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=16461539

Bloch, I. & Salin, M. H. (2004). Espace et géométrie: Géométrie dans le méso-espace à l'école primaire et au début du collège. En *Actes du 30e Colloque de la COPIRELEM Avignon 2000.*

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. En *Actes du 2e*

colloque de didactique des mathématiques; Université de Crète (département de l'éducation), (pp. 67-83).
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/document

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161 -182. doi: 10.4471 /redimat.2013.26

MECD. (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. España: Boletín Oficial del Estado.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis doctoral). Centro de Investigaciones del IPN, México.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Suma, 45,* 41-52.

Rojas, C., y Sierra, T., (2017). *Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria*. Comunicación presentada al XXI Simposio de la Sociedad de Investigación en Educación Matemática, Zaragoza, España.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En J. López (Coord.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Assessment of mediated interactivity within the scope of the Anthropological Theory of Didactics

César Augusto Delgado García

Departament of mathematics, Universidad del Valle and Universidad San Buenaventura, Colombia

Liliana Patricia Ospina Marulanda

Bachelors degree in mathematics, Universidad del Quindío and Universidad San Buenaventura, Colombia

Abstract. We present progress made in doctoral thesis «Configuration of the assessment practices of mathematics teachers at university». Preliminary analysis shows the predominance of «summative assessment» of learning, content-centered, aside from the *teaching* and *study activities*, producing poor operative learning outcomes. This didactic phenomenon entails the problem of establishing the conditions and constraints that hinder the development of a more functional kind of assessment that mediates these activities and obtain more *operational learning*. Finally, we construct the concept of *assessment of mediated interactivity* as a contribution to the design and management of didactic and mathematical praxeology.

Resumen. Presentamos los avances de la tesis doctoral: «Configuración de las prácticas evaluativas de los profesores de matemáticas en la universidad». Los análisis preliminares ponen de manifiesto el predominio de la «evaluación sumativa», centrada en contenidos, al margen de las *actividades de enseñar y estudiar*, produciendo aprendizajes poco operativos. Este fenómeno didáctico conduce a plantear el problema de establecer las condiciones y restricciones que dificultan o impiden el desarrollo de una evaluación más funcional, que medie en dichas actividades y logre *aprendizajes más operativos*. Finalmente, construimos el concepto de *evaluación de la interactividad mediada* como aporte al diseño de praxeologías didácticas y matemáticas.

Résumé. Nous présentons des progrès réalisés dans la thèse de doctorat «Configuration des pratiques d'évaluation des professeurs de mathématiques dans l'université». Les analyses préliminaires montrent la prédominance de «l'évaluation sommative» basée sur le contenu, en dehors des *activités d'enseignement et d'étude*, produisant un apprentissage peu opérationnels. Ce phénomène didactique conduit au besoin d'établir quelles sont les conditions et les restrictions qui entravent le développement d'une évaluation plus fonctionnelle et au même temps intervenir dans ces activités pour obtenir un apprentissage plus opérationnel. Enfin, on construit le concept d'évaluation de l'interactivité médiatisée comme contribution à la conception de praxéologies didactiques et mathématiques.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Research Problem

The assessment of school mathematics is traditionally conceived as a technical and instrumental process whose function is to provide information on learning outcomes according to predetermined objectives and to generate a verdict. Which means, that the dominant assessment is *summative* assessment, considered outside the teaching and study activities, whose function is of measurement and classification. It is to emphasize that this type of assessment corresponds to the currently dominant didactic paradigm that metaphorically is assimilated to the «visiting works as monuments», consisting of pieces of knowledge that are exposed to students, exemplifies their use and is expected that the student master, on their own, the applications of such knowledge to different situations where they are needed, Yves Chevallard (2015) calls this procedure «*monumentalist paradigm*». This paradigm is opposed to the reconstruction of mathematical works starting from questions whose answers are not available to the student, but are necessary to solve a whole class of situations and such answers can be reached with the help of an expert and actions with the peers, this way of proceeding is called «*paradigm questioning the world*».

This nascent paradigm is in correspondence with the definition of the mathematics from a pedagogical point of view, proposed by Guershon Harel (2008) according to which the mathematics would be formed by two subsets: one the «*ways of understanding*» (*WoU*) formed by axioms, formal definitions, theorems, proofs, problems and solutions, that have been the product of mental acts like −infer, deduce, interpret, generalize, etc. − and the subset of «*ways of thinking*» (*WoT*) whose elements are cognitive characteristics of the mental acts they produce those *WoU*. In light of this definition and the research that reveals the mastery of the monumentalist paradigm, it can be said that both the teaching and learning assessment processes *focus on institutional contents −WoU−* and the *WoT* are neglected.

On the other hand, in reviewing the antecedents it is inferred that the dominant «*didactic contract*» (Guy Brousseau, 1986) is characterized by *exempting from the didactic responsibility of the teacher and blaming the student* for the results. In other words, the assessment does not consider the relationship between educational «*mediation*» (César Coll, Rosa Colomina, Javier Onrubia y José Rochera, 1995), the study activity and its results. Consequently, our problem is expressed in the following questions:

- ✓ What are the *characteristics of the institutional praxeologies that are expressed in the* dominant «*didactic contract*» in relation to the processes of assessment of the learning of mathematics at the university level?
- ✓ What *conditions are required and what restrictions hinder or prevent* the assessment in mathematics from mediating the teaching and study activities for the acquisition of learning?
- ✓ What kind of didactic contract would make possible assessment processes that measure in the activity of teaching, the activity of study and the learning in the systems of education?

These questions make sense if one assumes that external or internal agents influence the school environment; so it is important to carry out the analysis in the hierarchy of *levels of mathematical-didactic co-determination* proposed by Chevallard (2002); in which exist the school mathematical organizations (*MO*) and the corresponding didactic organizations (*DO*).

Therefore, we consider that, in order to investigate *the assessment practices of the mathematics teacher*, it is necessary to model the didactic praxeology of the institution, according to what Marianna Bosch and Josep Gascón (2001) refer that spontaneous praxeology −tasks, techniques, technologies and theories− depends on the subjection of this to other institutions. For which it is significant the analysis of theoretical and empirical data, related to the set of conditions and restrictions that influence the way in which the evaluative practices in *mathematics at university level are derived from* praxeology *the social, scholastic, pedagogic, disciplinary institutions*.

2. Methodology

Qualitative, descriptive and explanatory. It is about analysing the theoretical and empirical data that emerge from the institutions at the different levels of the codetermination scale indicated by the TAD in order to study the configuration of assessment practices at the university level. We consider four *dimensions*: anthropological, didactic, epistemological and socio-cognitive, which makes it necessary to consider a *system of units of analysis* being the central unit the «*local praxeology*», in the *subject* of the derivative. The *general objective* is to conform a vision that accounts for the conditions and restrictions resulting from the transposition, in relation to the assessment processes in university mathematics.

3. Contributions to the theory

It is inferred from previous approaches that it is necessary to generate changes at the level of assessment that impact the educational systems. In this sense, there is a call to propose an evaluation that articulates the *teaching activity*, the *study activity* around its objective, the learning, which we have called the *assessment of mediated interactivity* (AMI), whose function would be to *regulate* these two activities, so that more operational learning is achieved. Thus, it is an assessment that generates and feeds a *dialectic* between the *actions of the teacher* -or a more experienced pair- and the *actions of the student*, where the former are aimed at helping the student to fill conceptual gaps or generate *disturbances* that make it necessary the modification of the current knowledge states and the second, on the side of the student's actions, are aimed at achieving success by facing the *medium* and thus affects the actions of the teacher that must be adjusted to the state of knowledge of the students to feed them, *validate and institutionalize* the mathematical works of the participants.

Consequently, the assessment focuses on *interactivity* understood as defined by Coll et al, (1995): «[..] the articulation of the actions of teachers and students [...] around a given task or learning content» (p.204) and, in the nature of the *mediation* exerted on it by *systems of practices and cultural artifacts* that, potentially, they can generate tensions with the *current knowledge systems* of the students that maximize the interaction printing a dynamics to the construction of *zones of proximal development* (Lev Vygotski,1930)-ecotones. The assessment of *mediated interactivity* will take into account the mathematical issues that arise in the organization and management of mathematical and didactic works related to certain *ways of understanding* (WoU) of students -observable action, product of mental acts- *and ways of think* (WoT) -characteristics of the mental acts that are inferred from observations of the WoU that are repeated-, in order to mediate and build, from them, *Zones of Proximal Development* that bring them closer to the institucional's WoT and WoU.

That is, the function of the AIM would be to ensure the effectiveness of the mediation between the teaching activity and the study activity, so that the expected learning is achieved. Thus, the assessment must look at the *interpersonal process* and the *intrapersonal process*. The interpersonal process will depend, ultimately, of the relationship between *mathematical organisations* and *didactic organisations* proposed by the teacher, which must be kept in constant observation. While the intrapersonal process refers to cognitive perturbation or disequilibrium and re-equilibration related to the didactic and a-didactic environment generated around the issues and situations. It is then a matter of evaluating how the environment -material medium, a-didactic and didactic situations- affects the mental acts related to WoT and WoU of the students, depending on the interactivity. That is to say, of «*the forms of organization of the joint activity of the participants*» (Coll et al, p 205)

4. Expected results

It is expected to provide elements that inform on evaluative practices in the teaching of mathematics in university education, in order to unveil implicit and explicit aspects that regulate these practices from the social, pedagogical, school, disciplinary and personal dimensions.

Therefore, the aim is to fill a vacuum of information in relation to the conditions and restrictions that hinder or prevent the assessment in mathematics from mediating more positively, in the activities of teaching and studying mathematics with the aim that learning is more operative. It is expected then, in light of the findings, to provide theoretical references and empirical evidence that will lead to a better understanding of the role of assessment in educational processes at the university level.

References

Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. (Provisional version of 09/13/01)

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation, *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Corps, Août 2001. Grenoble: La pensée sauvage. pp. 41-56.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In: *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul (Korea): Springer International Publishing. pp. 173-187.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. & Rochera, J. (1995). Actividad conjunta y habla. In: Fernández, B. & Melero, Z. M. (comp.), *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: Siglo XXI. pp. 193-326.

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In: Gold, B. & Simons, R. (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. Washington, DC: Mathematical Association of America. pp. 265-290.

Vygotski, L. S. (1930). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica, 1996.

The place of inquiry in mathematics taught within the International Baccalaureate

Jana Lackova

Equipe DiMaGe, Université de Genève, Suisse

Abstract. Traditional teaching seems to prevail over problem-solving, and inquiry-based education struggles in finding a stable place in the classrooms. Our research questions the place of inquiry in a particular institutional context that places it in the heart of its educational philosophy, particularly when it becomes an institutionally recognized object, sanctioned by a summative assessment.

Résumé. L'enseignement traditionnel semble prévaloir sur la résolution de problèmes, et la démarche d'investigation lutte pour trouver une place stable dans les classes. Notre recherche questionne la place de la démarche d'investigation dans un contexte institutionnel particulier qui la place au cœur de sa philosophie éducative, en particulier lorsqu'elle devient un objet institutionnellement reconnu, sanctionné par une évaluation sommative.

Resumen. La enseñanza tradicional parece prevalecer sobre la resolución de problemas, y el aprendizaje por investigación lucha por encontrar un lugar estable en las clases. Nuestra investigación cuestiona la posición del aprendizaje por investigación en un contexto institucional particular que lo sitúa en el centro de su filosofía educativa, en particular cuando se convierte en un objeto institucional reconocido, sujeto a una evaluación sumativa.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introduction

In recent years, several European projects (Fibonacci, PRIMAS, S-Team, etc.) were conducted in order to promote inquiry-based mathematics and science education. Inquiry-based education (IBE) unlike transmissive instructional methods, aims to make students active in building knowledge by putting them in a research situation (Dorier & Maass, 2014). Because of its strong political promotion, Artigue and Blomhøj (2013, p. 798) emphasize the importance of research in mathematics and science education, especially when it comes to the pedagogical background and learning outcomes of IBE.

In our thesis, we question the place of inquiry in the context of the International Baccalaureate (IB) and focus on the place of IBE in mathematics classrooms when it becomes an institutionally recognized object, sanctioned by a summative assessment.

2. The institutional context

The IB is a non-profit educational foundation established in Geneva in 1968 to meet the needs of international schools and the international community. The IB offers four educational programs for students aged from 3 to 19, thus covering all levels of education. In this context, we chose to focus on the Diploma Program (DP) intended for students aged 16-19. Its successful achievement leads to a diploma that provides access to higher education.

The IB represents a particular institutional context that emphasizes the development of skills such as critical reflection or research skills through teaching that reflects pedagogical principles based on inquiry (IB, 2015). In addition, it is one of the few institutions that requires a summative assessment of inquiry-specific nature in mathematics, compulsory for all students and contributing to 20% of the final grade. The internal assessment (IA) is “a piece of written work that involves investigating an area of mathematics” (IBO, 2012, p. 43). Its main objective is to evaluate students’ performances and skills that are impossible to assess through written examinations or tests. On top of that, it “should, as far as possible, be woven into normal classroom teaching and not be a separate activity conducted after a course has been taught” (ibid.). In our research we aim at identifying and analyzing the conditions and constraints of the implementation of inquiry-based activities in mathematics classrooms and in particular the influence of the IA in the integration of IBE in day-to-day teaching.

3. The institutional analysis

We will now provide an insight into the institution and interpret it in the light of Chevallard's (2004) scale of didactic co-determination. Changes in the life of the post-war society, such as the development of international trade and non-governmental organizations, have contributed to an increased international mobility. Places in universities have become more coveted and as a result, new educational needs for the children of the expatriate community appeared. In the sixties, the prevailing educational model was the encyclopaedic approach of the German *Abitur* or the French *Baccalauréat*, characterized by the transmission of information over a wide range of subjects. The first General Guide to the International Baccalaureate states that "the weight of available information in each discipline is such that an encyclopaedic approach to education is not only out-dated but inappropriate: learning how to learn has now become the prime function of school education" (IBO, 1970, p.21-22, in Fox, 1985, p.58). The IB was facing a great challenge: to put together a curriculum and an examination that would "encourage the teaching of *minds well formed* rather than *minds well stuffed*" (Peterson, 2003, p. 43). According to Hill (2002), parents wanted their children to receive education that reflected the ideals of the international organizations that hired them. It was clear, as he points out,

> […] that a new pedagogical approach was needed to promote international understanding, […]: critical inquiry coupled with an open mind willing to question established beliefs, willing to withdraw from conventional positions in the light of new evidence and experiences, willing to accept that being different does not mean being wrong » (ibid., p.19).

Fox (1985, p. 56), however, brings up that alongside the international ideals, parents were also concerned by the academic content on which depended the acceptance of their children to universities. Here, we can see how the happening at the *civilisation* level of the didactic co-determination scale shaped the educational philosophy of IB and had "a profound effect on the planning of curricula and methods of assessment" (Peterson, 2003, p. 41).

Having analysed certain elements at the upper levels of didactic co-determination scale we consider the IB as an institution that carries the genetic code of IBE in its educational philosophy and expect it to have repercussion at the lower levels of this scale.

4. Research issues and research questions

4.1. Research issues

Despite numerous initiatives and projects over the last decade, traditional teaching seems to prevail over problem-solving, and IBE struggles in finding a stable place in the classrooms (Dorier & Maass, 2014). Tabulawa (2013) attempts to explain the failure of the school reform in sub-Saharan Africa, adapting an approach developed by Hoyle (1969) based on using medical terms such as *tissue rejection* and *immunological condition* transferred to the context of education. Hoyle (ibid.) advances that *tissue rejection* occurs "because the social system of the school is unable to absorb it into its normal functioning"(p.231). Tabulawa (2013) explains that the intended innovations often carry a radically new *code* and require a too radical shift from the values or past experiences of the *host*. However, if there was already some openness in the host, the confrontation would be less radical and the new code could get accepted. Chevallard (2013) points out that the paradigm currently dominating the school study is that of *visiting monuments* where the role of the teacher is to show the mathematical works designated to be taught to the students. Since IBE represents a paradigm of study that is radically opposed to visiting monuments, according to Wozniak (2015), the conditions relating to *topogenesis, mesogenesis and chronogenesis* convey a significant change, it is not a surprise that the implementation of IBE often encounters resistance of the host environment.

4.2. Research questions

From the institutional analysis and research issues, arise the following research questions:

Question 1:

- What are the institutional praxeologies concerning completing the IA requirement?
- How are these carried out by the teachers?
- Are there any personal praxeologies of teachers that foster inquiry in regular classes?

Question 2:

- To what extent does the IA requirement affect the regular classroom practices and contribute to sustaining inquiry in regular classes?
- What are the teachers' reactions towards the IA requirement?
- Do they execute it as a more-or-less tolerated constraint or do they appreciate its pedagogical value?

Question 3:

- How does prior experience with specific inquiry objectives of the teacher and/or the students affect their relation to the IA requirement?

5. The research design

According to Bosch and Gascon (2002), one cannot correctly interpret teaching practices without studying the institution in which the teacher practices her profession. For this reason our research began with an in-depth analysis of the institutional context of the IB based on official texts and interviews with the actors of the noosphere. In order to complete our vision of the institution, we will build a questionnaire to address the declared teaching practices of mathematics teachers working in different IB schools.

Afterwards we will conduct a case study considering two campuses of the International School of Geneva (Ecolint). We plan to collect data through semi-directed interviews with the department heads and the teachers in order to complete and clarify the information from the questionnaire and through video recorded observations of the intended teaching sequence for the completion of the IA requirement.

6. Theoretical approach

To describe the declared and observed teachers' practices in terms of praxeologies and identify those praxeologies that foster inquiry in the classroom, we need a tool that would enable us to identify the pro-inquiry praxeologies. With this tool we want to *a priori* estimate how much inquiry potential a suggested activity carries and measure the amount of inquiry actually present in the classroom. For this we decided to combine the five activity potentials developed by Georget (2009, p. 76) and the dialectics relative to the conditions on the chronogenesis, mesogenesis and topogenesis (Wozniak, 2015). The table 1 shows how each of the five potentials are linked to a given dialectics or a mathematical organization. This is obviously only a working version that needs further refinement.

A priori analysis				
Research potential	Resistance potential	Dynamic resistance potential	Debate potential	Didactic potential
Chronogenesis	Mesogenesis		Topogenesis	
question-answer dialectics	media-milieu dialectics		teacher-student roles dialectics	Local mathematical organisation
Observation grid				

Table 1: Analysis tool

7. Conclusion

After an informal visit and introductory interviews with the heads of the mathematics departments of Ecolint we realized that implementing IBE is not so obvious even for an institution such as IB. It seems that the dominant paradigm of the first campus is the one of visiting monuments and an important resistance of the teachers to any change was mentioned. The IA is considered as an inevitable evil that is executed because required. The second campus seems to be more open towards inquiry because of the prior experience of inquiry-based approach through the IB middle years programme without the pressure of an approaching examination. The comparison of the praxeologies at the two campuses might help to explain the conditions and constraints that necessary accompany a successful implementation of IBE.

References

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797‑810.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin, *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*. Paris: APMEP.

Chevallard, Y. (2013). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques. In A. Bronner, C. Bulf, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat, & E. Roditi (Éd.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (Vol. 1, p. 85‑120). La Pensée Sauvage.

Dorier, J.-L., & Maass, K. (2014). Inquiry-Based Mathematics Education. In S. Lerman (Éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 300‑304). Netherlands: Springer.

Fox, E. (1985). International Schools and the International Baccalaureate. *Harvard Educational Review*, *55*(1), 53‑69.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Université Paris-Diderot - Paris VII.

Hill, I. (2002). The history of international education: an international baccalaureate perspective. In M. Hayden, J. Thompson, & G. Walker, *International Education in Practice: dimensions for national & international schools* (Kogan Page, p. 18‑29). London.

Hoyle, E. (1969). How does the Curriculum Change? 2. Systems and Strategies. *Journal of Curriculum Studies*, *1*(3), 230‑239.

IB. (2015). Approaches to teaching and learning in the Diploma Programme. International Baccalaureate.

IBO. (2012). Diploma Programme Mathematics SL guide. International Baccalaureate Organization.

Peterson, A. D. C. (2003). *Schools Across Frontiers: The Story of the International Baccalaureate and the United World Colleges*. Open Court Publishing.

Tabulawa, R. (2013). *Teaching and Learning in Context: Why Pedagogical Reforms Fail in Sub-Saharan Africa*. African Books Collective.

Wozniak, F. (2015). La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche. *Recherches en éducation*, (21), 152‑165.

A comparison of lower secondary textbooks from Japan and England: the case of symmetry and transformations

Haruka Takeuchi

Mathematics education, Osaka Kyoiku University, Japan

Yusuke Shinno

Mathematics education, Osaka Kyoiku University, Japan

Abstract.

This study investigates and compares knowledge in textbooks from Japan and England, focusing on symmetry and transformations at lower secondary level. We adopt the two constructs of the Anthropological Theory of the Didactic: the *praxeology* and the *levels of didactic codetermination*. The results show that the sector symmetry and transformation in both countries share the common theory “isometry”, but that different technologies are identified: a technology in Japan has a close relationship to “geometrical proofs”, while another technology in England has a close relationship to “vectors” or “coordinates”. In our poster presentation, we would like to discuss the reason why these differences and gaps exist.

Résumé.

Cette étude examine et compare les connaissances dans les manuels scolaires du Japon et de l'Angleterre, en se concentrant sur la symétrie et les transformations au niveau secondaire inférieur. Nous adoptons les deux constructions de la Théorie Anthropologique de la Didactique: la praxéologie et les niveaux de la codétermination didactique. Les résultats montrent que la symétrie et la transformation du secteur dans les deux pays partagent la théorie commune «isométrie», mais que les différentes technologies sont identifiées: une technologie au Japon a une relation étroite avec les «preuves géométriques», tandis qu'une autre technologie en Angleterre a une relation étroite à "vecteurs" ou "coordonnées". Dans notre présentation d'affiches, nous aimerions discuter de la raison pour laquelle ces différences et ces lacunes existent.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. Introduction

This study investigates knowledge of symmetry and transformations in lower secondary textbooks from two specific countries: Japan and England. In both countries' curricula, symmetry and transformations are included in the domain of geometry. A recent comparative study on geometry curricula in England and Japan reports that "in England the geometrical content covers various shapes, transformations and measurement, whereas in Japan the content focuses unswervingly on geometric proof" (Keith Jones & Taro Fujita, 2013, p. 680). Our final goal of the comparative study is to clarify the conditions and constraints of mathematical proof across the domains in the Japanese curriculum. This presentation is first steps toward a reference epistemological model regarding symmetry and transformations.

Although symmetry and transformations are central to mathematics, the teaching and learning of these concepts are still under-represented in the curriculum of Japan. In the curriculum and textbooks used in England, these concepts are very differently situated. Therefore, we assume that symmetry and transformations can be considered as the key contents which may characterise the two countries' geometry curricula. By comparing the textbooks from these two countries, we will provide some information on the similarities and differences in the textbooks from a praxeological point of view. It is also important for us to consider the international comparison from different institutional levels of codetermination, since the similarities and differences can be differently identified by different institutional levels.

2. Educational contexts in Japan and England

There are important differences in the lower secondary educational systems and mathematics textbooks in Japan and England. In Japan, lower secondary education consists of Grades 7 to 9 (ages 12 to 15), and all textbooks must be authorized by the Ministry of Education. At this time, there are seven different mathematics textbook series for lower secondary schools, each published by a different company.

In England, secondary education includes Grades 7 through 11 (ages 11 to 16), and textbooks are provided by a wide range of publishers. There is no official governmental agency that approves textbooks.

3. Theoretical background and method of analysis

3.1. Theoretical framework

In the present study, we adopt two constructs from the Anthropological Theory of the Didactic (ATD): the concept of *praxeology* and the *levels of didactic codetermination*. These constructs can be effectively used for international comparative studies (Michéle Artigue & Carl Winslow, 2010). A praxeology consists of two blocks: a praxis block formed by a type of task (**T**) and a technique (**τ**) for performing the task, and a logos block formed by a technology (**θ**) for explaining and justifying the aforementioned technique, as well as a theory for explaining, justifying, and generating whatever part of the technology may seem unobvious or missing (Yves Chevallard & Gérard Sensevy, 2014, p. 40).

In a praxeological analysis, it is useful to consider different delimitations, depending on the activities or knowledge at stake. To do so, “a distinction is made between ‘point praxeology’ (containing a single type of task), a ‘local praxeology’ (containing a set of types of task organized around a common technological discourse) and a ‘regional praxeology’ (containing all point and local praxeologies that share a common theory)” (Marianna Bosch & Josep Gascón, 2014, p. 69).

Didactic codetermination distinguishes nine institutional levels (Figure 1) in which conditions and constraints interact with each other (Artigue & Winslow, 2010; Bosch & Gascón, 2014).

Subject ⇆ Theme ⇆ Sector ⇆ Domain ⇆ Discipline ⇆ Pedagogy ⇆ School ⇆ Society ⇆ Civilization

Figure 1. Levels of codetermination (adapted from Bosch and Gascón (2014, p. 73))

In the present study, we will mainly consider mathematical praxeologies at lower levels such as domain, sector, theme, and subject. According to Artigue and Winslow (2010), a domain can be determined by a collection of regional praxeologies, a sector is characterised by one regional praxeology, a theme refers to one local praxeology, and a subject is concentrated on a point praxeology. In our study, "geometry" can be understood as a domain in the curriculum, "symmetry and transformations" as a sector (which should be specified in the chapters from the textbooks), "reflective symmetry" as a theme, and a subject is taken from the problem described in the textbook.

3.2. Method of analysis

The main data to be analysed are taken from lower secondary mathematics textbooks. For the textbooks from Japan, we chose Keirinkan's *Gateway to the future: Math* series (2012). For England, we chose Cambridge University Press's *SMP Interact* series (2010). For Japan, since the content about symmetry is included in the primary level, we also chose a primary textbook series: Keirinkan's *Fun with Math* (2010). These textbook series are well-known in each country's mathematics education community.

It should be noted that one chapter related to symmetry is included in the Japanese textbook for Grade 6, whereas two chapters are included in the English textbook for Grade 7. Additionally, one chapter regarding transformations is included in the Japanese textbook for Grade 7, whereas there are two chapters related to transformations in the English textbook in Grade 7 and 9. Using the data from the two countries' textbooks, we will identify the four elements of praxeology and characterise the nature of mathematical praxeologies according to the levels of codetermination.

4. Results of analysis

4.1. Point praxeologies

Symmetry

In terms of a point praxeology, "to identify symmetrical shapes (**T1**)" and "to draw the symmetrical shape (**T2**)" are common types of task in both countries, while "to find the corresponding points and lines" (**T3**) (e.g., Figure 2) is a type of task which exists only in Japan. Other differences can be found in the subject of "rotation symmetry", since the Japanese textbook for Grade 6 only includes "point symmetry", which means that rotation symmetry at this grade is restricted to "180° rotation".

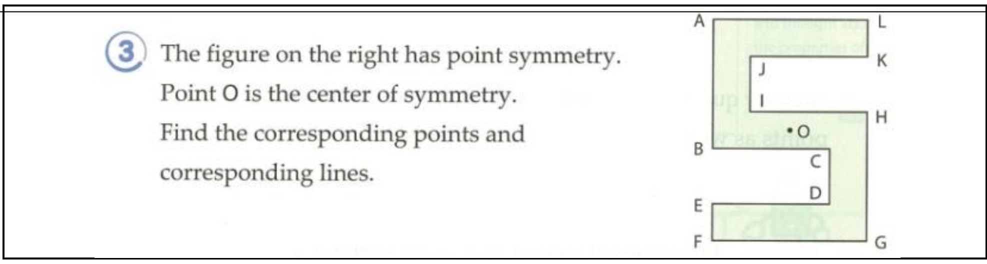
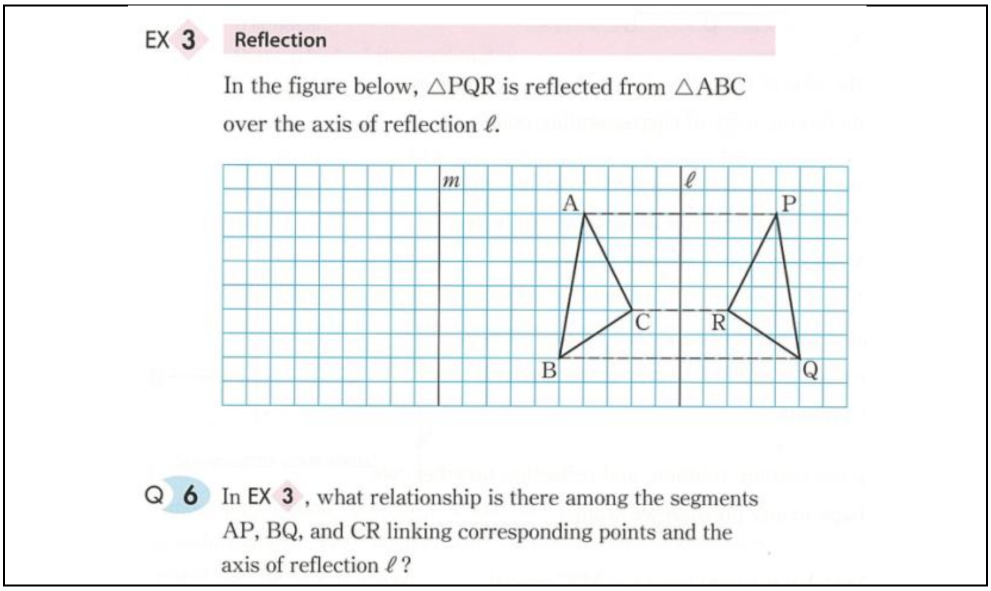


Figure 2. Point symmetry in Grade 6 in Japan (Keirinkan, 2012, p. 13)[1]

Transformations

In terms of a point praxeology, "to draw the shape that is transformed (translated, rotated, and reflected)" (**T4**) and "to describe a (single or pair of) transformation(s) that will map one shape to another" (**T5**) are common types of task in both countries, whereas a task such as "to describe a property of a given transformation (translation, rotation, and reflection)" (**T6**) (e.g., Figure 3) is found only in Japan and "to represent a given translation as a column vector" (**T7**) (e.g., Figure 4) is found only in England. There are some other differences in "transformations", since some types of task in England are situated in the context of coordinates, such as Figure 5, whereas there is no such context in Japan. Figure 5 also contains the task "to replace a single transformation as a reflection followed by a rotation" (**T8**).



[1] The excerpts from textbooks in Japan are taken from the English translations published by the original company, Keirinkan, in 2012 for primary and 2014 for lower secondary. More excerpts from both countries will be appeared in the digital poster.

Figure 3. Reflection in Grade 7 in Japan (Keirinkan, 2014, p. 135)

E4 You want to translate shape R on to shape S.
You can use three out of these four vectors.

$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$

(a) Which three vectors do you need?
(b) Does it matter which order you use them?

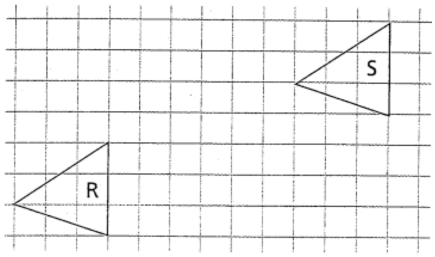
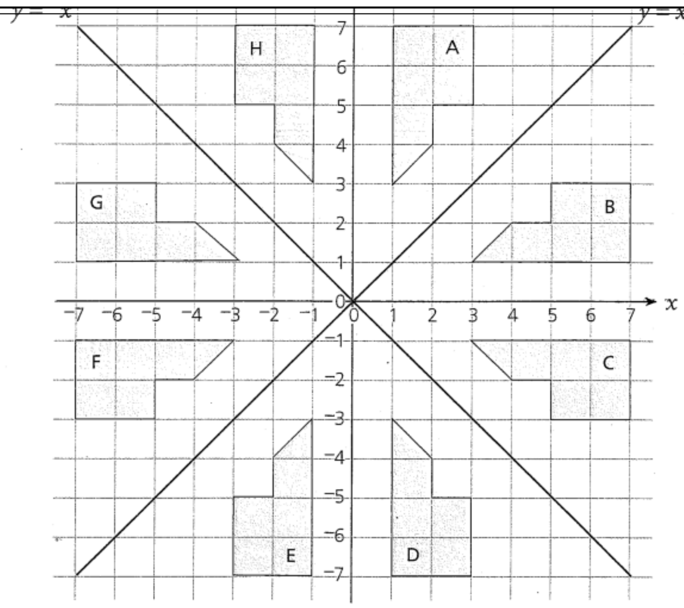


Figure 4. Translation in Grade 9 in England (Cambridge, 2010a, p. 163)



E12 (a) (i) Reflect shape A in the y-axis and then rotate the image 180° about (0, 0). What shape is the final image of A?

(ii) Repeat (i) for a different shape on the grid.

(b) What single transformation could replace a reflection in the y-axis followed by a rotation of 180° about (0, 0)?

E13 (a) (i) What is the image of shape C after a reflection in the line $y = {}^{-}x$ followed by a clockwise rotation of 90° about (0, 0)?

(ii) Repeat (i) for a different shape on the grid.

(b) What single transformation could replace a reflection in the line $y = {}^{-}x$ followed by

Figure 5. Combining transformations in Grade 9 in England (Cambridge, 2010b, p. 165)

4.2. Local and regional praxeologies

In terms of a local praxeology, a set of task types for the theme of symmetry in both countries can be organised by a common technological discourse such that “symmetry conserves lengths and angles” (**θ1**) (cf. Gérard Vergnaud, 2009, p. 91). On the theme of transformations, T4 and T5 share the same technology θ1. However, as far as reflection in T6 is concerned, it is organized by another technological discourse such that “the axis of reflection is the perpendicular bisector of the segments linking pairs of corresponding points” (**θ2**). This technology (θ2) is explicitly described as a property of reflection in the textbook. Additionally, T7 is found in England and organized by a technology such that “translation is interpreted as additions of column vector” (**θ3**). In terms of a regional praxeology, all point and local praxeologies in both countries share a common theory, which is “isometry” or “congruence transformation” in this sector.

5. Final remarks

In our analysis, the sector "symmetry and transformations" shares a common theory in Japan and England, but different technological discourses (θ1, θ2, θ3) are identified in each country. It seems that θ2 has a close relationship to another sector "geometric proof" in Japan, and θ3 has a close relationship to another sector "vector" or "coordinate" in England. There are epistemological gaps between these technologies. To clarify such aspects, further research is needed to elaborate a reference epistemological model, by considering higher levels of codetermination in each country.

References

Artigue, M., & Winslow, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: a viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *30*(1), 47-82.

Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs and S. Prediger (eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67-83). Switzerland: Springer.

Cambridge (2010a). *SMP Interact 7S.* Cambridge University Press.

Cambridge (2010b). *SMP Interact 9S.* Cambridge University Press.

Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological approaches in mathematics education, French perspectives. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 38–43). New York: Springer.

Keirinkan (2010). *Fun with Math 6A.* Osaka: Keirinkan. (An English translated version is published in 2012).

Keirinkan (2012). *Gateway to the future Math 2.* Osaka: Keirinkan. (An English translated version is published in 2014).

Jones, K. & Fujita, T. (2013). Interpretations of national curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan. *ZDM*, *45*, 671-683.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, *52*, 83-94.

On study and research responsibilities: a case in Japanese upper secondary school

Ryoto Hakamata
Hiroshima University High School, Japan

Koji Otaki
Department of Teachers Training,
Hokkaido University of Education, Japan

Abstract. This presentation aims to identify some students' roles on a study and research path conducted in a Japanese upper secondary high school. Especially, we focus on responsibilities for questioning and answering in their inquiry. For this purpose, we describe the students' inquiry using the tree diagram of questions *Q* and answers *A*. Then, we analyze what kind of students' roles emerged in their activity and discuss why that responsibilities could appear. As a result, we identify two interesting points of their study and research responsibilities: 1) On producing an initial question; 2) On producing temporary answers.

Résumé. Cette présentation vise à identifier les rôles de certains étudiants sur un parcours d'étude et de recherche mené dans un lycée japonais du deuxième cycle du secondaire. Surtout, nous nous concentrons sur les responsabilités en matière de questionnement et de réponse dans leur investigation. À cette fin, nous décrivons l'investigation des élèves en utilisant le diagramme d'arbre des questions *Q* et réponses *R*. Ensuite, nous analysons le type de rôles des élèves qui émergent dans leur activité et discutons pourquoi ces responsabilités pourraient apparaître. En conséquence, nous identifions deux points intéressants de leurs responsabilités d'étude et de recherché : 1) En produisant une question initiale ; 2) En produisant des réponses temporaires.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Editorial, año

1. Background and Research Questions

In this presentation, we report a plan and some results of our ongoing study about students' and teachers' roles in inquiry-based teaching and learning situations. The realization of inquiry-based education is an important issue in not only didactic research of mathematics but also mathematics education practice. In Japan, mathematics and more general curricula emphasize the necessity of inquiry-based pedagogy. Following this educational demand, each high school tries to realize students' autonomous investigation as much as possible. Our research is involved in this kind of didactic endeavor. We are studying the nature and possibility of the *study and research path* (SRP) at a specific course in a Japanese high school, where the first author teaches mathematics.

Our ongoing research especially focuses on the distribution of different kinds of responsibility and its evolution, that is, *topogenesis of knowledge* (cf. Chevallard & Ladage, 2008), in SRP. The SRP has a radically different didactic contract as that of ordinary classroom conducted by traditional teaching formats: transmission, problem-solving and so on (cf. Bosch & Winsløw, 2015). Thus, the topogenesis of knowledge in SRP is probably different from that of the formats. Our research questions are as follows:

– What kinds of students' role do emerge in SRP at a Japanese specific case? How about teachers?

– What difference and similarity are there between SRP organization and traditional one? How about between the SRP in our case and typical SRP?

– Why do such difference and similarity emerge as they are?

2. Main theoretical tool

We use the tree diagram of questions Q and answers A on SRP together with information about main producers of them (cf. Winsløw et al., 2013). In the diagram, any node is some kind of Q or A, and has some kind of color for describing main actor at a considered node. In this paper, we use only two colors: black and white. The black indicates the teacher and the white indicates the student (see Figure 1). And we distinguish three types of answers: ready-made answers $A_i^{\lozenge}$, temporary answers A_j, and final answer $A^{\heartsuit}$ (cf. Barquero & Bosch, 2015). Let us use the diagram for describing inquiry process.

3. Context of our design research

Our study is conducted under constraints of a Japanese high school system where the first author is involved. This school is one of attached schools of Hiroshima University and its students' achievement is generally high. The school is setting an original course called *Kadai-kenkyū* (project study) which aims to educate students' scientific attitude and capacity. At the period focused in our case study (from May, 2017 to September, 2018), 80 students of "Science Class" at eleven and twelve grades participate in this course. Our research target is 40 eleven grade students within them. They make some groups with 3-6 members following their interest and friendship, and each group decides their research topics of natural science including mathematics. Then, each group constructs a fundamental question which will be investigated for one year and a half. Each group includes one supervisor, it is a *didactic system*. Didactic times are 90 minutes per week.

The group supervised by the first author consists of 4 eleven grade students. Their interests for science did not accord initially. But they have been good friends before then and the student being good at mathematics invited the others. Then, they decided to inquire mathematical topics.

4. Description of *Q*/*A*-tree and main actors in there

In this section, we describe temporary process of ongoing study and research by the group mentioned at previous section. This reports the process of SRP during 8 weeks. The theme of the group is the cyclicity in graph theory which is not included in mathematics school curriculum. Unicursal graph is one of the most classic topics in this theory. The method for identifying unicursality of a graph is well known for many Japanese students, but that of multicursality is little recognized. Furthermore, proof of the theorem justifying that method is unknown for almost all of the students. The group focused on this problem, and tried to inquire the conditions of the bicursality.

Before starting the description of the SRP, we briefly explain the inquiry process of the students. First, they started to identify what kinds of graphs are bicursal. That is, they tried to find the necessary and sufficient conditions for being bicursal. Second, they referred to some websites and books in order to search a mathematical and accurate description about unicursal graph. In general, Eulerian graph and semi-Eulerian graph are well known as unicursal graphs. The book which the students read deals with the unicursality of Eulerian graph. So, they tried to understand the claim and that proof. Then they applied the method of proving to the proof of unicursality of semi-Eulerian graph. The detail of their SRP is as follows.

Q_0: What kind of graph is bicursal?

Q_1: What does "bicursal" mean mathematically?

$Q_{1.1}$: To begin with, what does "unicursal" mean mathematically?

$A^{\lozenge}_{1.1}$: A graph is unicursal if and only if the graph is Eulerian or semi-Eulerian.

$Q_{1.1.1}$: What is a Eulerian / semi-Eulerian graph?

$A^{\lozenge}_{1.1.1}$: A vertex of a graph is even (resp. odd) if and only if its degree is even (resp. odd) and a graph is Eulerian if and only if the graph has only even vertices. A graph is semi-Eulerian if and only if the graph has just two odd vertices.

$Q_{1.1.2}$: Why is the Eulerian graph unicursal? (What should we show to prove it mathematically? Or what is the explicit definition of "unicursality"?)

$A^{\lozenge}_{1.1.2}$: We should show there exists a closed trail $T \subset G$ such that $E(T) = E(G)$ ($E(G)$ represents the edge set of a graph G)

$Q_{1.1.2.1}$: What is a trail?

$A^{\lozenge}_{1.1.2.1}$: A walk without repeated edges.

$Q_{1.1.3}$: How can we prove that semi-Eulerian graphs are unicursal?

$A_{1.1.3.1}$: We can obtain an Eulerian trail of a semi-Eulerian graph G if G can be constructed from a Eulerian graph.

$A_{1.1.3.2}$: For a given semi-Eulerian graph, we can obtain a Eulerian graph by integrating the two odd vertices and regarding them as one vertex.

$A_{1.1.3.3}$: For a given semi-Eulerian graph, we can obtain a Eulerian graph by attaching an edge which connects the two odd vertices.

$Q_{1.1.3.3.1}$: Can we find any relationship between Eulerian trails of the obtained Eulerian graph and that of the original semi-Eulerian graph?

$A_{1.1.3.3.1}$: If there exists a Eulerian trail of the obtained Eulerian graph, which has the attached edge at the end, we can obtain a Eulerian trail of the original semi-Eulerian graph by extracting the end edge.

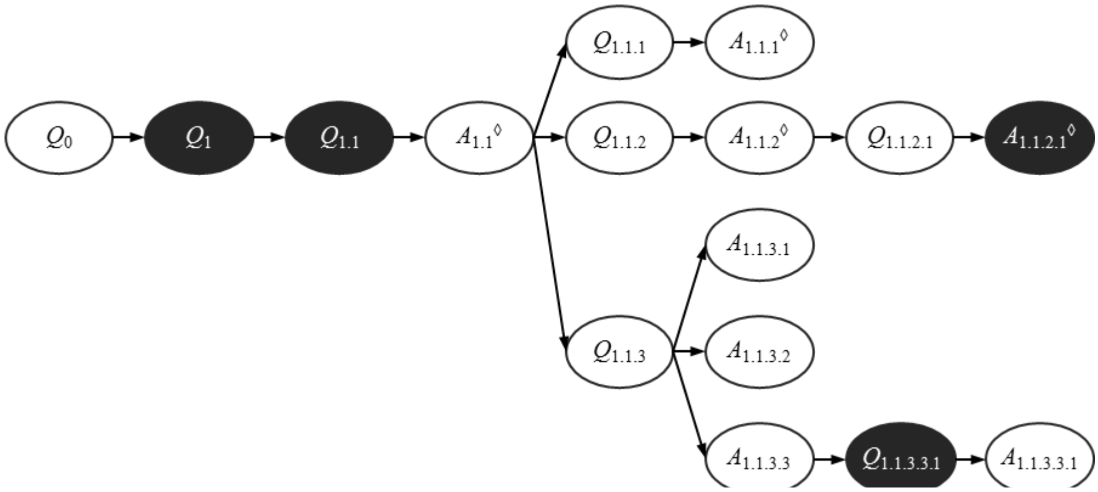


Figure 1. Q/A-tree of SRP around the bicursality problem

5. Discussion

There are two interesting phenomena in this case. The first interesting point is that the initial question does not come from the teacher but from the students, that is to say, students have the *role of producing an initial question*, while initial questions are predetermined by the teacher in many cases of SRP. In this sense, the SRP in our case is closer to scientist inquiry. Why is it possible although it is in the “didactic” context? We conjecture that it comes from a special didactic contract involved in the didactic system of the project study in this school. In this school, each group of the Science Class is required to establish its own research question or task at the beginning of the inquiry. In order to do this, the students 1) look for interesting scientific topics from websites and books, 2) refer to themes that their senior carried out in the project study, and 3) consult teachers. Then, each group chooses a research field and establishes a research question or task. In this sense, the emergence of the initial question from the students was not *adidactic*, that is, due to the contract within the project study.

The second interesting point is that the *role of producing temporary answers* is occupied by students, that is, this is a role with full responsibility or a *topos* of students, although the responsibility of producing questions is shared by students and teachers except about the initial question. The emergence of this *topos* is a common character of this SRP organization and other teaching approaches. This is superficially natural phenomenon in any didactic situation. However, if we consider some Ph.D. program as a typical SRP, then we can notice that this is unnatural in authentic inquiry-based teaching and learning. In the program, supervisors often give their temporary answers to various questions, and then discuss with their students similarities and differences between their temporary answers and their students' answers. Such a dialogue probably has important value for constructing students' own final answers, that is, their doctoral theses and professionalities as a researcher. Nonetheless, the SRP in the project study includes no teacher's temporary answer. We think that it is because of a remembrance of old didactic format of "master and underling" (cf. Chevallard, 2015), which is an institutional constraint. In fact, other parts of teaching organization in this school (e.g., normal mathematics courses) are conducted together with a didactic contract in traditional school pedagogies: a teacher questions and students answer.

As a future task, we will analyze this SRP in more detail. We are trying to identify *topoes* and their evolutions in the students' group. In the target group, each student probably has its own *topos*. For example, we could observe that some roles are not played cooperatively but with high responsibilities for a person: taking the leadership, deciding a direction of the activity, asking a naïve question, summarizing results of the research, and so on.

Acknowledgement

This work is supported by KAKENHI of JSPS (No. JP16K17433 and JP17H02694).

References

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 249-271). Switzerland: Springer.

Bosch, M. & Winsløw, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *35*(3), 357-401.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 173-187). Springer.

Chevallard Y. & Ladage C. (2008). E-learning as a touchstone for didactic theory, and conversely. *Journal of e-Learning and Knowledge Society*, *4*(2), 163-171.

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 267-284.

Les mathématiques vécues dans la topographie : le cas du cours technique intégré à l'enseignement secondaire

Alexandre Luis de Souza Barros
EDUMATEC, Université Fédérale de Pernambuoc, Brésil

Paula Moreira Baltar Bellemain
EDUMATEC, Université Fédérale de Pernambuoc, Brésil

Abstract. This text presents a part of a thesis work currently underway that deals with the life of mathematical knowledge in the course of Topography in technical training at the agricultural college. The institution in which we carry out our research belongs to the Federal Network of Education in Brazil. Our methodological approach is based on interviews, class observations and analysis of official documents. The analyzes presented here concern situations on the construction of a right angle on flat ground. The results show the need to discuss, among other aspects, the use of measurement instruments in activities that require the use of mathematics.

Résumé. Ce texte présente une partie d'un travail de thèse, en cours, qui porte sur la vie de savoirs mathématiques dans le cours de Topographie en formation technique au lycée agricole. L'établissement dans lequel nous réalisons notre recherche appartient au réseau Fédéral de l'Éducation au Brésil. Notre parcours méthodologique s'appuie sur des interviewes, des observations de classes et l'analyse de documents officiels. Les analyses présentés ici concernent des situations sur la construction d'un angle droit sur un terrain plat. Les résultats montrent le besoin de discuter, entre autres aspects, l'utilisation des instruments de mesures dans les activités qui demandent l'emploi des mathématiques.

1. Introduction

Ce texte résulte de la recherche d'un doctorat, en cours, dans lequel nous discutons de la mobilisation de connaissances mathématiques par des lycéens en formation professionnelle technique agricole. La motivation première de notre recherche est un questionnements concernant les

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

difficultés des élèves des cours techniques lors de l'emploi des savoirs mathématiques.

Actuellement, l'enseignement technique brésilien est sur le point de subir des changements (Brasil 2017). Cependant, ces changements ne concernent pas notre étude, car ils ne seront mis en place qu'en 2018.

Les réflexions de notre travail ciblent l'état dans lequel se trouve l'enseignement secondaire, les trois classes finales du lycée, de caractère propédeutique, et la formation Professionnelle et Technologique, celle-ci offerte à divers niveaux et sous différentes modalités. En ce qui concerne la formation secondaire, dénommée Éducation Professionnelle Technique de Niveau Moyen, elle peut être offerte en deux formes intégrées ou articulées au lycée (étudiants de 15 à 17 ans).

2. Cadre Théorique

Nous adoptons le postulat de la théorie anthropologique du didactique selon lequel toute activité humaine (y compris l'activité mathématique et l'activité d'étude) peut être modélisée par les praxéologies (Chevallard, 1999). Romo-Vazquez (2009) et Chávez (2013), élargissent le modèle praxéologique initial, pour étudier des questions spécifiques du domaine de l'éducation professionnelle. Romo-Vazquez (2009) a fait une recherche sur les savoirs mathématiques dans la formation d'ingénieurs. Cette recherche a été consacrée à l'étude de la place attribuée aux mathématiques dans la formation des futurs ingénieurs leur permettant de répondre aux besoins mathématiques de leur profession.

Chávez (2013) pose des questions à propos du processus de la transposition didactique : Que se passe-t-il lorsque le scénario étudié est celui de la formation de futurs professionnels ? Quelles sont les institutions impliquées ? Quel est le type d'enseignement et quels modèles praxéologiques sont présents ?

Dans ces recherches, l'expression disciplines intermédiaires désigne les disciplines qui font usage des mathématiques, sans avoir comme finalité l'enseignement de savoirs mathématiques. On remarque que ces disciplines sont opportunes pour travailler les relations entre la théorie et la pratique. Selon Romo-Vazquez (2009, p. 289) « [...] l'analyse des projets montre que la plupart des praxéologies qui y sont impliquées se trouvent dans les disciplines intermédiaires et elles présentent une composante mathématique imbriquée dans les savoirs de ces disciplines et éventuellement d'autres savoirs [...] ».

Romo-Vazquez (2009) remarque une certaine ambigüité dans les termes qui énoncent les fonctions de la technologie au sens de la TAD : explication, justifications et production de techniques. Elle souligne le besoin d'existence de différents types de discours technologiques et les fonctionnalités pour le dit discours. Romo-Vazquez (2009, p. 62) « [...] Castela (2008) propose ce qui peut apparaître comme un élargissement de la notion de technologie, y soulignant deux composantes : la composante théorique θ^{th} et la composante pratique θ^{p}». Ce modèle distingue, au sein de la technologie, deux composantes qui correspondent à deux types de validation. La composante théorique est le résultat d'une théorie qui la valide. La composante pratique est validée par l'emploi des pratiques et développe, essentiellement les savoirs en rapport avec les fonctionnalités de la technique. Six fonctionnalités sont alors mises en évidence: décrire, motiver, favoriser, valider, expliquer et évaluer (Romo-Vazquez, 2009).

3. Parcours Méthodologique

Notre recherche porte sur la vie de savoirs mathématiques dans l'enseignement de la Topographie par des étudiants dans une formation technique agricole intégré au lycée dans un établissement scolaire appartenant au réseau fédéral d'éducation. Pour cela, des séances de classe ont été filmées au deuxième semestre de 2016. Nous avons aussi fait des entretiens avec l'enseignant, analysé les documents du projet pédagogique de cette formation et les livres utilisés par le professeur, ainsi que des documents officiels nationaux sur l'enseignement professionnel.

4. Résultats Partiels

Le cours de topographie, s'étale sur 12 séances de 4 heures et 10 minutes chacune, tout au long du deuxième semestre de la formation.

Les premières rencontres ont un caractère plus descriptif, de présentation de la topographie et des instruments topographiques. À partir de la troisième ou quatrième séance, le professeur met en place deux dynamiques, la première constitue le travail des activités en salle de classe et la deuxième a lieu hors de la salle de classe par le biais d'activités pratiques. De la neuvième séance, la pratique prend plus de temps.

Les analyses préliminaires du cours de topographie ont montré la forte présence de savoirs mathématiques, comme les longueurs, les angles, le théorème de Pythagore et des objets liés à la trigonométrie.

Dans les deux premières séances de 4 heures et 10 minutes chacune, on a procédé aux présentations : ce fut la première séance du groupe avec le professeur, puisqu'il n'avait enseigné aucune discipline à ce groupe auparavant.

Le professeur présente la topographie comme une science appartenant au groupe des sciences exactes, qui s'occupe de l'étude de la surface terrestre prenant en compte ses différents niveaux, c'est-à-dire, ses altitudes et ses déclives. Cette étude demande l'usage d'instruments topographiques : mètre, boussole, niveau, théodolite, clinomètre, GPS, balise et mire parlante. Ceux-ci ont été retenus comme les principaux instruments manipulés au long des séances de topographie.

Lors de la description des instruments le professeur souligne différents aspects, parmi d'autres : les différentes matières impliquées dans la confection des instruments, les différents modèles disponibles dans le marché pour un même instrument ; le principe de fonctionnement de quelques instruments ; à quoi servent-ils et les autres sciences qui en font usage.

Un aspect important observé dans les premières séances descriptives, concerne la référence aux situations de la pratique qui justifient l'usage des instruments : à cette occasion les notions d'alignement et de construction d'un angle droit ont été discutées.

Pour décrire les praxéologies attachées aux notions d'alignement et de construction d'un angle droit nous adoptons les notations suivantes : type de tâches Ti, où i indique l'ordre de son apparition ; technique τi.j, où le symbole j désigne les différentes techniques proposées pour la résolution du même type de tâches Ti. Dans cette analyse partielle, nous décrivons les éléments identifiés et mentionnés par le professeur dans les cours de

Topographie. Nous appelons « points », les endroits choisis sur un terrain pour marquer des références. Nous emploierons aussi l'expression « opérateur » pour identifier les personnages fictifs participant aux activités, car ils sont nécessaires dans les résolutions des situations du travail sur le terrain.

Les premiers types de tâches sont donc les suivantes : « aligner trois points » ; « construire un angle droit ». Ces deux types de tâches participent à la résolution du problème de la construction d'un angle sur un terrain plat.

Tout d'abord, les types de tâches sont proposés par le professeur afin de justifier l'usage des instruments topographiques, mais qui en fait nous semble être la raison d'être de l'étude de ces instruments : pourquoi étudier cet instrument ? On l'étudie parce que dans cette situation, je l'emploie pour réaliser cette tâche.

Dans les cours suivants, on expose des situations de topographie et on étudie leurs résolutions avec différents instruments. La question posée est alors : comment résoudre cette situation ? La réponse est toujours : nous pouvons la résoudre par le biais d'un ensemble d'instruments. Le professeur croit qu'en proposant et donnant la réponse, il travaille la « partie théorique » de la discipline. Nous avons observé que la « partie pratique » est orientée vers la manipulation des instruments envisageant la résolution de la tâche donnée.

Type de tâche T_1	Tracer le segment de la ligne droite AC sur un terrain plat.
Technique $\tau_{1.1}$	En utilisant trois balises, la première située sur un point initial A, la deuxième située à quelques mètres de A, nous l'appellerons point B, la troisième sera située sur le prolongement de AB, faisant usage de l'oeil mire, on cherche à « cacher » derrière la balise située sur le point A, les balises posées en B et C.
Technologie θ^p	(Motivation) réalisation d'alignements sur des terrains de surface territoriale supérieure à 50 mètres, lorsque vous cachez la troisième balise, vous garantissez l'alignement. Le professeur

	souligne aussi l'importance de la personne positionnée au point A, orienter la personne positionnée sur le point C.

Tableau 1. Éléments de la Praxéologie par rapport à un type de tâche : tracer le segment d'une ligne droite sur un terrain

Une autre séquence concerne la construction de l'angle droit. L'image ci-dessous illustre une « partie des cours pratiques », dans laquelle le professeur profite de l'angle droit de la cour pour travailler avec le groupe, la technique décrite ci-après.

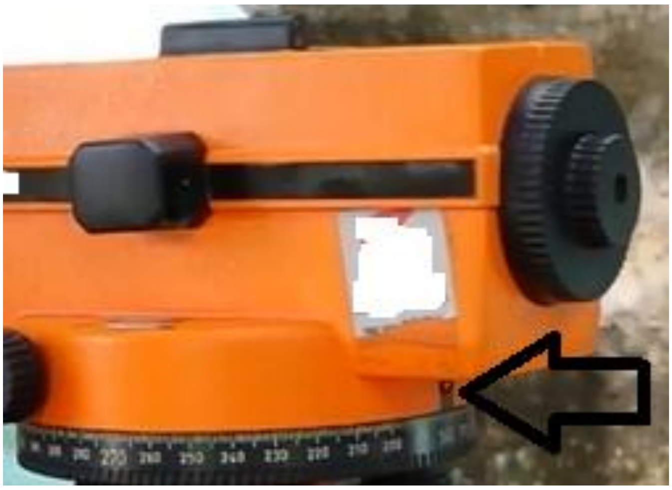
Photographie 1. Cconstruction d'un angle droit avec un mètre et des balises

Type de tâche T_2	Construire un angle droit avec le sommet sur le point C puis l'un de ses côtés c'est le segment AC.
Technique $\tau_{2.1}$	Utilisant trois balises et le mètre on construit un triangle rectangle avec de sommet C, avec les côtés de longueur : 3m, 4m et 5m.
Technologie θ^{th}	Il s'agit d'une construction d'un triangle rectangle justifiée par la réciproque du théorème de Pythagore.
Technologie θ^{p}	Le professeur décrit la technique pas à pas. Positionner la balise et le zéro du mètre sur le point C. Allonger le mètre pour 3m, en repérant un point sur le segment AC, puis allonger le mètre pour 8 mètres, en repérant le troisième point. Ensuite, allonger le mètre de retour au point C qui doit retrouver le point de départ zéro avec le point de repère de 12 mètres. Le professeur souligne que le mètre doit être bien allongé et passe par la balise, en vérifiant si à chaque côté du triangle le mètre se trouve parallèle au sol.
Technique $\tau_{2.2}$	Employant le théodolite (ou niveau) et deux balises. On met en place un point C et on visualise la balise dans le point sur le côté AC. Ensuite, on tourne l'instrument de 90º et on oriente l'opérateur à

	positionner de forme adéquate une balise, ainsi on peut repérer le troisième point.

Tableau 2. Éléments de la Praxéologie par rapport à un type de tâche : construire un angle droit sur un terrain plat.

La construction d'un rectangle comprend les deux techniques présentées ci-dessus. Sur la photo on remarque le point de repère posé sur l'instrument topographique appelé niveau. Ce point permet de mesurer l'ouverture du tournoiement, rendant possible la réalisation de la technique $\tau_{2.2}$ décrite ci-dessus.



Photographie 2. Instrument nommé niveau

5. Considérations finales

Ce travail discute des éléments de la vie de savoirs mathématiques dans le cours de Topographie, en lycée technique agricole. Nos analyses ont montré l'importance de la pratique, avec l'usage d'instruments topographiques dans le discours technologique. Le besoin de manipuler un certain instrument (ou ensemble d'instruments) dans la résolution d'une tâche implique différents facteurs et modifie de manière significative les praxéologies. Les choix des instruments sont fait sous l'influence des pratiques courantes dans les milieux professionnels, donc dans des institutions d'usage de ces praxéologies. Les cours observés nous amènent à interroger l'existence d'un ensemble de types de tâches, dont l'objectif est de faire apprendre la manipulation adéquate des instruments effectivement utilisés par les praticiens de la topographie. Quel rôle ont les savoirs mathématiques dans ces types de tâches ? Quel regard peut-on porter, du point de vue de la TAD, sur ces types de tâche ? Notre recherche en cours, vise à apporter des éléments de réponse à ces questions.

6. Références

CHEVALLARD, Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques : L'approche anthropologique. *Cours donné à l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27.

CHEVALLARD, Y. (2002) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques. *3es Journées d'étude franco-québécoises.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62.

CHEVALLARD, Y. (2009) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. *Cours donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=144.

CHÁVEZ, O. N. C. (2013) *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción.* (Thèse de doctorat). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados Del Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal. http://www.researchgate.net/publication/271198372

ROMO-VAZQUEZ, A. (2009) La formation mathématique des futurs ingénieurs. (Thèse de doctorat). Université Paris 7 https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00470285.

Describing researchers' ways of seeing a lesson: As the first work of the cross-cultural study on lesson study between Japan and Thailand

Tatsuya Mizoguchi

Department of Education, Tottori University, Japan

Maitree Inprasitha, Narumon Changsri

Faculty of Education, Khon Kaen University, Thailand

Yusuke Shinno

Department of Mathematics education, Osaka Kyoiku University, Japan

Abstract.

This research is the first work of the project of cross-cultural study on lesson study between Japan and Thailand. Lesson study is currently an international topic, and we use 'lesson study' as a common word. However, are the meanings of each terminology in diverse languages as same completely? Our initial concern is in this point. For this, we observe lesson on video and make comment-reports on it in each. In analyzing these comments, it is required a meta theory for descriptions. In this research, we describe the researchers ways of seeing a lesson using the Anthropological Theory of the Didactic. In conclusion, we discuss similarities and discrepancies between researchers' comments of both countries in terms of a) praxis and logos blocks, b) mathematical and didactic organization, and c) the perspective of levels of determination.

Résumé

Cette recherche est le premier travail du projet d'étude interculturelle sur l'étude de la leçon entre le Japon et la Thaïlande. L'étude de la leçon est actuellement un sujet international, et nous utilisons la «lesson study» comme un mot commun. Cependant, les significations de chaque terminologie dans diverses langues sont-elles identiques? Notre préoccupation initiale concerne ce point. Pour cela, nous observons une leçon sur la vidéo et faisons des commentaires sur chacune d'elles. En analysant ces commentaires, il faut une méta-théorie pour les descriptions. Dans cette recherche, nous décrivons les chercheurs pour voir une leçon en utilisant la Théorie Anthropologique du Didactique. En conclusion, nous discutons des similitudes et des divergences entre les commentaires des chercheurs des deux pays en termes de blocs de praxis et logos, b) l'organisation mathématique et didactique, et c) la perspective des les niveaux de la codétermination didactique.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. Introduction

Lesson study is talked all over the world today. However, is the meaning of this terminology same completely, like as 'lesson study' in English, '授業研究' in Japanese, and 'การศึกษาชั้นเรียน' in Thai? Our initial research concern is in this point. In this research, it is the purpose not to compare researchers' ways of seeing a lesson, rather to highlight the features of each way.

This research is the first work of the project: cross-cultural study on lesson study in mathematics between Japan and Thailand (Mizoguchi et al. 2015). In this research, we attempt to describe researchers' eyes when they, we ourselves[1], see a lesson.

Therefore, our research question is 'what are the characteristics of Japanese and Thai researchers to see when observing a lesson as the lesson study?'

For this, we observe the video lesson of partner country and make comment-reports on it in each. These reports are the data resources for analysis. In analysing, it is required a meta-theory for descriptions. In this research, we describe those using the Anthropological Theory of the Didactic [ATD] (cf. Chevallard, 2016). Based on the theory, a reference epistemological model is necessary for analysis originally. However, this research is rather aimed at obtaining basic data for making the model. In this sense, this research is a preliminary investigation for future research.

On the other hand, there are excellent precedents such as Miyakawa & Winsløw (2013) and Rasmussen (2016) which study the lesson study itself using the same theory. Although there is no doubt that these are suggestive to our research, none have been compared and contrasted the lesson studies in different countries or cultures yet. This research focuses exactly on this point.

[1] In addition to the authors, the following members are participating the project: Akio Matsuzaki (Saitama University, Japan), Phattaraphong Kunseeda (Nakhon Phanom University, Thailand) and Toru Hayata (Naruto University of Education, Japan).

2. Data collection

2.1. Nature of lessons and teachers by both countries

In the first work of the project, researchers from both countries see the lesson (DVD video with its English script) each other. Here, the lessons of both countries do not need to be the same grade, contents, and so on. The aim of this work is not to compare viewpoints toward similar lessons but to characterize how researchers understand a lesson.

The Japanese lesson was related to the expansion of algebraic expression in grade 9. The teacher is over 10 years in career, and is in charge of this class ordinary. The lesson was implemented in about 50 minutes that is a regular lesson time in Japan, not specially designed but one of the daily lessons. The number of students in the classroom is standard in Japan, and the style of the lesson is not special.

The Thai lesson was related to addition by carrying digits in grade 1. The teacher is a student intern who works with an in-service teacher. The lesson was implemented in about 50 minutes. A regular lesson time in Thailand is about 40-60 minutes. This is a daily lesson. The style of the lesson is special for Thailand. Such efforts to improve lessons have been incorporated as part of project by CRME, KKU (cf. Kadroon & Inprasitha, 2013). The number of students in the classroom is less than standard in Thailand, the standard is about 30-40.

2.2. Making comment-reports

Japanese researchers saw the lesson and made their reports individually, so there are 4 reports. Although Thai researchers also saw the lesson individually, they discussed it among members and made one report. For this reason, Japanese reports reflect personal views respectively, meanwhile Thai report is comprehensive of all researchers' thought. The format of report was not set specific items but open-ended.

3. Researchers' comments in both countries: outline

3.1. Japanese researchers' comments for Thai lesson

At first, all Japanese researchers [JR_n] describe the ecology of mathematical knowledge on Subject level of determination (Bosch & Gascón, 2006). There are many points of view on how one lesson is related to other lessons. Especially, JR_3 refers to the influence from the higher levels of determination.

> JR_3(c): Since the students imitated the movements of the teacher's hands in this way, it seems that influence of the teacher's teaching could be strong in this classroom.

Also, JR_1 describes as the following.

> JR_1(d): For whether or not students could think of "making 10" learned in 9+4 into the other problem situations in the same way, students only said in unison "making 10" without solving a so-called evaluation problem in this lesson.

In addition, JR_2, JR_3, and JR_4 comment on how "increasing" and "putting together" learned in the previous lessons could be related to this lesson. In particular, JR_3 describes as following.

> JR_3(d): I looked at the hand movements of "increasing" and "putting together". When the teacher explained "increasing" and "putting together" at the beginning of the lesson, her movements of the hands were different. However, while explaining the summand decomposition with moving blocks for the problem of this lesson, there was a discrepancy between the movement of blocks and of hands. I think that it is better to unify the operation of blocks as semi-concrete objects and the movement of hands for understanding of addition.

3.2. Thai researchers' comments for Japanese lesson

The report by Thai researchers [TRs] is well organised according to the sequences of the lesson. It consists of the following three sections:

1. Review what they learnt in the last period. (5 minutes)
2. Teacher give some questions/tasks, students solve the problem. (25 minutes)
3. Teacher and students discuss how to solve/find the answer and computing processes from students' ideas. (20 minutes)

TRs record those with carefully tracking the teaching and learning process of mathematical knowledge in the form of utterances/interactions of the teacher and the students.

4. Characterising researchers' eyes of seeing a lesson

4.1. TRs' eye corresponds to praxis, JRs' eyes also correspond to logos

All descriptions of TRs carefully track observable facts. In other words, they attempt to understand the activities/interactions of teacher and students in the lesson by praxis block, therefore it is constituted partial descriptions of mathematical praxeologies, and also the teacher's didactic praxeologies be done as the same. Thus, it is pointed out that the descriptions of TRs are extremely reasonable in terms of understanding the lesson.

On the other hand, the descriptions of JRs are more focused on the mathematical knowledge, rather than the lesson itself. It can be pointed out that they attempt to describe students' activities not only in praxis but also in logos (however, only technology here). JR_3 notices technology in mathematical praxeology related to this lesson such as "increasing" and "putting together" with hand movements. By paying attention to the numerical value setting of "9+4", JR_4 focuses on technology related to addend and summand decompositions (techniques). Furthermore, JR_1 is interested in a technology of didactic praxeology such as whether making 10 learned at "9+4" is available or not for other problem solving, JR_2 also have an interest in what teacher's didactic praxeology was in terms of the relation between mathematical expression and others. Thus, it can be characterised that the attentions in the descriptions of JRs are directed not only to praxis but also to logos (including their predictions) of mathematical and didactic praxeologies.

4.2. TRs' and JRs' ways of understanding of Mathematical Organisation [MO] and Didactic Organisation [DO]

As mentioned above, descriptions of TRs are recognised as a MO developed in the classroom with focusing on the progress based on a time series of mathematical praxeologies in terms of teacher's and students' practices. It is a precise comprehension about the birth and the growth of techniques for the type of task. On the other hand, the descriptions of JRs focus on the influence of technology on praxis for a MO in the lesson. In that respect, it does not emphasize the birth and the growth of techniques but is conscious of how such techniques is justified. Therefore, the descriptions of JRs are rather focused on the teacher's didactic praxeologies. In other words, MO seen by JRs is exactly described as an interdependent relationship with DO, whereas TRs describe MO independently.

4.3. Discrepancy between JRs and TRs from the perspective of the levels of determination

As we have mentioned, JRs consider the mathematical knowledge (as mathematical praxeologies) and the didactic activities (as didactic praxeologies) not only in the lesson itself but also in other lessons (thus, in relation with other mathematical contents). Based on the levels of determination, this is characterised by considering not only on the Subject level where one lesson is targeted but also on other upper levels. On the other hand, it is possible to characterize TRs' as seeing specialized on the Subject level.

Then, what could it cause such discrepancy between JRs and TRs?

JRs more or less implement usually the interventional research practices through the lesson studies in schools. Even in Thailand, researchers are doing same efforts, but the aim is primarily professional development (cf. Kadroon & Inprasitha, 2013). Of course, these situations also exist in Japan. However, the feature of lesson studies in Japan is not just the sharing of the didactic practices, but rather the sharing of the didactic technologies and theories. In order to make it possible, the lesson study focused only on the Subject level is inadequate, it is needed to examine the ecology of the related mathematical knowledge and the educational purpose at the upper level. However, it is not that such a situation does not exist in the lesson studies in Thailand. It should be noted that the above implication could make be possible based on the data collected in this research. Indeed, this implication does not become aware necessarily even in Japan.

5. Final remarks

This research is the first attempt as our project but based on the limited data. It is pointed out that this research is necessary as a precondition for future works of the project.

The implication obtained in this research could provide a practical suggestion for lesson study. However, it is not our current purpose in itself.

References

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). 25 years of the Didactic Transposition. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction 58*, 51-65.

Chevallard, Y. (2016). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Paper presented at International Seminar on Research in Mathematics Education in Japan, Osaka, 8-12 October 2016*.

Kadroon, T. & Inprasitha, M. (2013). Professional Development of Mathematics Teachers with Lesson Study and Open Approach: The Process for Changing Teachers Values about Teaching Mathematics. *Psychology, 4*(2), 101-105.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: The paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 185–209.

Mizoguchi, T., Inprasitha, M., Matsuzaki, A., Shinno, Y. & Moonpo, P. (2015). Cross-Cultural Study of Japanese and Thailand Mathematics Lesson Study: A Research Design. *Proceedings of the 8th International Conference on Educational Research*, 599-607.

Rasmussen, K. (2016). Lesson study in prospective mathematics teacher education: didactic and paradidactic technology in the post-lesson reflection. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(4), 301–324.

Acknowledgement

This research is supported by Hirabayashi Research Fund of Japan Academic Society of Mathematics Education, and also acknowledges Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University.

Écologie du savoir proportionnalité: un regard sur les références curriculaires

Maria Sônia Leitão Melo Vieira, Marcelo Câmara dos Santos et Alexandre Luís de Souza Barros

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Brasil

Abstract. This work aims to study the ecology of proportionality in curricular referential elementary school-EF and high school. In this perspective, the theoretical basis for discussion was the anthropological theory of Didactic-TAD, developed by Chevallard (1994), in the field of Didactics of mathematics of Genesis. This research presents a documentary analysis of qualitative nature. The institutional analysis of proportionality in curricular reference. Therefore, we find that there is an institutional relationship between knowledge and the curriculum frame of proportionality since the early years of the EF to the in. Identify different places where know proportionality inhabits, as well as your performance in your different niches.

Résumé. Nous nous proposons d'étudier l'écologie du savoir proportionnalité dans le cadre du référentiel de l'Enseignement obligatoire et du Lycée. Nous nous plaçons pour cela dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), développée par Chevallard (1994) dans le domaine de la didactique des mathématiques en France. Cette recherche présente une analyse de nature qualitative des documents permettant l'analyse du rapport institutionnel du savoir proportionnalité dans le cadre du référentiel. Nous identifions l'existence d'un rapport institutionnel entre le savoir proportionnalité et le cadre du référentiel dès les premières classes de l'école primaire (EF) jusqu'aux classes du lycée (EM). Nous avons également trouvé différents lieux qui constituent les habitats de ce savoir et examiné ses activités dans des niches diverses.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la formation en didactique*

Editorial, 2017

1. Introduction

Le présent texte présente une recherche d'un doctorat, en cours, notre objectif est l'étude de l'écologie du savoir proportionnalité, en examinant dans l'immédiat les paramètres du cadre référentiel de l'état de Pernambuoc, Brésil (Pernambuco, 2012). Nous nous penchons sur le plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) et nous cherchons à caractériser le rapport institutionnel de l'objet proportionnalité dans ledit cadre référentiel.

Actuellement, l'enseignement scolaire brésilienne est composée de l'enseignement de base, qui comprend l'école primaire, l'enseignement fondamental, le lycée; et l'enseignement supérieur. L'enseignement fondamental est obligatoire, il a 9 ans (1^{e} au 9^{e} ans) et reçoit des élèves de 6 à 14 ans, lycée est la prochaine étape, il est obligatoire aussi et il a 3 ans.

Dans cette étude, nous partons du questionnement suivant : Quelle est l'écologie du savoir proportionnalité dans les paramètres curriculaires de l'état de Pernambuoc dans l'enseignement fondamental ? À partir de là, nous cherchons à savoir s'il existe un rapport institutionnel entre le savoir proportionnalité et le cadre référentiel, en analysant le savoir à enseigner.

2. Fondement théorique

En TAD, la problématique écologique nous amène à questionner les conditions de vie des objets de savoir au sein des institutions. Dans notre cas, l'écologie fait référence aux conditions de la construction de la vie de l'objet du savoir proportionnalité dans les institutions qui l'emploient ou le transposent. L'écologie didactique a ses origines dans les études de Chevallard (1994), avec la problématique écologique, et la TAD, par le moyen de l'écologie didactique des savoirs, nous permet d'étudier les conditions et les contraintes sous lesquelles le savoir proportionnalité existe dans la noosphère.

La proportionnalité est l'un des savoirs mathématiques les plus présents dans les activités quotidiennes et les pratiques sociales. Du chimiste au cuisinier, de l'ingénieur au maçon, le savoir proportionnalité est indispensable au professionnel.

Pour Chevallard (1994), il est important la prise en compte d'une problématique écologique dont il affirme être assez fertile, et capable d'ouvrir un large champ de recherche : L'étude des systèmes qui naissent, vivent, disparaissent et qui ont ses lois, c'est-à-dire, l'existence de l'écologie d'un savoir. La TAD permet d'aborder les limitations qui surgissent parmi les différents objets des savoirs à enseigner au sein de certaines institutions. Quelle est donc, la raison de l'existence de l'objet du savoir proportionnalité ? Quel est l'habitat et quelles sont les niches écologiques contenues dans ces savoirs ?

En TAD, l'activité mathématique et, par conséquent, l'activité d'étude des mathématiques se situent dans l'ensemble des activités humaines effectuées au sein des institutions sociales. Dans cette recherche, à partir de l'écologie didactique des savoirs nous cherchons les conditions et contraintes du savoir proportionnalité. Pour autant, nous avons pris comme habitat le lieu où vit un certain objet du savoir, l'environnement didactique dans lequel il s'y trouve (ses adresses). Comme niche, nous avons identifié les fonctions que l'objet du savoir exerce en interaction avec les autres objets (sa profession), selon l'étude Ravel (2003).

3. Parcours méthodologique

La transposition didactique va nous permettre d'étudier les transformations d'un savoir lorsqu'il est transposé d'une institution à une autre et, de façon plus large, la TAD nous permet d'étudier les conditions de l'existence d'un certain objet de savoir à l'intérieur des institutions.

Notre parcours méthodologique va nous conduire à recueillir des données répondant à nos questionnements axés sur l'analyse documentaire des paramètres curriculaires de l'état de Pernambuoc (Pernambuco, 2012), destinés aux années terminales de l'enseignement fondamental (6^{o} ao 9^{o} ans) et lycée. Notre objectif est de caractériser la relation institutionnelle de l'objet proportionnalité, afin d'identifier où se situe l'étude de la proportionnalité; pour cela, nous avons pris en compte la catégorie localisation du savoir proportionnalité – habitat et niches dans les 1^{re}, 2^{e}, 3^{e}, 4^{e}, 5^{e}, 6^{e}, 7^{e}, 8^{e} et 9^{e} années de l'EF et EM.

4. Résultat partiel

Les résultats de notre étude proviennent de l'analyse documentaire de Pernambuco (2012), comme nous l'avons déjà mentionné.

4.1. Analyse écologique du savoir proportionnalité dans l'institution cadre référentiel du Pernambouc

Au Pernambuco (2012), les savoirs à enseigner sont organisés en cinq domaines : géométrie ; statistique et probabilité (traitement de l'information) ; algèbre et fonctions ; grandeurs et mesures ; nombres et opérations. Ces domaines font partie des premières années de l'EF (1re, 2^{e}, 3^{e}, 4^{e} et 5^{e} années), des dernières annés de l'EF (6^{e}, 7^{e}, 8^{e} et 9^{e} années) et trois dernières années qui composent l'EM (lycée). Pour chaque année scolaire, Pernambuco (2012, p. 13) présente les « attendus d'apprentissage » qui « explicitent les acquis minimums attendus pour que l'élève puisse développer les compétences de base de la discipline ».

Dans IRC, nous avons trouvé le savoir proportionnalité dans les attendus d'apprentissage « proportionnalité entre grandeurs » et « proportionnalité », en cohabitation, respectivement, avec les domaines « algèbre et fonctions » et « nombres et opérations ». Ce que préconise le document, c'est que pour de telles attendus, l'étude débute lors des interventions pédagogiques, mais sans le souci de la conceptualisation du savoir contenu ; on trouve cette recommandation dès la 1re année, et elle se répète pour les 2^{e}, 3^{e} et 4^{e}. Pour les 5^{e} et 6^{e} années, on conseille la conceptualisation du savoir attendu. Et, pour les 7^{e}, 8^{e}, 9^{e}, 10^{e}, 11^{e} et 12^{e} années, « on préconise la consolidation comme une condition pour la suite, et la réussite, dans les étapes postérieures de la scolarisation » (Pernambuco, 2012, p. 45).

Dans IRC, la proportionnalité surgit comme une niche pour les études de similitude dans les attendus des apprentissages indiqués dans le domaine de la géométrie « reconnaître, dans des situations d'élargissement et de réduction, la conservation des angles et la proportionnalité entre les côtés homologues des figures polygonales » pour la 5^{e} année, et aussi dans l'attendu « reconnaître, dans des situations d'élargissement et de réduction, la conservation des angles et la proportionnalité entre les côtés homologues des figures polygonales » (Pernambuco, 2012, p. 56 et 94).

Pour les 3e et 4e années, dans le domaine « nombres et opérations », on peut noter une autre niche du savoir proportionnalité, qui est présenté en relation avec la multiplication : « résoudre et élaborer des problèmes de multiplications dans le langage verbal (avec le support des images ou des outils de manipulation), comprenant les idées d'addition de parcelles égales, des éléments en disposition rectangulaire, proportionnalité » (Pernambuco, 2012, p. 85 et 87).

Dans le domaine « algèbre et fonctions », parmi les recommandations pour le développement des savoirs dans les années finales de l'EF, on retrouve une autre niche du savoir proportionnalité dans l'étude de la fonction linéaire. L'ICR remarque l'importance de faire un travail avec des « situations qui comprennent la proportionnalité ainsi comme le besoin de l'approfondir dans cette phase. » On doit prioriser l'articulation de problèmes comprenant proportionnalité dans l'étude de la fonction linéaire et celui-ci constitue un item important (Pernambuco, 2012, p. 103). Tout au long des quatre années qui composent cette période de la scolarité, l'IRC recommande l'étude de la proportionnalité, dans ce domaine.

Au lycée le savoir proportionnalité retrouve aussi sa niche dans le domaine de la géométrie, comme l'indiquent les orientations de l'ICR : « Quelques concepts étudiés dans l'enseignement fondamental doivent y être consolidés comme, par exemple, les idées de proportionnalité, congruente et similitude, le théorème de Thalès et ses applications, les relations métriques et trigonométriques dans les triangles (rectangles et autres) et le théorème de Pythagore » (Pernambuco, 2012, p. 121 et 122).

Nous vérifions encore une autre fois la niche de la proportionnalité dans le domaine « algèbre et fonctions », lors des 10e et 11e années dans l'étude de la fonction linéaire : « Reconnaître la relation entre la proportionnalité directe et la fonction linéaire » (Pernambuco, 2012, p. 130 et 132).

Dans le domaine « nombres et opérations », la niche identifiée a un rapport avec le travail de la fonction linéaire et celui des grandeurs géométriques pendant les trois années de lycée : « Il est impératif que les élèves établissent des connexions entre l'idée de proportionnalité et autres concepts des Mathématiques, comme par exemple, les fonctions linéaires et les grandeurs géométriques » (Pernambuco, 2012, p. 137).

5. Considérations finales

Cette recherche a eu avec comme objectif celui d'étudier le savoir proportionnalité dans les paramètres c du cadre référentiel de l'état de Pernambuoc. Nous y avons cherché, principalement, à caractériser la relation institutionnelle de l'objet proportionnalité contenue dans ces ICR.

Dans l'analyse des ICR, nous avons constaté que le savoir proportionnalité a un rapport institutionnel avec le document ICR, dês les premières années de l'enseignement fondamental jusqu'au lycée. Le savoir proportionnalité se retrouve dans les domaines « algèbre et fonctions » et « nombres et opérations ».

Au lycée, le savoir proportionnalité a également sa niche, dans le domaine de la « géométrie » dans la consolidation de quelques concepts étudiés dans l'enseignement fondamental. Dans les domaines « algèbre et fonctions » et « nombres et opérations », la niche proportionnalité se trouve dans le travail de la fonction linéaire.

Cette étude nous permet d'affirmer qu'il y a encore beaucoup d'études à réaliser au sujet du concept de proportionnalité, car l'analyse était limitée à un seul niveau de l'échelle de codétermination: domaine.

Références

Câmara dos Santos, M., Ortigão, M. I. E, Aguiar, G. (2014). Construção do Currículo de Matemática: como os professores dos anos iniciais compreendem o que deve ser ensinado? *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(49), 638-661. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a09

Chaachoua, H. & Bitar, M. A. (2016, novembre). *Teoria Antropológica do Didático: Paradigmas, Avanços e Perspectivas*. Conférence présentée au 1° Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática (LADiMa), Brésil. http://ladima.tuseon.com.br/anais---conferencias-e-oficinas.html

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. Dans G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand & A. Tiberghien (Éds), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 135-180). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury & M. Caillot (Éds), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Fabert.

Pernambuco. (2012). *Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco: Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio*. http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/matematica_ef_em.pdf.

Post.T, Behr. M e Lesh. R. (1995). A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções de pré-álgebra. In: *As ideias da Álgebra*. Organizadores. Artur F. Coxford, Alberto P. Shulte; traduzido por Higino H. Domingues. São Paulo: Atual. 1995.

Ravel, L. Des programmes _a la classe: Etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmetique en Terminale S specialite mathematique. Education. Universit_e Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. French.

Facteurs de décisions didactiques dans l’enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre

Rosa Pons_Duró
Université de l'Andorre UdA, Andorre

Hamid Chaachoua
Directeur de thèse

Abstract
This thesis is about didactical decisions taken by teachers of mathematics and the factors that can influence them. We are on secondary school in Andorra, a context characterized by a particular educational diversity. We use the model of educational decisions in the framework of the anthropological theory of the didactic (ATD) with the levels of co-determination combined with the structuring of the educational environment in Theory of Didactic Situations (TSD). From the model of the didactic transposition, on ATD, we focus our study on the teaching of algebra and in particular in algebraic solving equations. We build a model of reference on this subject know for a comparative analysis on the teaching of mathematics in the context studied. Our work aims to develop some of the features of the phenomenon '”educational decisions in the teaching of mathematics” by studyingt he institutional factor that affects their appearance within a secondary-level education system

Résumé
Notre thèse porte sur les décisions didactiques prises par les enseignants de mathématiques et les facteurs qui peuvent les influencer. Nous nous situons au niveau secondaire en Andorre, contexte caractérisé par une diversité éducative particulière. Nous utilisons le modèle de décisions didactiques inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) avec les niveaux de codétermination articulé avec la structuration du milieu de la théorie de situations didactiques (TSD). À partir du modèle de la transposition didactique dans la TAD, nous centrons notre étude dans l’enseignement de l’algèbre et en particulier la résolution d’équations algébriques. Nous construisons un modèle de référence pour une analyse comparative sur l’enseignement des mathématiques dans le contexte étudié. Notre travail vise à enrichir quelques caractéristiques du phénomène « décisions didactiques dans l'enseignement des mathématiques » en étudiant le facteur institutionnel qui agit sur son apparition au sein d'un système éducatif à un niveau secondaire.

Mots clés : facteur institutionnel de décisions didactiques, TAD, transposition didactique, enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre, équations algébriques

UdA

Projecte de Recerca (Andorra, 4 juillet 2017)

1. Introduction

1.1 Le contexte

Cette étude s'intéresse aux pratiques des enseignants et en particulier au rôle de l'enseignant dans le processus d'apprentissage des mathématiques à un niveau secondaire. Nous nous situons dans la société andorrane où coexistent trois systèmes éducatifs pour le niveau secondaire : le système éducatif espagnol (SEE), le système éducatif français (SEF) et le système éducatif andorran (SEA).

ÉDUCATION AU NIVEAU SECONDAIRE EN ANDORRE

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3">SEE</td><td colspan="3">SEF</td><td colspan="3">SEA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Niveau</td><td colspan="10"></td></tr>
<tr><td>11-12 ans</td><td>6</td><td rowspan="5">Structure organisative</td><td colspan="3">Primària</td><td>6ème</td><td>Cycle 3</td><td rowspan="4">collège</td><td colspan="3">Primera enseynança</td></tr>
<tr><td>12-13 ans</td><td>7</td><td>1º</td><td rowspan="2">Ciclo 1</td><td rowspan="4">ESO</td><td>5ème</td><td rowspan="3">Cycle 4</td><td>1curs</td><td rowspan="2">2n cicle</td><td rowspan="4">SE</td></tr>
<tr><td>13-14 ans</td><td>8</td><td>2º</td><td>4ème</td><td>2n curs</td></tr>
<tr><td>14-15 ans</td><td>9</td><td>3º</td><td rowspan="2">Ciclo 2</td><td>3ème</td><td>3r curs</td><td rowspan="2">2n cicle</td></tr>
<tr><td>15-16 ans</td><td>10</td><td>4º</td><td colspan="2">seconde</td><td>lycée</td><td>4t curs</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>calendrier</td><td colspan="9">173-175 jours par cours scolaire - mêmes vacances scolaires</td></tr>
</table>

SEE: Système éducatif espagnol | SEF:Système éducatif français | SEA: Système éducatif andorran

ESO: *Estudios de secundária obligatorios* | SE *segona ensenynança*

Figure 1. Systèmes éducatifs publics de l'Andorre

La société andorrane instaure le même calendrier scolaire pour les trois systèmes éducatifs. La structure organisatrice de chaque système éducatif s'articule suivant ce calendrier et selon l'institution scolaire du pays d'origine. Dans ce contexte, les trois systèmes éducatifs permettent les échanges d'élèves mais pas des enseignants. En effet, chaque système intègre ses enseignants en fonction de leur formation initiale. Cette formation initiale diffère selon le pays d'origine de chaque système éducatif. Dans les SEE et SEF, ceux sont les institutions universitaires et administratives du pays d'origine correspondant qui assurent la formation initiale nécessaire pour devenir enseignant de mathématiques. Dans le SEA, l'administration publie les conditions d’admission en fonction des études supérieures antérieures des candidats. En effet, il n’existe pas à nos jours, à l’Université d’Andorre, (UdA) une formation initiale spécifique pour les professeurs de collège et lycée en mathématiques. Dans cette diversité éducative du contexte propre à l’Andorre, il s’avère donc intéressant d’étudier comment un enseignant de mathématiques développe ses compétences professionnelles dans un système éducatif donné afin d'enseigner les mathématiques aux élèves et comprendre ce qu’un élève apprend en mathématiques. En définitive, nous nous intéressons aux facteurs qui influencent les décisions didactiques de l'enseignant de mathématiques suivant sa formation initiale et le développement de ses compétences professionnelles selon le système éducatif auquel il appartient. Nous centrons ainsi notre étude sur le facteur épistémique institutionnel c’est-à-dire sur comment peut être nourrit le rapport personnel de l’enseignant par différents éléments liés aux contraintes et conditions institutionnelles.

1.2 La problématique

La grande variété institutionnelle à petite échelle qui existe en Andorre constitue un contexte intéressant pour étudier la position de l'enseignant dans la l'enseignement des mathématiques. Actuellement, 3 collèges du SEA, 1 collège du SEF et 5 collèges du SEE assurent l'enseignement des élèves au niveau secondaire en Andorre en respectant une répartition équilibrée des élèves dans les trois systèmes éducatifs. En effet, depuis quelques décennies les élèves se répartissent librement à raison d'à peu près un tiers du nombre total de la population entre 6 et 18 ans, par système éducatif. Cette diversité éducative amène l’enseignant de mathématiques à faire des choix sur les ressources à utiliser pour la conception de ses cours et la mise en œuvre en classe des séquences d’activité. En effet, pour enseigner les mathématiques en Andorre, un spectre riche de différentes ressources se présente à l'enseignant. Celui-ci dispose non seulement des programmes et manuels selon le collège dans lequel il travaille et selon le système dont son collège relève, mais aussi il est inévitablement en contact avec les programmes et manuels des autres systèmes éducatifs co-existants dans le pays, puisque les caractéristiques de ce petit pays favorisent particulièrement les échanges entres les élèves et les interactions entre les enseignants. Comment ces interactions et cette coexistence

d'institutions scolaires diverses influencent ou non l'enseignement des mathématiques ? Comment l'institution influence t-elle les décisions didactiques de l'enseignant lors de la mise en place des séances d'enseignement à un niveau secondaire ?
Notre première question de recherche se pose:
Q1 : Quel est l'impact du facteur institutionnel sur les décisions didactiques de l'enseignant ?
L'analyse des différents collèges selon les trois systèmes éducatifs nous porte à affiner notre interrogation. Alors que le SEF est présent en un seul collège dans tout le pays, les SEE et SEA se distribuent en plusieurs collèges. Alors que les trois collèges du SEA suivent le programme andorran et un unique manuel, dans le SEE, trois collèges suivent le programme provenant du gouvernement autonome catalan de l'Espagne et les deux autres collèges espagnols du pays, suive le programme espagnol à l'étranger. D'autre part, dans les SEE et SEF, les collèges choisissent les manuels en mathématiques parmi tous les manuels publiés par différents éditorialistes respectant les programmes officiels. Ainsi, dans le seul collège français, un seul manuel par niveau éducatif existe, tandis que dans le SEE chacun des cinq collèges font des choix différents des manuels utilisés. Trois des collèges espagnols utilisent trois manuels différents suivant le programme catalan, les deux autres collèges suivant le programme espagnol à l'étranger utilisent des manuels castillans différents. En ce qui concerne le SEA, les collèges disposent d'un seul manuel, la réalisation de celui-ci différant de celui des manuels des autres systèmes éducatifs : ce sont des enseignants des trois collèges, choisis par l'administration, qui élaborent le manuel en puisant au choix dans les ressources *onlines* et les manuels des SEF et SEE. Cette diversité de ressources à laquelle est exposé l'enseignant de mathématiques en Andorre dépend donc de chaque système éducatif tout en tenant compte des particularités du pays. Ce qui fait que l'enseignant du SEF appartient à une institution scolaire avec un programme et un manuel au choix et l'enseignant du SEA appartient à une institution scolaire avec un programme et un manuel unique dont la réalisation est spécifique. De plus, deux institutions scolaires sont à considérer dans le SEE, l'une suivant le programme catalan, l'autre le programme castillan, avec un choix entre plusieurs manuels dans chacune. La richesse institutionnelle d'un tel contexte s'avère être spécialement favorable à

l’étude de la question de l'influence de l'institution dans la prise de décision de l’enseignant. Ainsi une deuxième question de recherche se pose :

Q2 : Quels éléments spécifiques des institutions ont un effet sur les décisions didactiques de l’enseignant de mathématiques ?

L’objectif de notre recherche est donc d’apporter des éléments de réponse aux questions Q1 et Q2.

2. Méthodologie de travail

2.1 Organisation du travail

Pour répondre aux deux questions de recherche présentées ci-dessus nous mettons en place une organisation de travail en plusieurs étapes. L’état de l’art sur la position de l’enseignant dans l’enseignement des mathématiques nous permet, tout d’abord, de situer notre cadre théorique. Notre objectif est d’étudier le phénomène social en éducation de la prise décisions didactiques dans l’enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre, d’une manière qualitative sans pour autant laisser de côté des éléments d’analyse quantitative. Le cadre de l’étude s’appuie sur la théorie anthropologie du didactique (TAD), plus précisément sur le modèle praxéologique et l’échelle des niveaux de co-détermination. Ces modèles nous permettent de mettre en place une méthodologie cohérente pour recueillir, analyser et traiter les données nécessaires afin de modéliser comment l’enseignant du secondaire interagit avec un objet de savoir pour l’enseigner à ses élèves. En s’appuyant sur la procédure de la transposition didactique du savoir savant au savoir à enseigner puis au savoir enseigné, nous mettons en place notre organisation du travail (figure 2).

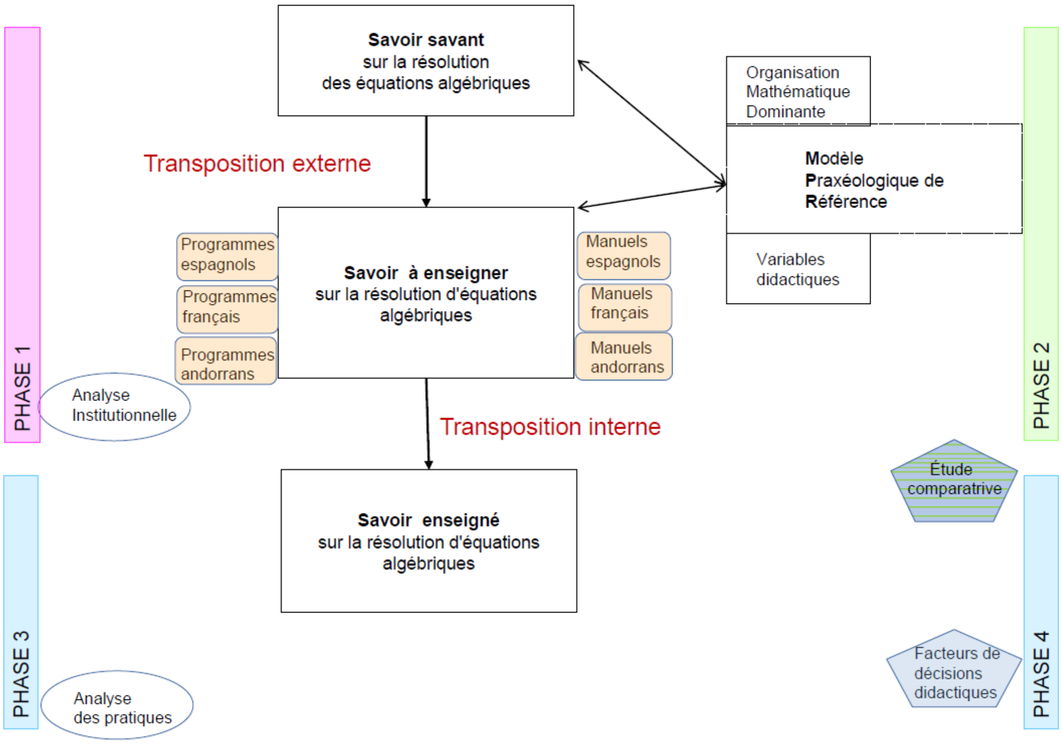


Figure 2. Organisation de travail s'appuyant sur la transposition didactique

2.2. Analyse de travaux

Apporter des éléments de réponses à nos questions de recherche implique la compréhension des choix que fait l'enseignant pour que l'élève apprenne en mathématiques dans une institution donnée. Pour cela, nous partons des travaux *(Pons_Duro, 2014)* portant sur les décisions didactiques prises par les enseignants de collège et de lycée de deux disciplines (mathématiques et sciences de la vie et de la terre) et les facteurs qui peuvent les influencer. Nous définissons un objet de savoir, les *équations*, existant à un même niveau scolaire dans les trois institutions observées, et nous développons une analyse synchronique du point de vue didactique. Nous nous interrogeons ainsi sur l'enseignement de l'algèbre dans les institutions éducatives de l'enseignement secondaire en Andorre. Comme dans ce contexte les échanges d'élèves sont permis entre les trois institutions mais pas les échanges d'enseignants, nous étudions comment un enseignant de mathématiques développe ses compétences professionnelles dans un système éducatif donné. Pour cela nous centrons notre étude sur comment l'on enseigne *la résolution d'équations* dans les différentes institutions éducatives de l'enseignement secondaire publiques andorranes. Ce savoir est présent dans les trois institutions à des niveaux du secondaire équivalents, le $7^{\text{ème}}$, $8^{\text{ème}}$, $9^{\text{ème}}$ et $10^{\text{ème}}$ niveaux du secondaire (classes de cinquième, quatrième, troisième et seconde au collège et lycée français, classes de *1r,2n,3r et 4t ESO* au collège espagnol et, classes de *1r et 2n cicle* du collège andorran). Cela nous amène à réfléchir sur comment articuler une étude didactique comparative entre les trois institutions par rapport à l'enseignement de la *résolution d'équations*.

Nous mettons en place, alors, une analyse synchronique institutionnelle des programmes officiels et des manuels des trois institutions pour constituer notre première source de données. La théorie anthropologique du didactique (TAD) constitue notre cadre théorique et nous construisons un modèle praxéologique référence *(MPR)* à partir de l'enrichissement des modèles épistémologiques mis en évidence dans différents travaux de recherche dans le même cadre théorique de la TAD. L'analyse du rapport institutionnel de l'objet *équations* dans les trois programmes, nous amène à nous centrer sur le $9^{\text{ème}}$ niveau du secondaire. L'analyse des manuels du $9^{\text{ème}}$ niveau du secondaire, nous permet de détecter les types de tâches sur *la résolution d'équations* présentes dans l'enseignement de ce savoir dans les différentes institutions scolaires en Andorre. Le rapport institutionnel à l'objet *équations* nous permet d'établir pour chaque institution les organisations mathématiques que nous définissons comme organisation mathématique dominante *(OMD)* de l'institution. Dans un premier temps nous construisons notre *MPR* à partir de l'étude comparative des manuels par la mise en relation des *OMD* de chaque institution. Divers travaux *(Chaachoua, 2010)* , *(Pilet, 2013)* , *(Bosch & Gascón, 2005)* , *(Ruiz, Bosch, & Gascón, 2010)* , *(Monzón, Gascón, & Bosch, 2015)* , *(Ferraton, Desmoulins , & Chaachoua, 2013)* , *(Matheron, 1999 -2000)* , *(Espinosa, 2014),* nous permettent d'enrichir notre *MPR* avec des éléments sur la *résolution d'équations* selon des configurations de l'algèbre, l'arithmétique, l'analyse et la géométrie. Le questionnement sur l'articulation de ces quatre domaines des mathématiques dans *la résolution d'équations* nous conduit à nous intéresser à d'autres travaux, *(Erdogan, 2006), (García F. , 2007), (García F. , 2005), (Croset, 2009)* et à réfléchir sur de nouveaux éléments pour l'interprétation de données obtenues dans les manuels. Dans le cadre T4TEL (plus *précisément (Chaachoua & Bessot, 2016), (Jolivet, 2013)* nous introduisons la notion de *variable didactique* dans la construction de notre *MPR* sur la *résolution d'équations.*

En parallèle, nous nous appuyons sur d'autres travaux dans le cadre de la TAD, qui portent sur la comparaison de l'enseignement des mathématiques entre différentes institutions, comme l'étude de *(Bessot & Comiti, 2008)* sur l'enseignement de l'algèbre en France et au Vietnam, ou encore le travail de *(Larguier, 2016)* sur l'enseignement de l'algèbre au Québec et en France.
Pour revenir sur les facteurs de décisions didactiques de l'enseignant, certains travaux nous interpellent, *(Briant, 2013) (Ravel, 2003).*avec l'articulation *d'Organisations Didactiques (OD) et d'Organisations Mathématiques (OM),*
Finalement, sur la base de données de notre MPR, nous établissons une grille d'analyse des observables nécessaires pour dégager les décisions didactiques prises par l'enseignant et les facteurs institutionnels qui l'influencent, tenant compte des spécificités de chacune des trois institutions étudiées. La qualité des observables rattachés à ces spécificités est de donner des éléments pour décider s'il s'agit ou non d'un facteur institutionnel. L'analyse de nos premières données sur les programmes et manuels, nous permet ainsi d'organiser le recueil des données à recueillir auprès des enseignants. La construction et l'établissement de grilles d'analyse doit ainsi nous permettre d'élaborer les outils pour le recueil des données afin de mesurer l'impact du facteur institutionnel dans la prise de décisions de l'enseignant.

3. Conclusion

Afin d'arriver à des conclusions pertinentes, nous travaillons dans la prochaine étape sur la définition du terrain d'expérimentation dans le contexte andorran où il existe une trentaine d'enseignants de mathématiques répartis dans les trois systèmes éducatifs. En effet, alors que les sources de collecte de données secondaires (programmes et manuels) sont représentées de façon équivalente pour les différentes institutions, les données primaires (observables des pratiques auprès des enseignants) doivent être considérées comme représentatives de chaque institution : pour cela les enseignants participants au projet de recherche doivent avoir une carrière professionnelle analogue en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques à un niveau secondaire. Cela risque de réduire le nombre d'enseignants pouvant participer à notre étude. Le nombre réduit d'individus constitue un risque pour notre étude. D'un autre côté, il faut pouvoir prendre contact avec les enseignants et recueillir des traces des élèves (cahier de l'élève) des trois systèmes éducatifs. Suivant le principe d’autonomie des institutions dans le cadre de l’éthique en recherche il faut donc informer avec transparence et clarté la finalité de la recherche ainsi que l'usage des données recueillies. Pour cela, il faut tenir compte des risques et des avantages de notre étude : il ne s’agit pas de mettre en compétition et de déstabiliser l’équilibre établi entre les trois systèmes éducatifs coexistant dans le pays.

Références

Bessot, A., & Comiti, C. (2008). Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (pp. 171-193). France: HAL Id: hal-00464582:https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00464582.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas,, 135-160.

Briant, N. (2013, décembre). Etude didactique de la reprise de l’algèbre par l’introduction de l’algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée fran¸cais. Histoire et perspectives sur les mathématiques. thèse doctorale. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc: HAL Id: tel-00920506. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00920506.

Chaachoua, H. (2010, octobre). La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. Note de synthèse pour une Habilitation à Diriger des Recherches. Grenoble: tecnology for Human Learning. Université de Grenoble: HAL Id: tel-00922383. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922383.

Chaachoua, H., & Bessot, A. (2016). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. Citad 5. Castro_Urdiales.

Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). L’analyse du rôle des manuels dans l’approche anthropologique. Apports de la. actes du congrès CITAD 2, (pp. 1–15).

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et d'informatique. Grenoble: Université de Grenoble 1.

Chevallard, Y. (1991). Concepts fondamentaux de a didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Dans Recherche en didactique des mathématiques, vol. 21/1 (pp. 73-112). Grenoble: éd. Grenoble : La pensée sauvage.

Croset, M.-C. (2009). Marie-Caroline Croset. Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.. domain_other. Grenoble I: Université Joseph-Fourier.

Erdogan, A. (2006, novembre). Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques: analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en seconde. thèse doctorale. Université Paris-Diderot-Paris VII.

Espinosa, M. (2014). La solución de la ecuación de 3r grado según Omar Alkhayyam. Santiago de Cali.

Ferraton, G., Desmoulins , C., & Chaachoua, H. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un environnement informatique d'apprentissage humain. Conf. of the Anthropological Theory of the Didactic.

Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. Dans EDUCACIÓN MATEMÁTICA, vol. 22, núm. 2.

García, F. (2005). García, F. J. G. (2005). La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. Tesis doctoral. Universidad de Jaén:(Capitulo 3 i 4)http://www.atd-tad.org/documentos/la-modelizacion-como-herramienta-de-

articulacion-de-la-matematica-escolar-de-la-proporcionalidad-las-relaciones-funcionales/.

García, F. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales. En La Educación Secundaria . http://funes.uniandes.edu.co/1268/., 71–92.

Jolivet, S. (2013). Modèle d'indexation de ressources : construction d'un modèle à partir d'une approche praxéologique. Grenoble: Mémoire de Master UJF.

Larguier, M. (2016). Le développement de la pensée algébrique dans le curriculum officiel en France et au Québec. TAD5. Castro-Urdiales.

Matheron, Y. (1999 -2000). Analyser des praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. Petit x n° 54, 51 à 78.

Monzón, N., Gascón, J., & Bosch, M. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. REDIMAT, Vol 4(2), 106-131. doi: 10.17583/redimat.2015.1386.

Pilet, J. (2013, février). Parcours d'enseignement différenciel appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. Thèse doctorale. Université Paris-Diderot-Paris VII: HAL Id : Tel-0078:https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039.

Pons_Duro, R. (2014). Etude des facteurs de décisions didactiques dans l'enseignement : Etude didactique dans le cas de l'enseignement des équations et équations produit du premier degré avec une inconnue dans une classe de 3ème au collège. Grenoble : UJF.

Ravel, L. (2003). Des programmes a la classe : Etude de la transposition didactique interne. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Ruiz, J., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas y la introducción del álgebra de cálculo aritmètico en secundària. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.),. Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

L'état de l'art dans les événements scientifiques et magazines de l'enseignement des mathématiques au Brésil

Edelweis Jose Tavares Barbosa
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE (CAA), Brasil

Jéssika Moraes da Silva
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE (CAA), Brasil

Maria Lucivânia Souza dos Santos
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE (CAA), Brasil

Abstract. The aim of this research was to identify and analyze what was produced in 2006-2016 in scientific journals and conference proceedings on the teaching of mathematics in the Anthropological Theory of Didactics. A qualitative approach to the state of the art form has been used, with theoretical support in the responder, the relationship between the expansions of educational materials that go beyond the classroom. We analyzed six scientific journals and five events in which we showed that there is an extension of the research indicate that TAD as theoretical, for further discussion on the subject in recent years.

Resumen. Esta investigación tuvo como objetivo identificar y analizar lo que fue producido de 2006 a 2016 en revistas científicas y anales de eventos sobre Educación Matemática en lo que se refiere a la Teoría Antropológica del Didáctico (TAD). Se utilizó un enfoque cualitativo del tipo estado del arte, con aporte teórico en la TAD, por ésta ampliar las relaciones entre objetos de enseñanza que van más allá del aula. Se analizaron seis revistas científicas y cinco eventos, en los que evidenciamos que hay una expansión de las investigaciones que señalan a TAD como aporte teórico, apuntando el desarrollo de discusiones sobre el tema en los últimos años.

Résumé. Cette recherche vise à identifier et analyser ce qui a été produit 2006-2016 dans des revues scientifiques et comptes rendus de conférences sur l'enseignement des mathématiques de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Une approche qualitative de l'état de la forme d'art a été utilisé, avec le soutien théorique dans la réponse, la relation entre l'expansion des matériels éducatifs qui vont au-delà de la salle de classe. Nous avons analysé six revues scientifiques et cinq événements dans lesquels nous avons montré qu'il existe une extension de la recherche et nous avons conclu qu'elles indiquent le TAD comme théorie, pour nouvelles discussions sur le sujet au cours des dernières années.

1. Introduction

Souvent dans les cours de formation des enseignants sont abordés la façon de préparer et élaborer les plans de cours, et comment les mettre en pratique. Alors, en pensant à ces questions, cette recherche déplace la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), une théorie par Yves

Chevallard (1998), qui propose d'organiser un objet d'étude (la mathématique) et le faire fonctionner. Selon Chevallard (1998), nous pouvons voir des éléments qui se produisent sur une période de temps, de contrat didactique, comme transposition didactique, enfin, divers phénomènes éducatifs qui se produisent dans la salle de classe, à partir du point de vue de la TAD.

Ainsi, on peut dire que la TAD est une extension de la théorie de Transposition Didactique (TD) car elle développe les relations entre les objets d'enseignement, qui vont au-delà de la salle de classe. Par rapport les justifications favorables et les arguments, l'adoption du TAD, cette recherche est inséré dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Elle a pour objectif général d'identifier ce qui a été produit entre les années 2006-2016 dans des revues scientifiques et comptes rendus de conférences concernant la TAD.

1.1. Référence théorique

Selon Chevallard (1999), la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD ci-dessous) cette théorie étudie l'homme avant les connaissances mathématiques, et plus précisément, avant les situations mathématiques. L'une des raisons de l'utilisation du terme « anthropologie » est le TAD met l'activité mathématique et, par conséquent, l'étude De la mathématique dans un ensemble d'activités humaines et des institutions sociales.

Chevallard (idem) considère qu'une institution (I) est un dispositif social total qui ne peut avoir qu'une extention très limitée dans l'espace social, mais elle permet - et applique - aux sujets (...) ses propres manières de faire et de penser. Du point de vue de la TAD chaque *savoir* est le *savoir* d'une instituition; le même objet du *savoir* peut « vivre » dans les différentes institutions et à vivre dans une institution; un *savoir* doivent suivre certaines règles, ce qui conduit à transformer. La connaissance entre en jeu à la TAD avec la notion de relation. Un objet existe s'il y a une relation avec cet objet, c'est à dire, si une personne ou une institution le « (re) connaître » comme un objet.

1.2. Ébauche méthodologique

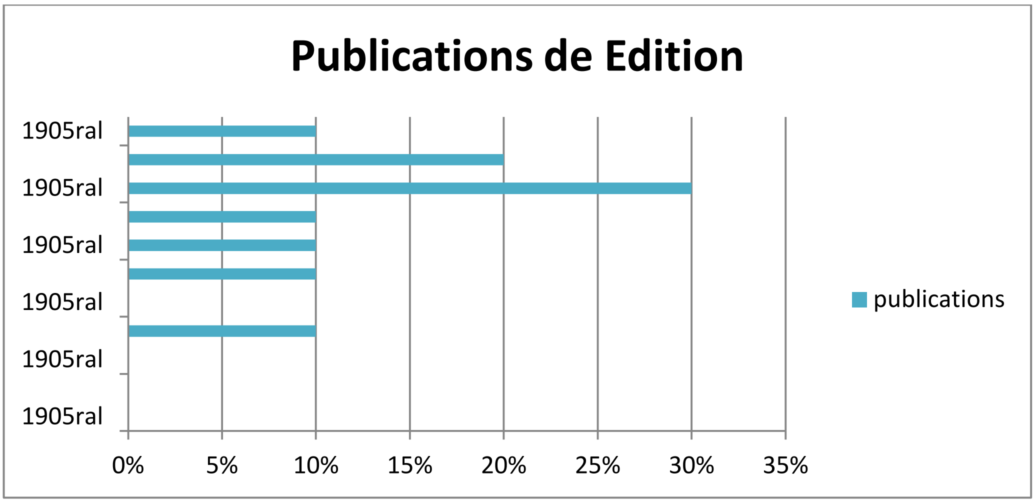
Cette recherche qualitatif du type l'État de l'Art dans la perspective de Fiorentini et Lorenzato (2006), avec la proposition d'une recherche bibliographique qui vise à identifier et à analyser ce qui a été publié entre les années 2006-2016 de revues et annales d'événements dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Selon Ferreira (2002), les productions caractérisées comme « État de l'Art » sont connus pour présenter une recherche bibliographique, exécuteur testamentaire et descriptive de la production scientifique. Utilisation de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) comme le mot-clé de la recherche a trouvé une référence aux thèmes suivants: formation des enseignants, l'enseignement supérieur, l'éducation de base, manuels, documents officiels et autres. À fin de collecter les articles publiés, il était indispensable de savoir quelles magazines et événements du campus de l'enseignement de mathématique sont plus reconnus par la communauté universitaire, en prenant comme référence principale le système *Qualis Capes* (Coordination de la formation des cadres supérieurs).

Les revues étaient: BOLEMA (Bulletin d'éducation mathématique), EMP (recherche en mathématiques), REVEMAT (Electronic Journal of Mathematical Education), ZETETIKÉ (Revista de Educação Matemática - Unicamp), EM TEIA (Revista de Educação Matemática et Tecnológica Ibero-américaine) Et EMR (Éducation mathématique dans le journal - SBEM). Les événements analysés ont été: SIPEM (Séminaire international sur l'éducation mathématique), LADIMA (Symposium latino-américain sur la didactique mathématique), ENEM (Rencontre nationale sur l'éducation mathématique), CIEM (Congrès international sur l'enseignement des mathématiques) et CIAEM École Interaméricaine d'Éducation en Mathématiques).

Par rapport la diversité des sujets et questions concernant la TAD, nous avons choisi d'établir une classification en six catégories, à savoir: la formation des enseignants; les étudiants de l'enseignement supérieur; les étudiants de l'éducation de base; les manuels scolaires; les documents officiels, etc. Nous présentons les résultats en deux parties: revue scientifique et événements scientifiques.

2. Résultats

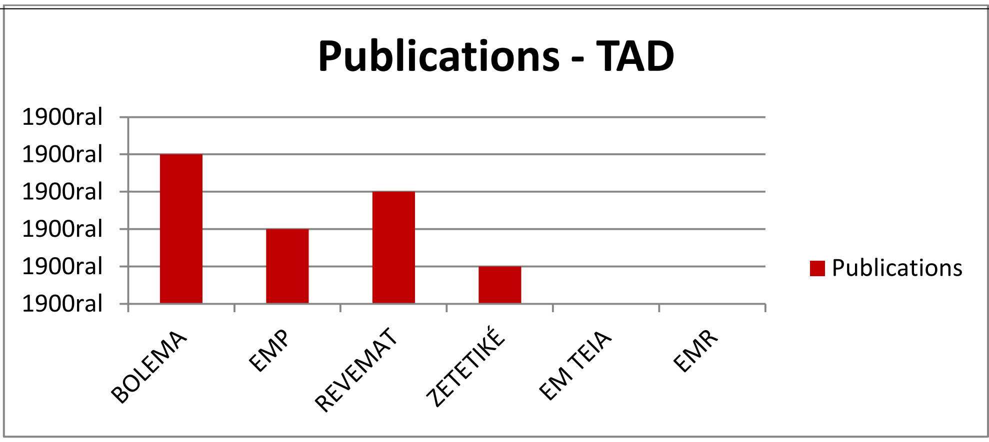
Puis la sélection des revues, il a eu lieu la recherche pour les articles qui utilisent le TAD et vérifier dans quelles éditions telles l'utilisation était plus fréquente. Nous avons catalogué tous les articles par année, comme on peut le voir dans le graphique ci-dessous :



Grafique 1. Pourcentage des publications dans des revues par TAD Edition.

On peut voir dans le tableau que dans les années 2006, 2007, 2008 et 2010 il n'y avait pas de publications traitant de la TAD, en 2009, 2011, 2012, 2013 et 2016 nous avons la même quantité de publications correspondant à 10% du total et les années le plus souvent en 2014 étaient de 30% et 2015 20% des publications. Ainsi, nous pouvons évaluer qu'il y avait plus de publications dans ce sujet entre les années 2014 et 2015, pour atteindre en 2014 le plus grand nombre d'articles publiés.

Selon le nombre total de publications deux revues se sont démarqués avec un plus grand nombre d'articles publiés en référence à la théorie anthropologique de l'enseignement. Comme on peut le voir dans le deuxième grafique :



Grafique 2. Publications sur TAD dans les revues.

La revue BOLEMA a été mise en évidence comme le magazine qui a publié plus d'articles liés à la TAD, suivi par le magazine REVEMAT, les deux ont présenté le plus grand nombre d'articles publiés par rapport aux autres revues.

La revue EM TEIA a été la seule parmi les sélectionnés qui n'identifié aucun article qui fait référence TAD.

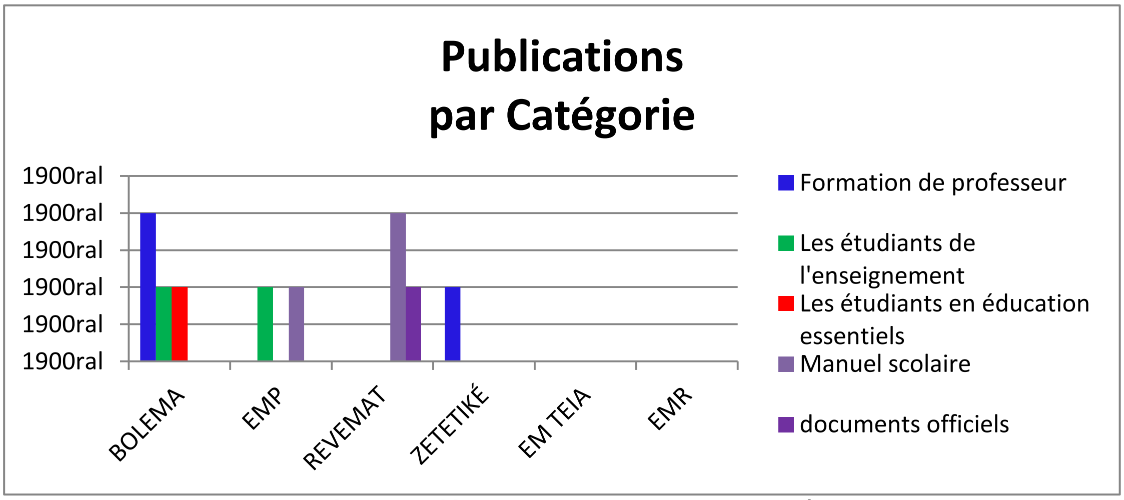
Après cette vérification, la classification ou catégorisation par la diversité des thèmes et des questions portant sur la TAD en fonction des catégories mentionnées précédemment, comme suit: 1) la formation des enseignants; 2) étudiants de l'enseignement supérieur; 3) l'éducation de base Les élèves; 4) Manuel scolaire; 5) Documents officiels.

Dans la revue des éditions BOLEMA de 2006 à 2010, ils ont été trouvés quatre articles traitant du TAD, parmi lesquels nous pouvons identifier que deux articles traitent du TAD dans la formation des point de vue de l'éducation; 1 avec les étudiants de l'enseignement supérieur; 1 avec les élèves de l'éducation de base. Dans le magazine PUC-SP EMP dans les éditions de 2006 à 2016, ils ont été identifiés deux articles traitant du TAD comme théorique, y compris un rang dans la catégorie des étudiants de l'enseignement supérieur et l'autre dans les manuels de catégorie.

Dans le magazine REVEMAT a été identifié trois articles entre 2006-2016 liés à la TAD, où l'un d'eux fait l'analyse des documents officiels et les deux autres manuels.

Dans le magazine ZETETIKE entre les éditions de 2006 à 2016 un seul article a base théorique la TAD et cela met l'accent sur la formation des enseignants.

La revue EM TEIA, nous n'avons pas identifié aucun article dans la perspective du TAD. Dans le cas de la revue DME (enseignement des mathématiques Magazine) de la Société brésilienne de l'enseignement des mathématiques (SBEM) dans sa version en ligne n'a pas permis d'identifier également des articles avec la TAD. Nous pouvons voir dans le grafique ci-dessous, la quantité de publications conformément aux catégories définies.

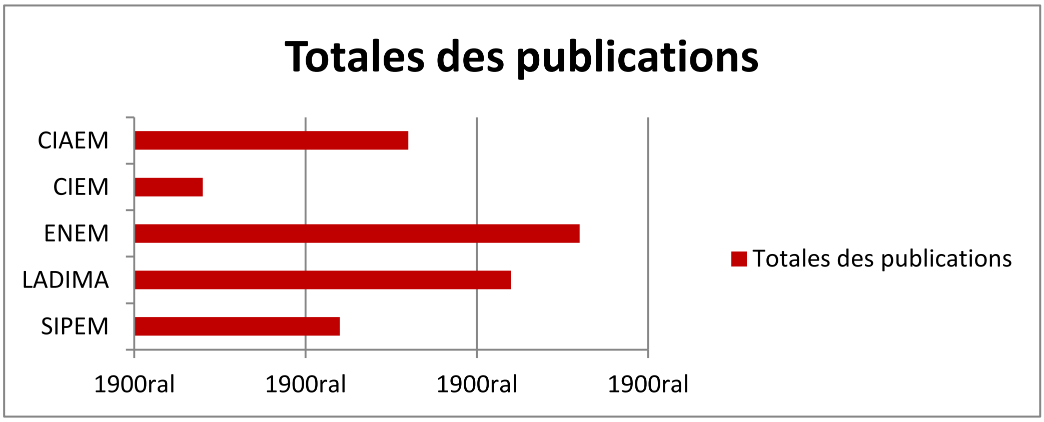


Graphique 3. Publications sur TAD en Revues par catégorie.

3. Analyse des événements

Après vérifier les événements les plus importants dans le contexte de la recherche dans l'enseignement des mathématiques, nous commençons à vérifier les annales de chacun de ces événements pour trouver des articles relatifs à la TAD.

En ce qui concerne au total de publications de 2006 à 2016, nous avons obtenu les résultats suivants: dans les annales de SIPEM nous trouvons trois articles portant sur le sujet TAD; dans LADIMA nous avons identifié onze articles; dans ENEM treize publications; dans CIEM seulement deux et dans CIAEM il y avait huit articles au thème. Comme on peut le voir dans graphique ci-dessous:

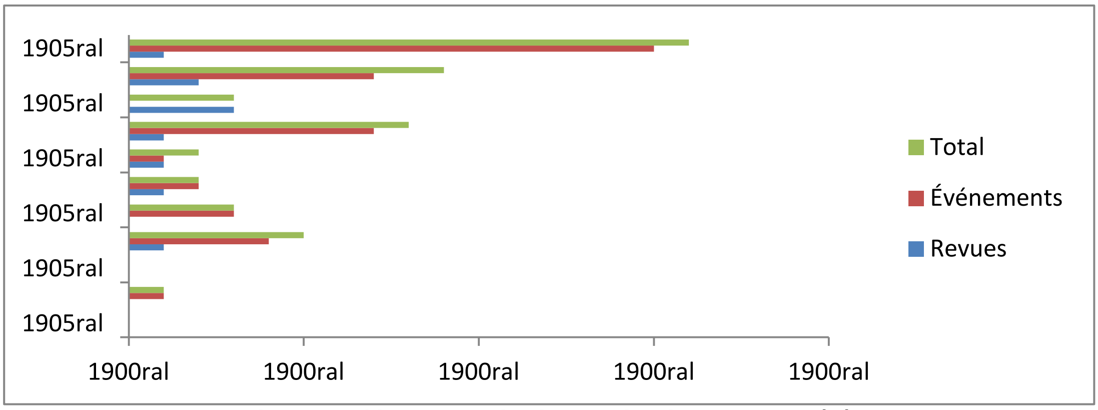


Graphique 4. Publications TAD totales dans les événements

Nous pouvons vérifier que l'événement où plus d'articles ont été publiés entre les années 2006 à 2016 a été la Réunion nationale d'éducation en mathématiques - ENEM et celle qui a présenté un plus petit nombre de publications a été le Congrès international d'enseignement des mathématiques - CIEM.

Notre objectif principal était d'identifier et d'analyser ce qui a été publié entre les années 2006 et 2016 dans des revues et des annales d'enseignement mathématique sur la théorie anthropologique didactique (TAD). Avec cet argument en collaboration avec ce qui a été analysé, nous pouvons affirmer qu'en ce qui concerne les revues de l'éducation en mathématiques, seulement 10 articles ont été identifiés dans la période analysée. Pourtant, dans les événements, 40 articles publiés ont été identifiés, comme nous l'avions déjà prévu a priori, car ces événements rassemblent plusieurs chercheurs pour traiter différents sujets.

Le graphique ci-dessous montre l'augmentation des publications scientifiques dans les revues et les annales d'événements de 2006 à 2016. Comme nous pouvons voir le nombre de recherches et de publications sur le TAD est dans des annales d'événements ou de publications dans des magazines qui, entre les années 2011 à 2012, le nombre de publications augmente année après année. Les publications dans les événements montrent une forte augmentation à partir de 2015, présentant un plus grand nombre de publications en 2016. En 2014, les magazines présentent leur plus grand nombre de publications.



Graphique 5. Publications totales du TAD dans les journaux et événements.

Nous pouvons évaluer, à partir de là, que le TAD est utilisé davantage dans la catégorie des manuels scolaires. Par conséquence, nous pouvons conclure que les publications dans les revues et les annales des événements de l'Education mathématique qui abordent la théorie anthropologique de la didactique comme référence théorique ont augmenté au fil des années afin que cette théorie soit plus utilisée dans l'analyse des manuels scolaires.

4. Considérations finales

Dans l'analyse effectuée dans les revues scientifiques, nous soulignons que: BOLEMA (Bulletin d'éducation mathématique) s'est distingué pour le plus grand nombre d'articles liés au TAD, nous pouvons également dire que 30% des articles identifiés dans les journaux ont été publiés en 2014, la fréquence la plus élevée. Et nous avons évalué que le TAD est utilisé davantage dans la formation des enseignants et dans la catégorie de l'analyse des manuels, puisque les deux ont présenté la même quantité de publications.

En ce qui concerne les événements scientifiques, nous avons eu deux points forts par rapport au nombre de publications: ENEM (National Meeting of Mathematics Education) et LADIMA (Symposium latino-américain sur la didactique mathématique). Le premier a identifié un plus grand nombre d'articles, et le second a également été souligné par le nombre d'articles, deux moins que l'ENEM. Cependant, il se distingue parce que c'est sa première édition et elle présente un grand nombre d'articles avec TAD et thèmes de diversité. Nous avons vérifié que, dans les années 2015 à 2016, le nombre d'articles publiés était de 55%. Il a également été possible d'évaluer que le TAD est utilisé davantage dans la catégorie des manuels scolaires.

En général, nous pouvons conclure que ces dernières années, il y a eu une avance dans le nombre de publications scientifiques sur la théorie anthropologique de la didactique dans les magazines et les annales d'événements qui visent à diffuser la production académique liée au domaine de l'éducation en mathématiques. Cependant, il existe encore peu de publications sur ce sujet, en outre, la plupart des articles trouvés se limitaient à l'analyse des manuels scolaires.

Références

BARBOSA, E.J. T.. Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**.** Dissertação de Mestrado, UEPB, 2011.

BARDIN, L. (2011). Análise de conteúdo (Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro). São Paulo: Edições 70.

BESSOT, A. Transposition Didactiqueet Rapport Istituitionnel. Coursdonnéle 23 octobre 2003, pourle M2 EIAH-D, EU 1 <<Conceptsfondamentaux de ladidatique>>. Laboratoire Leibniz de 1’ Université Joseph Fourier, équipe DDM, 2003.

Chevallard, Y. (1991). Surlanotion de tempsdidatique. IV ècole d’ Eté de Didactique des Mathematiques.

Chevallard, Y. (1992). Conceptsfondamentaux de laddatictique: perspectives apportées par une appocheanthropologique. In Recherches en Didactique des Mathématiques 12(1). Grenoble: La PenséeSauvage. p. 73-111.

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantesen Théorie Antropologie Didactique. In: Recherchesen Didactiques des Mathématiques 19(2). Grenoble: La Penssé Sauvage, 1999. P. 221-226.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2011, Recife. **Equação do Primeiro Grau: um estudo das organizações matemática e didática, Anais**. Pernambuco: CIAEM, jun. 2011. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1637> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII, 2011, Recife. **Estudo sobre o ensino de equações do 1º grau, na França e no Brasil, à luz da Teoria Antropológica do Didático, Anais**. Pernambuco: CIAEM, jun. 2011. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/661> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, México. **Praxeologías y Empiremas. Recursos extremos para laconstrucción de conocimiento, Anais**. México: CIAEM, maio 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/464> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, México.**¿Qué programas de ecuaciones defensor de laeducaciónen Brasil de laprimera? Unanálisis a la luz de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Anais**. México: CIAEM, maio 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/751> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, México. **Ecuaciones de primer grado: las matemáticas y de lasorganizaciones de enseñanza entre dos colecciones de libros de texto, Anais**. México: CIAEM, maio 2015.

Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/742> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, México. **Modelización matemática enformación de ingenieros, Anais**. México: CIAEM, maio 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1184> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, México. **Actividades de modelización para un curso de Álgebra Lineal en una formación de ingenieros, Anais**. México: CIAEM, maio 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1129> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, México. **Análisis de contextos para eldiseño de actividades de modelación, Anais**. México: CIAEM, maio 2015. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1164> Acesso em: 19 de nov. 2016.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Canoas. **A Álgebra do Professor e do Aluno: Um Olhar sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático, Anais**. Rio Grande do Sul: ULBRA, out. 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/891/516> Acesso em: 18 de nov. 2016.

CORICA, A.R.; OTERO, M. R..Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, Bolema, V. 30, n. 55, agosto, 2016.

COVIÁN CHÁVEZ, O. N.; VÁZQUEZ, A. R.. Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas em la Práctica: el caso de lavivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, Bolema, V. 28, n. 48, 2014.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, 2007, Belo Horizonte. **Uma Abordagem Praxeológica da Prática Docente na Educação Matemática, Anais**. Minas Gerais: Sbem, jul. 2007. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/palestra.html> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX, 2007, Belo Horizonte. **Análises Didáticas de Situações Matemática em Jogos: Contribuições para uma Utilização mais Eficaz dos Jogos nas Aulas de Matemática, Anais**. Minas Gerais: Sbem, jul. 2007. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1389/435> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador. **Análise Comparativa de Livros Didáticos Franceses e Brasileiros à Luz da Teoria Antropológica do Didático: O Caso das Equações do 1º Grau, Anais.** Bahia: Sbem, jul. 2010 Disponível em:

<http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC1004.pdf> acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador.**Teoria Antropológica do Didático: Uma Análise Sobre Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos, Anais.** Bahia: Sbem, jul. 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC35.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010, Salvador. **A Prática Didática no Ensino da Multiplicação de Números Racionais Vista Sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático, Anais**. Bahia: Sbem, jul. 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/CC/T17_CC1544.pdf> Acesso em 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Analise Praxeologica da Área de Figuras Geométricas Planas no Guia de Estudo do Projovem Urbano, Anais.** Paraná: Sbem, jul. 2013. Disponível em: <

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **As Organizações Praxeológicas no Ensino de Geometria: Análise da Prática Pedagógica de uma Professora Indígena, Anais**. Paraná: Sbem, jul. 2013. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1224_584_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos: um Estudo das Organizações Praxeologias, Anais.** Paraná: Sbem, jul. 2013. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/78_315_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013, Curitiba. **Progressões Aritméticas e Geométricas: Praxeologias em Livros Didáticos, Anais**. Paraná: Sbem, jul. 2013. Disponível em: <http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1265_616_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2015, São Paulo. **O Logaritmo nos Livros Didáticos: Uma Análise Segundo Yves Chevallard, Anais**. São Paulo: Sbem, jul. 2015. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5642_3788_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2015, São Paulo. **Os Contextos em que a Função Quadrática se Apresenta nas Abordagens de Livros Didáticos do Ensino Médio: Uma Amostra da Análise Praxeológica, Anais**. São Paulo: Sbem, jul. 2015. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5444_2660_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2015, São Paulo. **Praxeologias Matemáticas a Partir de Situações Didáticas Propostas por meio de Mídias Digitais, Anais**. São Paulo: Sbem, jul. 2015. Disponível em:

<http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7691_3648_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2015, São Paulo. **Uma Análise Praxeológica do Ensino de Volume dos Sólidos Geométricos em Livros Didáticos do Ensino Médio, Anais.**São Paulo: Sbem, jul. 2015. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4625_2901_ID.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

FERREIRA, N. S.A.. As pesquisas denominadas "Estado da Arte". **Revista Educação & Sociedade**, ano XXIII, nº 79, 2002, p. 257-272.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 2015, Pirenópolis. **As relações Institucionais em Documentos Oficiais Brasileiros Sobre Equações Polinomiais do Primeiro Grau, Anais**. Goiás: Sbem, nov. 2015. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/visipem/anais/story_content/external_files/As%20rela%C3%A7%C3%B5es%20Institucionais%20em%20documentos%20oficias%20Brasileiros%20sobre%20Equa%C3%A7%C3%B5es%20polinomiais%20do%20primeiro%20grau.pd> Acesso em: 18 de nov. 2016.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Petrópolis. **Organização praxeológica: equação do primeiro grau em livros didáticos do 7° ano do ensino fundamental, Anais**. Rio de Janeiro: Sbem, out. 2012. Disponívelem:<http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT02/CC00779800427_A.pdf> Acesso em: 18 de nov. 2016.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV, 2009, **Equações do Primeiro Grau: Análise Comparativa de Estudos Experimentais Realizados com Alunos Franceses e Brasileiros, Anais**. Taguatinga: Sbem, out. 2009. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIV.pdf> Acesso em 18 de nov. 2016.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV, 2009, **O que as Orientações Curriculares Preconizam? O que os Professores esperam? O que os Alunos Fazem? Uma Análise sobre a Ótica da Teoria Antropológica do Didático, Anais**. Taguatinga: Sbem, out. 2009. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIV.pdf> Acesso em 18 de nov. 2016.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV, 2009, **Entendendo o Porque e Como Deve ser Lecionada a Disciplina Álgebra Linear em uma Graduação de Engenharia Elétrica, Anais**. Taguatinga: Sbem, out. 2009. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIV.pdf> Acesso em 18 de nov. 2016.

SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV, 2009, **Prática Docentes em um Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade de Educação à Distância, Anais**. Taguatinga: Sbem, out. 2009. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIV.pdf> Acesso em 18 de nov. 2016.

SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, I, Bonito, 2016, **A Integração das Tendências em Educação Matemática à Situações Didáticas: A Malamática para Auxiliar a Aritmética Básica, Anais**. Matogrosso do Sul: LADIMA, nov. 2016.Disponívelem:<http://matematica.sistematuse.com.br/portal/Modulos/processo/resumos---trabalhos.html> Acesso em: 19 de nov. 2016.

Antibi, A. & Brousseau, G. (2000). La dé-transposition de connaissances scolaires. Recherches en didactique des mathématiques, 20(1), 7-40.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Journées de didactique comparée 2004, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr /spip/spip/article.php3?id_article=45

Asymptote in prospective mathematics teachers' graphing praxeologies

Ana Katalenić

Faculty of Education, University of Osijek, Croatia

Aleksandra Čižmešija and Željka Milin Šipuš

Faculty of Science, University of Zagreb, Croatia

Abstract. Graphical representation is one of the fundamental and widely spread representations. We performed a comprehensive research of the didactic transposition of asymptote and asymptotic behaviour in the upper secondary education in Croatia, within the framework of the anthropological theory of the didactics. Our study included textbook analysis, questionnaires with university students and interviews with two mathematicians. In this poster, we present a part of our research with an emphasis on university students' graphing praxeologies. Results showed that students' graphing praxeologies differ from scholarly praxeologies. Further, students grounded their praxeologies mostly on their high-school graphing knowledge, even after being exposed to advanced mathematics that could foster their autonomous thinking.

Résumé. La représentation graphique est l'une des représentations fondamentales et largement répandues. Nous avons effectué une recherche approfondie de la transposition didactique de l'asymptote et du comportement asymptotique dans l'enseignement secondaire supérieur en Croatie, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Notre étude comprenait une analyse de livres scolaires, des questionnaires avec des étudiants de l'universités et un entretien avec deux mathématiciens. Dans cette affiche, nous présenterons une partie de notre recherche en mettant l'accent sur les praxéologies graphiques des étudiants de l'universités. Les résultats montrent que les praxéologies graphiques des élèves diffèrent des praxéologies académiques. En outre, les élèves ont fondé leurs praxéologies principalement sur leur connaissance graphique de lycée, même après avoir été exposés à des mathématiques avancées qui pourraient favoriser leur réflexion autonome.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VIcongrès international de la TAD (Autrans, 22-26janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Introduction

Graphical representation is one of the fundamental and widely spread representations, in mathematics and elsewhere. Mathematics curriculum for general secondary mathematics education in Croatia includes standard topics related to graphing such as graphing elementary functions, conics and functions within calculus.

We performed a comprehensive study within ATD on asymptote and asymptotic behaviour as a body of knowledge in the Croatian upper secondary mathematics education. Here, we present a part of our research emphasizing university students' graphing praxeologies.

2. Literature Review

The existing studies related to asymptotes in graphing do not focus on appearance and the role of the asymptote in graphing. A certain deal of research was conducted on the use of various software to enhance mathematics teaching and learning (Yerushalmy, 1997). Dahl (2016) investigated students understanding and concept image of asymptotes and Kidron (2011) students' construction of knowledge related to the horizontal asymptote. Zarhouti, Mouradi and Maroufi (2014) described how obstacles of different nature affected students' performance in graphing function within calculus.

The graphing activity is the *praxis* that should promote or apply the *logos* of point-wise, local and global properties of a function or a curve, as suggested by Vandebrouck (2011). We investigated what mathematical knowledge prospective mathematics teachers draw on when graphing functions and curves especially with respect to appearance of asymptotes.

3. Methodology

In the comprehensive study, we examined the didactic transposition of asymptote and asymptotic behaviour in the upper secondary education in Croatia, following the ATD (Chevallard & Bosch, 2014; Chevallard & Sensevy, 2014).

We performed mathematical and scientific literature review, praxeological analysis of curriculum and textbooks as representatives of knowledge to be taught (see Čižmešija, Katalenić and Milin Šipuš (2017)), questionnaires with university students and focused interview with two scientists. The interview was designed to gain insight into mathematicians' beliefs and ideas as members of institution of scholarly mathematics. Students' available knowledge is product of both secondary and university level mathematics education. It is also potentially taught knowledge since participating students were prospective mathematics teachers. Winsløw and Grønbæk (2014) emphasized that prospective teachers should advert to university mathematics when teaching.

4. Research setting and questionnaire items

Participants in our study were 51 students in their final, fifth year (age 21-23) at the largest mathematics department in Croatia. Majority of students attended general upper secondary school and graduated as bachelors in mathematics education that also included formal mathematical education.

We administered three questionnaires with mainly open-ended items characterized as routine, non-routine and problem mathematical tasks. In this poster, we present results of three items, two from the first and one from the last questionnaire. In the first two items (item 1.1. and item 1.3.), we expected students to use some of the following praxeologies:

- P: plotting corresponding points $(x, f(x))$ and connecting them by a smooth curve;
- T: transforming a prototype graph of an elementary function to get a graph of a composite elementary function; this evokes *praxis* of algebraic manipulation and discursive knowledge about function composition with linear function;
- F: drawing a curve using discursive knowledge about graph shape and point-wise, local and global properties of the function.

Item 1.1. Graph a function f given with $f(x) = (2x - 1) / (x - 1)$. Describe the function.

Item 1.3. It is expected that percentage (expressed as a decimal) of viewers, who will respond to the commercial message for a new product after t days, behaves according to the formula $o(t) = 0.7 - 2^{-t}$.

(a) Represent graphically the given relationship $o(t)$.

(b) What is the expected percentage of viewers who will respond to the commercial message after 7 days?

(c) Describe behaviour of the expected percentage of viewers who will respond to the commercial message as days pass.

Item 3.3. A hyperbola is given by its equation $x^2 - 4y^2 = 4$.

(a) Find the equations of asymptotes of the given hyperbola.

(b) Find the equation of the tangent line of the given hyperbola from the point P (–1, –1/2).

(c) Draw the hyperbola and the lines from the tasks (a) and (b). What do you notice? Explain the meaning of the obtained results.

5. Results

5.1. Praxeologies in the item 1.1.

In this item, 46 students answered as given in table 1.

Praxeology	P	C	C and P	Partial C	T	**Total**
Incorrect or no graph	4	6	2	2		14
Incorrect graph in hyperbola shape	5	6	3		1	15
Correct graph with vertical or no asymptotes	4		1			5
Correct graph with horizontal or both asymptotes	1	5	4	2		12
Total	14	17	10	4	1	46

Table 1: The number of students with regard to the praxeology used when graphing rational function[1]

Among students who plotted points, some drew a hyperbola-shaped curve, that would intersect the line $y = 2$, thus making a graph with incorrect function range (see figure 1), and some students drew a curve through appropriate points without displaying function behaviour at infinity. Only one student used transformation but made a blunder in the algebraic manipulation of the given expression.

[1] We used C to denote drawing a curve using analysis with calculus.

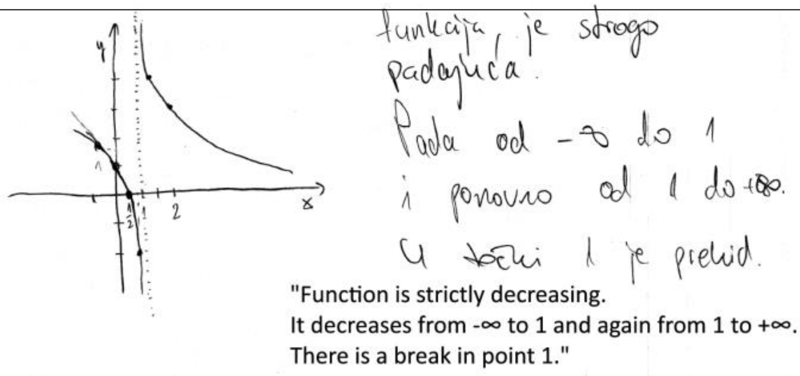


Figure 1: An example of student's incorrect graph of the rational function

Majority of the participants analysed the function with calculus. Those students explored first derivative, function domain, function limit at infinity, and some of them the second derivative.

Less than half of the students described the function, and 20 students wrote about function monotonicity. Two students elaborated asymptotic behaviour in some manner.

5.2. Praxeologies in the item 1.3.

In this item, 47 students answered as given in table 2.

Praxeology	-	P	T	F	Total
Incorrect or no graph	4	8			12
Incorrect graph with horizontal asymptote		6			6
Correct graph		13	1		14
Correct graph with horizontal asymptote		11	1	3	15
Total	4	38	2	3	47

Table 2: The number of students with regard to the praxeology used when graphing exponential function

Students who drew incorrect graph displayed a convex curve or a line through plotted points, or made errors when evaluating function or entering points. Students, who drew correct graph without horizontal asymptote by plotting points, displayed curves that increase unboundedly, or the behaviour at infinity is (graphically) unavailable (see figure 2) or depicted with stagnation.

Students wrote about monotonicity, asymptotic behaviour or both properties of the given exponential function. Students who plotted points wrote the values were increasing more often than they wrote about the asymptotic behaviour. Almost all of the students who depicted the horizontal asymptote also mentioned the asymptotic behaviour of the values; and 44% of the students, who did not depict the asymptote, mentioned the asymptotic behaviour of the values (see figure 2).

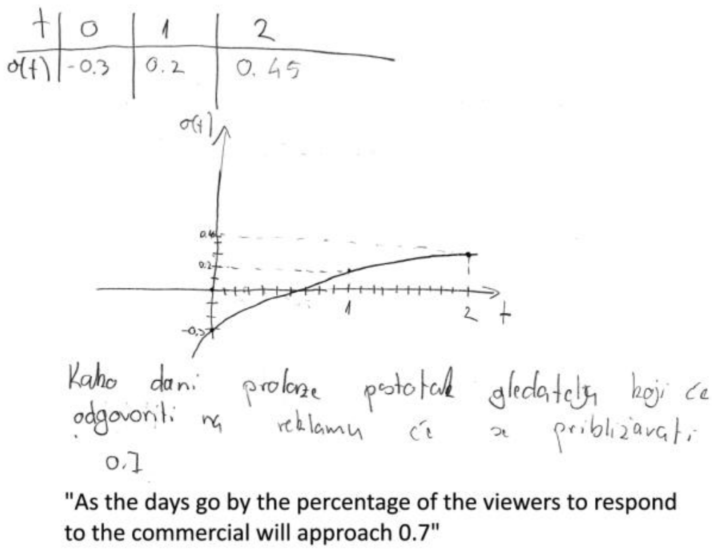


Figure 2: An example of student's correct graph of the exponential function

5.3. Praxeologies in the item 3.3.

In this item, 37 students answered and majority of them used the expected technique of drawing a curve passing through points marked as vertices and approaching lines marked as asymptotes. Students made errors in obtaining equations of the asymptotes, graphing asymptotes as lines or entering the hyperbola vertices.

5.4. The scholarly perspective of the graphing praxeology

Both interviewed scientists agreed that all discursive properties should be discussed and recognized when graphing elementary functions. They found that the graph shape – i.e. global properties of elementary functions, should be familiar already to students in their upper secondary mathematics education. Both scientists preferred graph transformations over other graphing techniques, especially over plotting points and graphing by function analysis using calculus.

6. Discussion

Three tasks presented to students showed that students' graphing praxeologies to a large scale differ from praxeologies provided by two mathematicians. Although students rarely provided comprehensive discursive answers, their used techniques showed vague correlation and conversion between different representations and settings which require asymptote, especially related to graphing of rational functions and a hyperbola. Students predominantly used "too strong tools" in graphing simple rational function by relying on analysis of the given functions within calculus. In contrast, they mainly relied on plotting points when graphing exponential function. When graphing a hyperbola, they mostly focused on its global shape complemented by pointing up the vertices. Overall, the asymptote was underrepresented in the *praxis* and *logos* of students' answers.

7. Conclusion

The three tasks in our study problematized the appearance and the role of the asymptote in graphical representation of basic functions and curves. Previous research and scholarly perspective suggests that different properties of functions and curves are considered to be helpful for graphing. With respect to the asymptote, students' strategies were found to be predominantly dependent on the particular settings in which the task was presented, thus fragmented and partially incoherent. The study also revealed that majority of students did not autonomously upgrade their high-school graphing praxeologies to more coherent ones, not even after being exposed to advanced university mathematics. In our further research we would explore constraints that hinder students in using their academic knowledge in the context of secondary mathematics education – e.g. by interviews with prospective teachers and institutional analysis of university education.

References

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 170–174). Springer Netherlands.

Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 38–43). Springer Netherlands.

Čižmešija, A., Katalenić, A., & Milin Šipuš, Ž. (2017). Asymptote as a body of knowledge to be taught in textbooks for Croatian secondary education. In Z. Kolar-Begović, R. Kolar-Šuper, & L. Jukić-Matić (Eds.), *Mathematics education as a science and a profession* (pp. 127–147). Osijek: Element.

Dahl, B. (2017). First-Year Non-STEM Majors' Use of Definitions to Solve Calculus Tasks: Benefits of Using Concept Image over Concept Definition? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(7), 1303–1322.

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 1261–1279.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 149–185.

Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(1), 59–86.

Yerushalmy, M. (1997). Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*(1), 1–25.

Zarhouti, M. K., Mouradi, M., & Maroufi, A. E. (2014). The teaching of the function at high school: The graphic representation of a function at first year, section experimental sciences. *IOSR Journal of Research & Method in Education, 4*(3), 56–65.

The perspective of teacher trainees about the mathematics teacher´s profession

Ana Rosa Corica

CONICET, NIECyT, UNCPBA, Argentina

María Rita Otero

CONICET, NIECyT, UNCPBA, Argentina

Abstract. We present some results of the design and implementation of a research and study course for the Mathematics teacher trainees. The research is based on the Anthropological Theory of the Didactic. We analyze which gestures of the paradigm of the questioning and the research are identified in teacher trainees that study the question: *how to teach mathematical knowledge?*

Resumen. Presentamos algunos resultados del diseño e implementación de un recorrido de estudio e investigación para la formación de profesores en matemática, basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Analizamos qué gestos del paradigma de la investigación y el cuestionamiento, se identifican en estudiantes de profesorado que estudian la cuestión: *¿cómo enseñar el saber matemático?*

Résumé. Nous présentons quelques résultats de la conception et de la mise en œuvre d'un programme d'étude et recherche pour la formation des enseignants en mathématiques, basé sur la Théorie Anthropologique du Didactique. On analyse les gestes du paradigme de la recherche et du questionnement du monde identifiés chez les étudiants quand ils étudient la question: *comment enseigner des mathématiques?*

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

1. Introduction

This work is set in the problematic of the mathematics trainees. Bosch & Gascón (2009) consider that this problematic is not solved with the necessary skills for the practice of the teaching profession. Our results show that the theoretical training does not guarantee that teacher trainees (TT) acquire didactic praxeological equipment (Corica and Otero, 2014). In this paper, we present partial results of the design and implementation of a study program for TT in Mathematics. The principal aim is that these TT adopt a non-traditional pedagogy model, based on research and on linking mathematics with other disciplines. In particular, we analyze which elements of the paradigm of the questioning and the research are identified in TT, who study the essential issue to the mathematics teacher profession: *how to teach mathematical knowledge?*

2. Theoretical framework

We adopt as theoretical framework the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 1999, 2007, 2013a; 2013b). Following the lines suggested in the theory, it is necessary to introduce functional study processes into education systems. The Study and Research Path (SRP) are devices that would allow facing the monumentalization process of knowing and giving life to research pedagogy in the math class. The management of teaching by means of an RSP requires executing didactic gestures typical of the study and research, called dialectics (Chevallard, 2007, 2013b). The *Study and Research dialectic* is the engine of a teaching by SRP. It is not possible to investigate without studying.

3. Methodology

The methodology proposed is exploratory and descriptive (Hernández, Fernández and Baptista, 2010).

We designed and implemented a study program concerned with notions of mathematics didactic aimed at TT in Mathematics.

In the first situation, we want the TT to experience by themselves the study of ATD involved in a teaching based on the principles of the paradigm of the questioning and the research. We develop an activity in which not foreseen questions arose at the outset, causing the study to occur in different directions. This paper presents an analysis of the first session of this situation. The second situation aimed at TT living a co-discipline SRP (Parra, Otero and Fanaro, 2015) since all along their academic training they have never been involved in a teaching governed by the research pedagogy. When circumstances allowed it, we sought to study both situations in a complementary way.

3.1. Description of the TT group

The research took place in a third-year course corresponding to Teacher Training in Mathematics in a National University in Argentina. The study program proposes to focus on the training of TT in the ATD. In previous courses, the TT studied: Didactical Situations Theory (Brousseau, 1986), Instrument - Object Dialectic and frame playing (Douady, 1988) and the fundamental principles of the Anthropological Theory of Didactics (Chevallard, 1985, 1999).

The course lasted 4 months with two weekly meetings of 4 and 3 hours. During the 4-hour meetings TT studied the first situation where Research Teacher (RT) was the study director. During the meetings of 3 hours, the TT experienced as students a codisciplinary SRP. These classes were conducted by the researcher who developed the didactic device. The course was composed of 12 students. In all class sessions the TT formed the same workgroup: 5 groups of 2 or 3 members each.

3.2. Data collection

In the first session, the RT proposed a generating initial question and during the subsequent lessons, when circumstances required, he provided material for study. So questions and answers developed by each group were withdrawn at the end of each session and were scanned and given back to students in the immediate following session. All students' written protocols of students of each implementation were obtained.

In the first session, as a synthesis of the contributions of the various working groups, the community developed a study package proposal of the means to study throughout the course. In the subsequent sessions, the different groups contributed questions (Q_i) and answers (A_i) pairs according to their interests and needs.

3.3. Data analysis

The data analyzed are the product of the protocols that we collected from students and general audio transcription of the first session. For data analysis, the transcription of the general audio was segmented into episodes and its study was supplemented from the study protocols. The criteria adopted for the segmentation in episode was when the community study speech raised a new question. This allowed to sort questions and answers pairs provided by the study community and identify the actors who were the producers. We formulated categories inductively, that permitted to make inferences about the types of questions that constitute the primary means of study.

4. Result analysis

In the first session we presented a video about different possible classroom situations to provoke TT to reflect and place themselves in understanding and designing teaching practices. Then, we proposed them to work in groups and carry out the following task:

Q_0: How to design and implement didactics devices for the mathematics study?

The study of Q_0 led to the formulation of questions and answers pairs (Q_i, A_i), which we detailed below. The RT had to intervene several times so that students did not give immediate and finished answers.

Following, we indicated the set of questions and answers (Q_i, A_i) that emerged from the Q_0 study in the first session (Figure 1):

Q_1: What are the didactics devices?
Q_2: What kind of tools provides the mathematics?
Q_3: What is a dynamic sequence?
Q_4: How should the teacher - student interaction be?
Q_5: What kind of tools should the teacher provide?
Q_6: How can the teacher show students that mathematics is useful for their future?
Q_7: How can he raise interest in students?
Q_8: How to show students that mathematics is for the future?
Q_9: What do the teachers do when a student brings a problem?
Q_{10}: How do we choose an activity?
Q_{11}: How to determine the background knowledge of the students?
Q_{12}: How to strike a balance between the students who are interested in passing and those who are interested in learning?
Q_{13}: What should be the role of the teacher towards different proposals?
Q_{14}: How do we look for information?
Q_{15}: How to implement a didactic device at university?
Q_{16}: What is an introductory problem?
Q_{17}: What features should the problem have?
Q_{18}: What if a part of the class has no interest in participating?
Q_{19}: What is the difference between a professor and a teacher at high school?
Q_{20}: How does the number of students influence?
Q_{21}: What to do when the teacher worries about the students' behavior?

Figure 1. The set of questions and answers (Q_i, A_i) that emerged from the Q_0 study in the first session

From the analysis of the questions and answers pairs that emerged from the study community, we formulated categories inductively, which allowed to synthesize and characterize the primary study medium. The categories and subcategories are described below:

Questions type. This refers to the style of questions proposed by the study community. We distinguish two types of questions:

Interrogative What. These questions admit an immediate and finished response.

Interrogative How. Such issues go beyond the demands of mere information. They outsource an issue in which their research generates questions and answers.

Types of responses. It refers to the type of response that brings the TT to the issues raised. We distinguish three kinds of responses:

Questions in weak sense (QWS). These answers provide a closed and completed response.

Questions in half sense (QHS). These responses are formulated as a finished and closed answer, and derivate in new questions.

Questions in strong sense (QSS). These answers generate several questions that the TT cannot provide an answer for, and requires restart their study.

Main actor. This category includes the actor of the study process that makes each question. Each actor is identified as follows:

Teacher Trainees (TT)

Research Teacher (RT).

On Table 1 we show the analysis results of the questions and answers pairs formulated:

Interrogative What…	Interrogative How…	Types of responses	Main actor
	Q_0	QSS	RT
Q_1		QHS	TT
Q_2		Unanswered	TT
Q_3		QWS	TT
	Q_4	QWS	TT
Q_5		Unanswered	RT
	Q_6	Unanswered	RT
	Q_7	QSS	RT
	Q_8	QWS	RT
Q_9		Unanswered	RT
	Q_{10}	QHS	TT
	Q_{11}	QHS	RT
	Q_{12}	Unanswered	TT
	Q_{13}	QHS	RT
	Q_{14}	Unanswered	RT
	Q_{15}	QWS	TT
16		QWS	TT
Q_{17}		QWS	TT
Q_{18}		QWS	TT
Q_{19}		QWS	TT
	Q_{20}	Unanswered	TT
Q_{21}		Unanswered	TT

Table 1. Analysis results of the questions and answers pairs formulated by the study community

We highlight that only 2 out of the 22 questions, were formulated in a strong sense. Both were provided by the RT, one of them is the initial generator question Q_0, and the other is questions Q_7 that refers to how the teacher manages the students' interest in the mathematics study.

The TT tend to propose questions that begin with the interrogative what (8/10). They made only 5 out of 12 questions that begin with interrogative how. This highlights the need of the TT to formulate questions that can provide immediate and finished answers. On the other hand, we emphasize that 12 questions support answers in weak and half sense. There is a high number of questions (n = 8) that the TT did not provide an answer, which makes that the means require to continue their study in the following sessions.

5. Conclusions

The analysis results of the first class indicate that the Q_0 study of TT is reduced to propose questions, and possible immediate answers, as if there was no more to study. This required that the RT should intervene on several occasions to problematize the questions that TT made. We consider that the questions and answers pairs proposed by TT do not invite to reflection. The largest proportion of these questions aim at establishing *what* to do so that the students will have interest in the mathematics study.

This interest seems to be more linked to the fact that students like mathematics rather than they are interested in the mathematics as a knowledge field. In the TT manifestations, the issue on mathematics teaching is absent since their interventions stay at the pedagogic and society levels. This characterization of the teacher's profession emphasizes that the teacher is responsible for the students´ like the mathematics.

In the subsequent sessions, we continued studying and modifying the study means conceived in the first session. We get greater evidence of the development in the TT attitudes compatible to enter the research pedagogy.

References

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des mathématiques,* 7(2), 33-115.

Bosch, M.; Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action* (pp.49-85), Montpellier: IUFM de l’Académie de Montpellier.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.89-113). Santander: SEIEM.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2013a). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2 (2),* 161-182. doi: 10.447/redimat.2013.26.

Chevallard, Y (2013b). *Éléments de didactique du développement durable. Leçon3.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactiquedu-DD-2012-2013-3.pdf

Corica, A. & Otero, M. (2014). La formación de profesores de Matemática desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico: un estudio de caso. *Perspectiva Educacional. 53(2),* 20–44.

Douady, R (1988) Dialectique outil-objet et jeux de cadres. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 5-31.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México D.F.: Mc Graw Hill.

Parra, V., Otero, M. R. & Fanaro, M. (2015). Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. Preguntas generatrices y derivadas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 69, 1-10.

Transposición museográfica en un museo virtual sobre educación

Dolores Carrillo Gallego

Encarna Sánchez Jiménez

Universidad de Murcia, España

Abstract. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) has been applied to the design of the museum exhibitions (museographic transposition). The aim of this communication is to explore the use of the didactic transposition for the design and the implementation of a virtual education museum. The Virtual Museum of History of Education (MUVHE) is housed at the University of Murcia and has been open to the public since 2010. The reorganization that is currently underway has been a moment of reflection on the meaning of a virtual museum. How can the museographic transposition help to understand/organise a virtual museum?

Resumen. La teoría de la Transposición didáctica se ha aplicado al diseño de exposiciones museísticas (transposición museográfica). El objetivo del trabajo es explorar el uso de la transposición didáctica en el diseño e implementación de un museo virtual de Educación. El Museo Virtual de Historia de la Educación (MUVHE) está alojado en la Universidad de Murcia y abierto al público desde el año 2010. La reorganización que se está realizando actualmente, ha sido un momento de reflexión sobre qué es un museo virtual ¿Cómo puede la transposición museográfica ayudar a comprender/organizar un museo virtual?

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

1. Introducción

La teoría de la Transposición didáctica se ha aplicado al diseño de exposiciones museísticas (transposición museográfica). El objetivo del trabajo es explorar el uso de la transposición didáctica en el diseño e implementación de un museo virtual de Educación. El Museo Virtual de Historia de la Educación (MUVHE) está alojado en la Universidad de Murcia y abierto al público desde el año 2010.

El MUVHE, como se afirma en su web (www.um.es/muvhe),

> pretende ser un espacio abierto y vivo que favorezca la catalogación, el estudio, la investigación, la protección, la conservación, el uso didáctico y la difusión del patrimonio histórico-educativo. Concebido como un espacio museístico para ser visitado por investigadores, docentes, profesionales, estudiantes y el público interesado en general, quiere contar con la participación activa de todas las personas y entidades que lo deseen, para llegar a ser, con su colaboración, una zona compartida de la memoria educativa.

Viñao (2012) considera al MUVHE un museo/laboratorio de Historia de la Educación de naturaleza universitaria, que, además de llevar a cabo las tareas museográficas, «promueven y tienen como finalidad primordial la realización de investigaciones histórico-educativas» (p. 644).

La reorganización que se está realizando actualmente, ha sido un momento de reflexión sobre el sentido de un museo virtual, sobre sus características específicas, su organización, posibilidades y límites.

En este contexto, la cuestión que ha guiado el trabajo ha sido: ¿Cómo puede la transposición museográfica ayudar a comprender/organizar un museo virtual?

2. La transposición museográfica

A lo largo del tiempo la consideración de lo que es un museo ha ido cambiando como se ve en la evolución que ha experimentado la definición dada por el propio Consejo Internacional de Museos (ICOM) desde 1947: las sucesivas definiciones han ido ampliando el sentido para acoger a la gran variedad de instituciones de memoria y etnográficas que se han ido creando a lo largo del siglo XX.

Michel Van Praët (1989) reserva el término Museo «aux institutions remplissant l'ensemble des fonctions de collecte, de recherche et de conservation et désignerons sous le terme de Galerie le lieu des présentations publiques du Musée» (p. 4). Por tanto, en un museo se diferencian dos ámbitos fundamentales, con diferentes destinatarios:

> a) La recogida, catalogación y estudio de los objetos, materiales o inmateriales, que conforman el museo. Es el ámbito de los expertos, de los investigadores.
>
> b) La exposición de los objetos, que implica una labor previa de selección y organización de los contenidos. Es el ámbito público del museo.

Laurence Simonneaux y Daniel Jacobi (1989), basándose en el concepto de transposición didáctica definido por Yves Chevallard, introducen el concepto *transposición museográfica* para describir «the transposition of the learned knowledge into the knowledge to be presented in an exhibition» (p. 407), es decir, la transformación del conocimiento para comunicarlo en un ámbito museístico.

El concepto de transposición museográfica se ha aplicado, fundamentalmente, al ámbito público del museo, al análisis y creación de las exposiciones que se preparan en las instituciones museísticas; así lo hacen Simonneaux & Jacobi, (1989) y Marandino & Mortensen (2011). Estas últimas señalan que:

> the didactical transposition that take place in a museum context is *more critical* than that which takes place in a formal education context because one of the most important product of the transposition in a museum –the exhibition-- is usually relatively static while the product of transposition in a school context may be continouously adjusted by the teacher according to the needs of the learners (p. 324).

Un museo material dispone de fondos que deben estar catalogados y organizados por sus responsables. Pero al público solo se muestran algunos de esos objetos, organizados en salas con una temática común y colocados en un orden (vitrinas) que marcan el sentido de la visita y el relato que se quiere transmitir con esos objetos. Además, los museos elaboran exposiciones sobre aspectos concretos. La transposición museográfica se ha utilizado para el análisis de esta selección y organización en el caso de los museos de ciencias (Simonneaux & Jacobi, 1997 ; Marandino & Mortensen, 2011; Dias de Oliveira & Marandino, 2011; Achiam, Lindow & Simony, 2016).

3. Transposición museográfica en un museo virtual

El MUVHE pertenece a la categoría de los museos virtuales:

> Se trata de museos construidos y organizados específicamente en Internet, que corresponden a una colección real concreta, sino que combinan una variedad de textos, documentos, objetos, imágenes, archivos sonoros, etc., de muy distinta procedencia, cuya exposición conjunta sería difícil de organizar en un museo real (Somoza & Ossenbach, 2003, p. 910)

Un museo virtual dispone, como todos los museos, de fondos que deben ser catalogados. Pero en él, son las propias fichas de catalogación (o unas muy similares) las que se exponen. Se plantean así cuestiones diferentes a las de un museo material: los objetos aparecen en una pantalla y se tiene acceso, prácticamente, al fondo completo. Pero es necesario organizar la información de las distintas salas elaborando itinerarios y exposiciones, con similares características a las que ofrecen los museos materiales.

La organización del MUVHE nos ha llevado a considerar que, en los museos virtuales, la transposición museográfica hay que tenerla en cuenta en los dos ámbitos de los museos que señala Van-Praët.

En el ámbito enfocado a los profesionales, investigadores o docentes, la transposición museográfica se manifiesta:

- En la elaboración del tipo de fichas de catalogación. Ciertamente, la ficha no va a recoger todo el conocimiento posible sobre el objeto: la elección de los campos a considerar, cuáles de esos campos se publicarán o no, son un mecanismo de la transposición museográfica.

- Al cuestionarse el conocimiento a presentar en el museo ¿Cómo se ha seleccionado? Hay que tener en cuenta que, en un museo virtual, la mirada sobre el objeto es más dirigida; el conocimiento pretendido es más evidente. En un museo presencial se expone el objeto y la persona puede extraer sus propias conclusiones (se fija en unas u otras cosas). En un museo virtual es la ficha con la descripción de los datos y sus características lo que informa, lo que nos devuelve a la importancia de la elaboración de la ficha de catalogación.

- El conocimiento que se presenta en el museo depende, desde luego, de los objetos que forman su fondo documental ¿Cómo se han recogido esos objetos? ¿Hay una búsqueda activa o se recoge lo que llega? En un museo universitario, como es el MUVHE, los fondos de que se dispone están muy correlacionados con las investigaciones de las personas que lo administran.

En cuanto al ámbito ligado a la exposición de los fondos, el recorrido por las fichas puede no ser atractivo para el público en general. Para la labor de difusión de un museo se necesita un relato. Aparece así la recurrente tensión a la que se enfrentan los organizadores de un museo entre el objeto (base de datos en este caso) y el relato. Las exposiciones de los museos contribuyen a la construcción y difusión de esos relatos. Los trabajos, ya citados, de Simonneaux & Jacobi (1989) y de Marandino & Mortensen (2011), entre otros, plantean los retos de la elaboración de una exposición y la contribución de la transposición museográfica a esa tarea.

Por ello, el MUVHE tiene exposiciones virtuales, la mayoría de las cuales se han realizado efectivamente con anterioridad. Pero también se han elaborado «itinerarios» para orientar las visitas, los cuales, según Moreno (2016), «contribuyen a generar un discurso narrativo, iconográfico, museográfico e historiográfico cohesionado, y a potenciar, más allá de su valor científico y museístico, los usos didácticos de los mismos» (p. 176). Se trata de «contextualizar, interpretar, narrar macro, medio y micro historias con sentido porque poseen un comienzo, un desarrollo o trama y un final, o varios comienzos, desarrollos y finales» (Viñao, 2012, 649), para lo que, afirma, se requiere una labor previa taxonómica, clasificadora y tipológica (el ámbito de los expertos).

4.- Consideraciones finales

En la organización del MUVHE, las investigaciones sobre transposición museográfica pueden ser un buen instrumento. Pero esas investigaciones han analizado museos de ciencias no virtuales. El hecho de que el MUVHE sea un museo virtual y, además, de una disciplina histórica, plantea retos que se están abordando actualmente.

Referencias

Achiam, M.; Lindow, B. & Simony, L. (2016). *Was Archaeopteryx able to fly? Authentic palaeontological practices in a museum programme.* En *V congreso internacional de la TAD 2016,* Castro Urdiales.

https://www.researchgate.net/publication/294581388_Was_Archaeopteryx_able_to_fly_Authentic_palaeontological_practices_in_a_museum_programme

Dias de Oliveira, A. & Marandino, M. (2011). Museographic transposition: discurssing scholarly knwoledge of Biodiversity in the organization of museum exhibitions. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (pp. 187-202). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

ICOM (2007). *Estatutos.* http://icom.museum/fileadmin/user_upload/pdf/Statuts/statutes_spa.pdf

Marandino, M. & Mortensen, M. (2011). Museographic transposition: accomplishements and applications. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (pp. 203-216). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Moreno Martínez, Pedro Luis (2016). El Museo Virtual de Historia de la Educación (MUVHE) y el Centro de Estudios sobre la Memoria Educativa (CEME) de la Universidad de Murcia. En: Álvarez Domínguez, Pablo (coord.). *Los Museos Pedagógicos en España. Entre la memoria y la creatividad.* Gijón: Trea, pp. 169-182.

Simonneaux, L. & Jacobi, D. (1997). Language constraints in prodicing prefiguration posters for a scientifics exhibition. *Public Understanding of Science*, *6*, 383-408.

Somoza, M. & Ossenbach, G. (2003). Internet y museos pedagógicos. En: Jiménez, A. *Etnohistoria en la escuela. Actas del XII Coloquio Nacional de Historia de la Educación*. Burgos: Universidad de Burgos y SEDHE.

Van-Praët, Michel (1989). Diversité des centres de culture scientifique et spécifité des musées. *ASTER*, *9*, 3-15.

Viñao Frago, Antonio (2012). El MUVHE y el CEME como pre-texto: reflexiones sobre la protección, conservación, estudio y difusión del patrimonio histórico-educativo. En Moreno Martínez, Pedro Luis & Sebastián Vicente, Ana (eds.) *Patrimonio y etnografía de la escuela en España y Portugal durante el siglo XX*. Murcia: SEPHE y CEME, 639-651. http://congresos.um.es/fimupesephe/fimupesephe2012/paper/viewFile/15331/12301

Entités praxéologiques jugées utiles en formation initiale des professeurs des écoles

Nicolas Ros

SFR AEF, Université Toulouse Jean Jaurès (ESPE), France

Abstract. Taking account of the conditions and the constraints in which is submitted the mathematical training in M1 MEEF first degree to the ESPE, and after identifying some needs, we study aspects of the praxeological equipment of student teachers within the framework of a project of training. We assume that praxeologies of modelling and praxeologies relating to the type of task "Analyze a corpus of pupils' productions" would be useful entities – and at present missing ones – of the praxeological equipment considered adequate for student teachers by teachers.

Résumé. En tenant compte des conditions et des contraintes auxquelles est soumise la formation mathématique en M1 MEEF premier degré à l'ESPE, et après avoir identifié certains besoins, nous étudions des aspects de l'équipement praxéologique des élèves professeurs dans le cadre d'un projet de formation. Nous faisons l'hypothèse que des praxéologies de modélisation et des praxéologies relatives au type de tâches « Analyser un corpus de productions d'élèves » seraient des entités utiles – et actuellement manquantes – de l'équipement praxéologique jugé adéquat pour la position d'élève professeur par les formateurs.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

1. Conditions et contraintes

Suite à l’état des lieux de la formation initiale en mathématiques au sein des écoles supérieures du professorat et de l’éducation (ESPE), réalisé en juin 2015, lors du 42e colloque de la *Commission permanente des IREM sur l’enseignement élémentaire* à Besançon, une lettre ouverte adressée à la commission Filâtre [1] souligna « une place de la formation en mathématiques et didactique des mathématiques pas assez conséquente et en baisse depuis plusieurs années ». Récemment, la *Réunion sur la formation en mathématiques dans les masters MEEF premier degré* [2], organisée par la *Société de mathématiques appliquées et industrielles* et la *Société mathématique de France* (SMF & SMAI, 2017), constata en M1 MEEF premier degré un volume horaire moyen de 78 heures dédié à l’enseignement des mathématiques, une très faible proportion – généralement inférieure à 10 % – de mémoires concernant les mathématiques et une formation réduite concernant les mathématiques du programme du concours de recrutement de professeurs des écoles (CRPE). Certains lieux de formation choisissent même de laisser « leurs étudiants réviser seuls les contenus de mathématiques du second degré » et d’enseigner « à partir des seules mathématiques du premier degré et de la partie III du concours ». Ces quelques remarques nous permettent d’esquisser à grands traits l’écologie de l’institution de la formation mathématique en M1 MEEF premier degré, qui s’impose nécessairement à son économie praxéologique.

En nous plaçant dans le cadre de la *problématique primordiale* (Chevallard, 2017), nous proposons d’étudier l’équipement praxéologique $\mathcal{E}_I(p)$ qui serait jugé adéquat par un sujet en position f de formateur à la réalisation par un sujet en position p d’élève professeur du projet Π_p consistant à se préparer au CRPE – et, *in fine*, du projet Π_p' consistant à s’équiper pour l’entrée dans le métier. Nous faisons l’hypothèse que certaines entités telles que les praxéologies de modélisation (Wozniak, 2012) et d’analyse de corpus de productions d’élèves, sont indispensables.

1. Comité de suivi de la réforme de la formation des enseignants, présidé par le recteur Daniel Filâtre.

2. Les masters *Métiers de l’enseignement, de l’éducation et de la formation* (MEEF) ont été mis en place à la rentrée 2013, lors de la création des ESPE.

2. Praxéologies de modélisation

Nous nous plaçons maintenant dans l'institution *I* de la formation dispensée à l'ESPE Toulouse Midi-Pyrénées pour étudier cette question, en présentant tout d'abord la structure des sujets actuels [3] de l'épreuve d'admissibilité du CRPE en mathématiques. De tels sujets sont travaillés dans cette institution et permettent aux élèves professeurs (en position *p*) de s'engager dans le projet Π_p. Ils comportent trois parties que l'on peut présenter succinctement ainsi :

– partie I : problème relatif aux mathématiques travaillées jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire ;

– partie II : exercices indépendants ;

– partie III : analyse de supports d'enseignement des mathématiques en école primaire ou de productions d'élèves.

Dans les parties I et II, comme l'illustrent deux extraits de sujets [4] de la session 2017, une modélisation mathématique est soit fournie (figure 1), soit à produire (figure 2). Dans ce dernier cas, il faut donc identifier le système étudié, l'acteur, la tâche coche et la tâche problématique, afin de produire un modèle mathématique permettant d'étudier la situation.

Sans développer plus avant cette question et la façon dont les étudiants s'en emparent, notons que les enseignants en position *f* dans l'institution *I* et intervenant par ailleurs en L3 « Pluridisciplinaire orientation professorat des écoles » (PPE) [5] ont, dès l'année 2016-2017, développé en L3 PPE un projet annuel autour de la compétence « Modéliser ». On peut considérer qu'ils avaient identifié un besoin et qu'ils avaient alors mis en place des *conditions* permettant de le satisfaire. Ce qui nous permet de conclure que les entités praxéologiques de modélisation doivent être intégrées à l'équipement praxéologique $\mathcal{E}_I(p)$ jugé adéquat par les sujets en position *f* à la réalisation par les sujets en position *p* du projet Π_p.

3. Voir http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98653/les-epreuves-du-crpe-externe-du-troisieme-crpe-et-du-second-crpe-interne.html.

4. Les académies sont regroupées en groupements : le premier sujet est un sujet du groupement 1 et le deuxième du groupement 3.

5. Au sein du département *Biologie Géo-Sciences*, l'université Toulouse III héberge cette licence de préprofessionnalisation ; la plupart des étudiants de L3 PPE poursuivent leurs études en M1 MEEF premier degré à l'ESPE Toulouse Midi-Pyrénées.

Une entreprise de BTP est mandatée pour étudier la faisabilité de la réalisation d'une portion d'autoroute et d'un nouvel échangeur dans la région de Bordeaux / Brive-la-Gaillarde / Montauban.

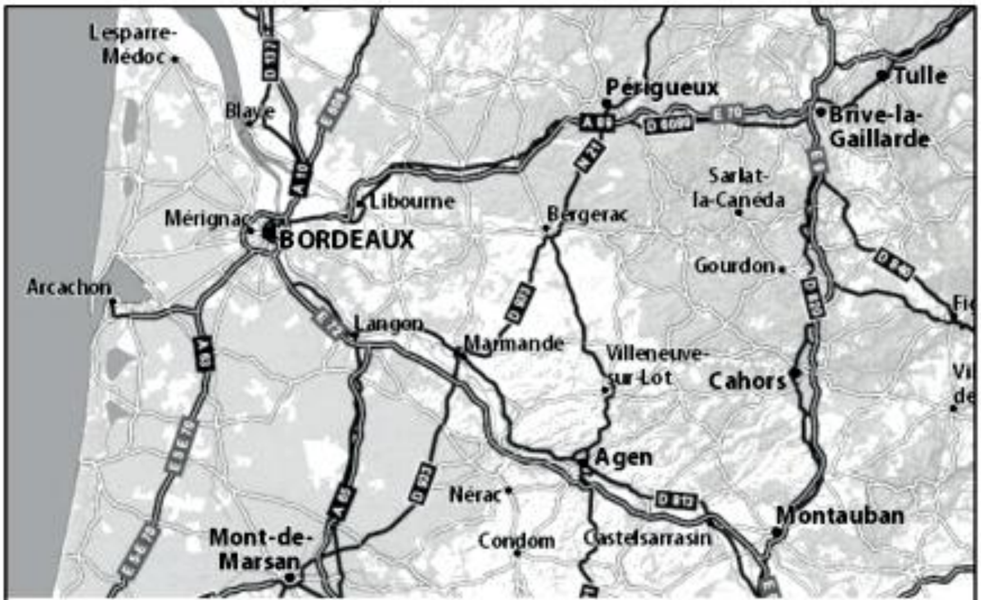


Figure 1 : Source = http://www.viamichelin.fr/

1) Représentation géométrique

À vol d'oiseau, il y a 204,4 km entre Brive-la-Gaillarde et Bordeaux, 210 km entre Bordeaux et Montauban et 145,6 km entre Montauban et Brive-la-Gaillarde.

On admet que cette situation géographique est modélisée par un triangle ABC, construit à une certaine échelle, dans lequel A représente Bordeaux, B représente Brive-la-Gaillarde et C représente Montauban.

Dans ce triangle, la longueur AB est 7,3 cm.

a) Montrer que la longueur AC est 7,5 cm et que la longueur BC est 5,2 cm.
b) Construire le triangle ABC.
c) Déterminer l'échelle utilisée pour modéliser la situation.

Figure 1. Un extrait de sujet où la modélisation mathématique est fournie.

EXERCICE 1 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Pour réaliser un collier en perles, Camille enfile 200 perles en répétant le modèle suivant : une perle jaune, puis trois perles rouges, puis deux perles blanches.
Affirmation : La couleur de la 147$^{\text{ème}}$ perle sera rouge.

Figure 2. Un extrait de sujet où la modélisation mathématique est à produire.

3. Praxéologies d'analyse de corpus

Passons maintenant à un autre type de praxéologies, en considérant un corpus D_0 de productions d'élèves de l'institution S du système éducatif. Un tel corpus contient des données chiffrées, textuelles, graphiques, etc., issues de travaux d'élèves, et son analyse par les sujets en position p permet d'apprécier leur capacité « à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement »[6]. Prenons un exemple en considérant l'année 2016-2017 lors de laquelle l'institution I a proposé trois concours blancs du CRPE à ses élèves professeurs et en reproduisant ci-après deux productions d'élèves – de CE2 (élèves de 8-9 ans) et de CM2 (élèves de 10-11 ans) – qui y étaient proposés pour analyse (figures 3 et 4) dans la partie III.

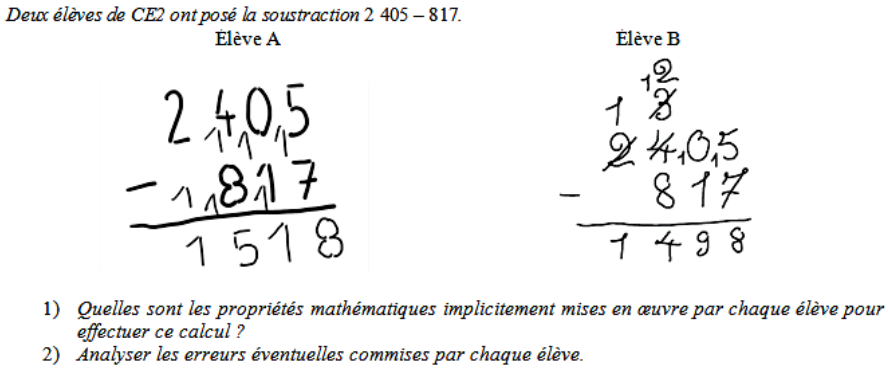


Figure 3. Extrait inspiré d'une épreuve blanche proposée par l'ESPE des Pays de la Loire [7].

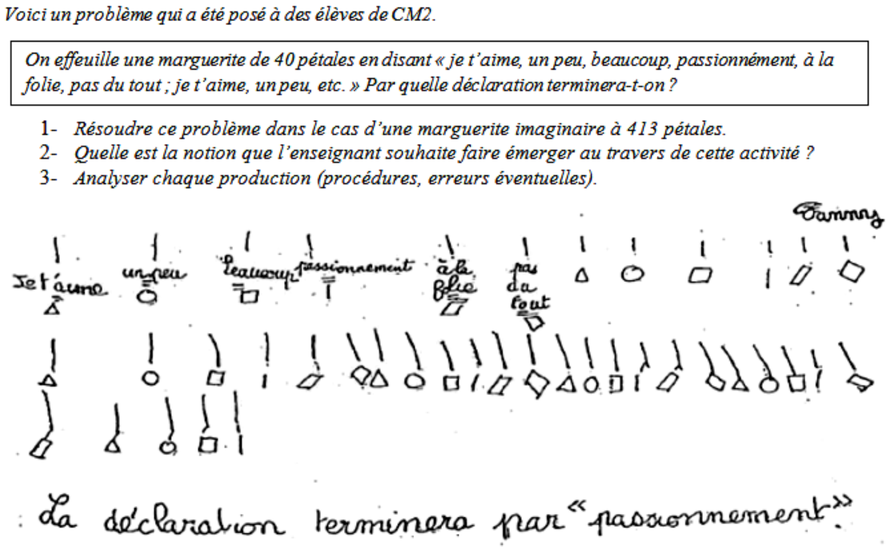


Figure 4. Extrait inspiré du sujet de 1998 de l'académie de Lyon [8].

6 Voir http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98653/les-epreuves-du-crpe-externe-du-troisieme-crpe-et-du-second-crpe-interne.html.

7. http://primaths.fr/Resources/CB%20Nantes%2001-2015.pdf

Considérons la question Q_0 « Comment analyser un corpus de productions d'élèves ? ». Posée dans l'institution *I*, elle appelle l'élaboration d'une technique τ_0 permettant de réaliser le type de tâches T_0 « Analyser des productions d'élèves » et, plus généralement, d'une praxéologie $\wp_0$. Procédons maintenant à une enquête sur la question Q_0. En TAD, on modélise l'étude d'une question *Q* par le schéma herbartien :

$$[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit},$$

où *X* désigne un collectif d'étudiants, *Y* un collectif des aides à l'étude, $R^{\heartsuit}$ une réponse appropriée au projet ayant motivé l'étude de la question *Q* par le collectif *X* et *M* le milieu produit et organisé par le système $S(X\,;Y\,;Q)$ pour engendrer la réponse $R^{\heartsuit}$. Le milieu *M* est décrit comme suit

$$M = \{Q_1, ..., Q_n, R^{\Diamond}_{n+1}, \ldots, R^{\Diamond}_{p}, D_{p+1}, \ldots, D_q, O_{q+1}, ..., O_r\},$$

où les objets notés Q_i ($1 \le i \le n$) sont des questions qui peuvent émerger lors de l'étude, les objets notés $R^{\Diamond}_j$ ($n + 1 \le j \le p$) sont des réponses déjà apportées au sein de certaines instances soit à la question *Q*, soit aux questions Q_i, les objets D_k ($p + 1 \le k \le q$) sont des corpus de données de toute nature (données chiffrées, textuelles, etc.), et les objets O_l ($q + 1 \le l \le r$) sont « d'autres œuvres » (théories, expérimentations, récits, explications, etc.). Dans l'institution *I*, *X* désignera un collectif d'étudiants en position *p* et *Y* l'équipe des enseignants susmentionnés en position *f*. Nous pouvons maintenant développer ce que signifie étudier une question :

> Étudier une question *Q*, c'est, en d'autres termes, procéder à une enquête sur la question *Q*. Une enquête « complète » suppose l'accomplissement de cycles de quatre types de « gestes » fondamentaux, qui sont quatre grands types de tâches qu'on peut formuler ainsi :
>
> $\boldsymbol{H_1}$. En fonction de leur utilité supposée pour construire une réponse appropriée $R^{\heartsuit}$, se procurer et analyser des corpus de données D_k ainsi que d'autres œuvres O_l (théories, etc.).
>
> $\boldsymbol{H_2}$. En fonction de leur utilité supposée pour construire une réponse appropriée $R^{\heartsuit}$, et à l'aide des œuvres D_k et O_l, rechercher, analyser et évaluer des réponses $R^{\Diamond}_j$ (à la question *Q* et aux questions Q_i) qui sont présentes dans les institutions de la société.

8. http://www.arpeme.fr/documents/4C06CC7F243033C116.pdf

***H*₃**. Développer une réponse appropriée, $R^{\heartsuit}$, à partir et à l'aide des réponses $R_j^{\lozenge}$, des corpus de données D_k et des « autres œuvres » O_l.

***H*₄**. Diffuser et défendre la réponse $R^{\heartsuit}$ ainsi produite. (Chevallard, 2017, pp. 26-27)

Pour produire une technique τ_0, spécifions ces quatre gestes fondamentaux dans le cas de la question Q_0 sachant que, dans l'institution *I*, des corpus de productions d'élèves D_0 sont systématiquement fournis (voir figures 3 et 4 pour des exemples).

Le geste H_1 consiste à réaliser les tâches mathématiques exposées dans le corpus D_0 fourni puis à analyser le rapport personnel des élèves évoqués dans le corpus et la praxéologie, enjeu principal de l'étude, mise en œuvre par ces élèves, dans l'institution indiquée ; les œuvres O_l sont généralement issues de l'institution des mathématiques (comme aide pour réaliser des tâches mathématiques), de l'institution *S* (programmes, documents ressources, etc.) ou de l'institution *I* (outils d'analyse didactique rencontrés en formation). L'analyse de documents relatifs à l'analyse de tels corpus serait envisageable bien que ce soit plutôt spécifique d'un travail de mémoire.

La recherche, l'analyse puis l'évaluation de réponses poinçonnées à la question Q_0 et rencontrées dans les derniers documents précités pourraient être réalisées. Cependant, le geste H_2 consiste essentiellement à poursuivre l'enquête par l'étude de questions Q_i comme « Quelle technique est mise en œuvre par l'élève A dans le corpus de la figure 3 ? », à laquelle une réponse $R_j^{\lozenge}$ fournie par exemple dans l'un des documents d'accompagnement des programmes (Ministère de l'Éducation nationale, 2016), puis analysée et évaluée, peut révéler la « méthode par ajouts simultanés ».

Le geste H_3 consiste à évaluer la conformité du rapport personnel des élèves évoqués dans le corpus D_0 au rapport institutionnel en position d'élève dans l'institution *S* puis à exhiber leurs erreurs commises. Pour chaque élève évoqué, il s'agit aussi d'évaluer sommairement le type de tâches dégagé (identification, pertinence, etc.), la technique mise en œuvre (efficacité, fiabilité, intelligibilité voire portée, etc.) ainsi que la technologie mentionnée (niveau de justification, adéquation de la forme de celle-ci aux formes canoniques en mathématiques, etc.) (Chevallard, 1999). Certaines réponses $R_j^{\lozenge}$ précédemment rencontrées peuvent faciliter l'évaluation à réaliser : ainsi, la « méthode par cassage », partiellement exploitée par l'élève B dans le corpus de la figure 3, peut être révélée et l'évaluation de la technique discutée notamment pour des soustractions comme 1003 – 987.

Le geste H_4 consiste à diffuser et à défendre la réponse $R^{\heartsuit}$ développée.

Une technique τ_0 scientifiquement fondée étant produite dans l'institution I, la praxéologie $\wp_0$ peut demeurer faible (Wozniak, 2012). Or ce que l'on peut constater en étudiant les trois concours blancs susmentionnés, c'est qu'un enseignant y peut observer que, pour réaliser le type de tâches T_0, un étudiant x exploite plutôt une technique τ_i consistant principalement en une évaluation liminaire des productions des élèves : fréquemment, l'étudiant x semble succinctement évaluer la conformité du rapport personnel de l'élève évoqué à la tâche proposée au rapport institutionnel de ladite tâche, l'évaluation de cette conformité s'appuyant souvent sur un référentiel multicritères implicite. Quelle serait donc la technologie accompagnant cette technique τ_i ? Il semblerait que la technique τ_i est justifiée pour l'étudiant x par un discours interne structuré sur des « déjà-là » expérientiel et conceptuel (Carnus, 2001 ; Guerchi et al., 2014), issus de son histoire – notamment de son assujettissement à des institutions en position d'élève – et qui sont « denses » dans son rapport personnel $R(x\,;\,D_0)$. L'étudiant x produirait ainsi la technique τ_i par rétrocognition (Ladage & Chevallard, 2011), sans réel fondement scientifique : aux yeux de y, le rapport personnel $R(x\,;\,D_0)$ ne saurait donc être conforme au rapport institutionnel $R_I(p\,;\,D_0)$.

4. Conclusion

En considérant l'étudiant x et l'enseignant y comme de « bons représentants » des sujets en position respectivement p et f dans l'institution I, il semble donc que, en relation avec la *problématique primordiale négative* (Chevallard, 2011), lorsque l'équipement praxéologique des sujets en position p ne contient ni praxéologies de modélisation, ni la praxéologie $\wp_0$, il est jugé inadéquat par les sujets en position f à la réalisation par les sujets en position p du projet Π_p et, *in fine*, du projet Π'_p consistant à s'équiper pour l'entrée dans le métier de professeur des écoles.

Références

Carnus, M.-F. (2001). *Analyse didactique du processus décisionnel de l'enseignant d'EPS en gymnastique. Une étude de cas croisés* (Thèse de doctorat). Université Toulouse 3.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (Ed.). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27

Chevallard, Y. (2011, janvier). Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. *Texte présenté lors du séminaire de l'ACADIS (ADEF)*, Marseille. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208

Chevallard, Y. (2017). *Sur les praxéologies de recherche en didactique*.

Guerchi, M. et al. (2014). *L'analyse de l'enseignement usuel en football et l'émergence d'un « déjà-là » décisionnel chez les enseignants d'EPS*. http://www.iosrjournals.org/iosr-jrme/papers/Vol-4%20Issue-5/Version-2/L04527987.pdf.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & Didactique*, *5*(2), 85-116.

Ministère de l'Éducation nationale. (2016). *Nombres et calculs*. *Le calcul aux cycles 2 et 3*. https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/28/1/RA16_C2C3_MATH_math_calc_c2c3_N.D_609281.pdf

SMF & SMAI. (2017). *Réunion sur la formation en mathématiques dans les masters MEEF premier degré*. http://smf.emath.fr/files/cr-reunion_premier_degre_vf.pdf

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Education & didactique, 6*(2), 65-88.

La place des croyances dans la praxéologie d'une enseignante novice d'école primaire : le cas du calcul mental

Valentina Celi
Lab-E3D, Université de Bordeaux (ESPE), France

Marina De Simone
Faculté de Psychologie et de Sciences de l'Éducation, Université de Genève, Suisse

Abstract. This research aims to investigate the role of beliefs in the mathematical practices of a novice teacher. In particular, we will show the case of a teacher who works on the mental computation: in the analysis of her personal praxeologie, we consider beliefs within the "technological-theoretical" bloc.

Résumé. Cette recherche vise à enquêter sur le rôle des croyances dans les pratiques en classe de mathématiques d'un professeur des écoles novice. Ici, nous illustrons le cas d'une enseignante qui travaille sur le calcul mental : dans l'analyse de sa praxéologie personnelle, ses croyances sont incluses dans le bloc "technologico-théorique".

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

1. Introduction

Lorsque nous analysons de près l'activité d'un enseignant, quelle place ses croyances occupent-elles à propos d'un thème donné ? Cette question surgit à l'issue de la première phase d'une recherche portant sur les connaissances et les croyances de futurs professeurs des écoles français, à propos du calcul mental (Celi, 2017).

Dans la recherche en didactique de mathématiques et en science de l'éducation, il existe nombreuses caractérisations du concept de *croyance* (Vause, 2011) dont certaines sont parfois en contradiction les unes avec les autres (Furinghetti & Pehkonen, 2002). Un point qui fait néanmoins consensus porte sur la distinction entre croyance et connaissance, en construisant la définition de l'une en termes de ses relations avec l'autre.

Furinghetti et Pehkonen (2002) pointent en outre l'existence de deux types de définition de croyance : statique et dynamique. Dans une définition statique, la croyance est constituée par l'idée qu'un sujet a de quelque chose alors qu'une définition dynamique souligne aussi le fonctionnement d'une croyance. Lester et *al*. (1989, p. 77) affirment, par exemple, que les croyances constituent *the individual's subjective knowledge about self, mathematics, problem solving, and the topics dealt with in problem statement*.

Ponte (1994, p. 169) considère les croyances comme un élément de la connaissance : en particulier, il affirme que les *beliefs are incontrovertible personal 'truths' held by everyone, deriving from experience and from fantasy, with a strong affective and evaluative component*.

Schoenfeld (1992, p. 358) parle de croyances en termes d'*individual's understandings and feelings that shape the ways that the individual conceptualizes and engages in mathematical behaviour* ; en outre, pour cet auteur, les croyances représentent *the cool, cognitive, and stable end* aspect par rapport aux émotions et aux attitudes.

Vause (2011, p. 22) définit les croyances comme *un réservoir de valeurs et d'idées sur lesquelles les enseignants s'appuient pour agir en situation et justifier leurs actions*. *Personnelles* (dépendant fortement de l'histoire du sujet) ou *partagées* (liées à des idées partagées au sein d'une institution), les croyances se distinguent alors des connaissances des enseignants qui sont, selon Vause (*ib*., p. 26), *un ensemble de savoirs relatifs à un domaine et validés empiriquement*. Malgré cette distinction, des syncrétismes existent entre connaissances et croyances dans les pratiques d'un enseignant, ce qui conduit Vause (*ib*., p. 27-28) à parler de *connaissances ouvragées*, à savoir *un mélange de croyances, de connaissances issues de la pratique et de connaissances davantage théoriques*.

À l'issue de cette revue de la littérature spécialisée, dont la présentation ici est loin d'être exhaustive, nous avons retenu le point de vue de Vause

(2011) car, par le renvoi explicite à l'institution, au sujet et à la connaissance, sa définition semble être compatible avec la notion de *rapport personnel à un objet de savoir* telle qu'elle est définie dans le cadre de la TAD (Chevallard, 1989). Ce rapport, qui émerge d'un système de relations institutionnelles entre un sujet et un objet de savoir ou entre un sujet et d'autres agents de l'institution, englobe des aspects qui appartiennent à des dimensions diverses les unes des autres car *il relève notamment de tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire – en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d'"images mentales", de "représentations", d'"attitudes", de "fantasmes", etc.* – d'un sujet à propos d'un objet de savoir.

C'est ainsi qu'il nous semble pertinent d'établir une relation entre les croyances d'un enseignant et son rapport personnel à un objet de savoir et, par conséquent, de les inscrire dans ses *praxéologies personnelles*, au sens de Croset et Chaachoua (2016).

Dans le cadre de notre recherche, nous avançons alors une hypothèse, dont la méthodologie mise en place pour la vérifier est décrite plus loin dans ce texte : **à propos du calcul mental, dans les praxéologies personnelles d'un(e) enseignant(e) novice, le bloc technologico-théorique se construit autour de connaissances ouvragées, les croyances prenant toutefois le dessus sur les connaissances théoriques.**

2. Une première étude exploratoire

Introduit depuis plusieurs décennies dans les programmes de l'école élémentaire française, l'enseignement du calcul mental a poursuivi des objectifs différents, selon les époques. Jusqu'en 1970, favorisant la mémorisation et la rapidité, le calcul mental était considéré comme éducatif et nécessaire dans la vie de tous les jours. Ensuite et encore aujourd'hui, l'expression "calcul mental" recouvre plusieurs aspects : réfléchi, mémorisé, oral et/ou écrit, en temps limité ou non, instrumenté (calculatrice) ou non ; le calcul mental est alors important pour explorer les nombres, les opérations et leurs propriétés en favorisant ainsi le raisonnement à travers l'élaboration de procédures originales.

En 2006, un rapport officiel de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale dénonce le peu d'intérêt que les enseignants attribuent au calcul mental, en le pratiquant moins d'une heure par semaine. En formation continue, nous avons en effet pu constater[1] que peu nombreux sont les enseignants qui prévoient des moments de calcul mental pour leurs élèves et, s'ils le font, ils proposent surtout du calcul mémorisé et

[1] L'une d'entre nous étant enseignante de mathématiques en ESPE, les contacts avec des professeurs des écoles sont possibles à travers, entre autres, les stages de formation continue.

rapide ; en outre, l'usage de la calculatrice en relation avec le calcul mental est quasiment inconnu.
Cette désaffection pouvant avoir un lien avec la formation initiale, une question a alors surgi : que pensent les futurs enseignants à propos du calcul mental ?
Pour répondre à cette question, vous avons recueilli des données sur un échantillon de quatre-vingt seize étudiants, futurs enseignants du premier degré[2] : les réponses à un court questionnaire anonyme ; des réponses dans une évaluation de contrôle continu ; des entretiens avec six d'entre eux, choisis indépendamment des résultats précédents (Celi, 2017).
Nous avons analysé les données recueillies en termes de *croyances* et *connaissances* (Figure 1), adoptant et adaptant principalement les modèles théoriques élaborés par Shulman (1987) et par Vause (2011).

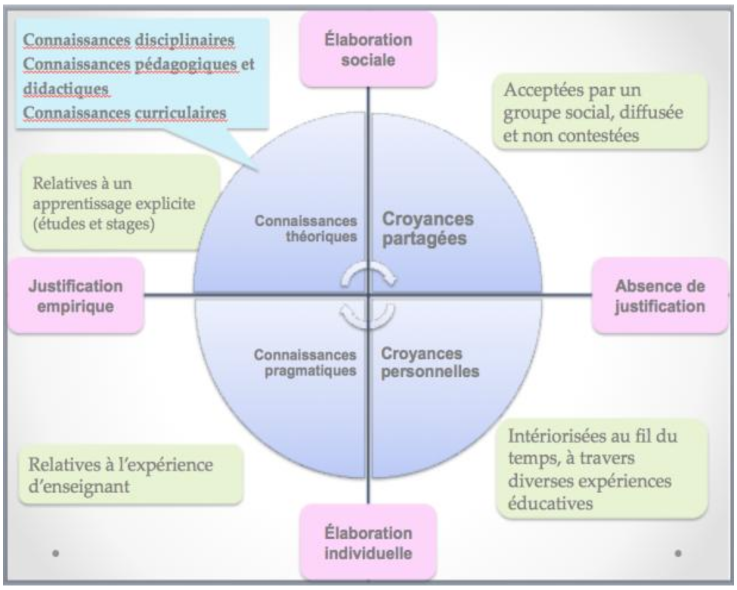


Figure 1. Articulation entre *croyances* et *connaissances*

D'après les réponses au questionnaire, les connaissances disciplinaires sont quasiment ignorées. Les connaissances pragmatiques n'étant pas vraiment développées chez les futurs enseignants, la faiblesse en termes de connaissances théoriques semble être comblée par des croyances, partagées ou personnelles : l'image qui ressort est plutôt celle du calcul mental d'antan que celle que l'on souhaiterait qu'elle soit aujourd'hui. En outre, l'analyse des réponses à une épreuve d'évaluation en contrôle continu nous fournit des indices sur l'importance que ces futurs enseignants attribuent au calcul posé par rapport au calcul mental.
Des six futurs enseignants interviewés, cinq d'entre eux pratiquent régulièrement le calcul mental dans leurs classes mais, d'après les exemples fournis, il ne s'agit souvent que de calcul mémorisé ; à l'époque

[2] Il s'agit d'étudiants stagiaires inscrit en deuxième année du Master MEEF ; par la suite, selon le contexte, nous les citerons en tant qu'étudiants ou en tant que futurs professeurs.

des entretiens, aucun d'entre eux n'a jamais pratiqué le calcul instrumenté en liaison avec le calcul mental.
De caractère exploratoire, cette première phase de notre recherche nous montre donc que leur passé d'élèves semble avoir forgé, auprès de futurs enseignants dont les connaissances pragmatiques sont moindres, des croyances personnelles et partagées plus prégnantes que les connaissances disciplinaires et didactiques, à propos du calcul mental.

3. Une étude de cas : réflexions méthodologiques

La nouvelle étape de cette recherche vise à opérer un zoom sur les pratiques d'une enseignante novice[3] afin de mieux identifier les croyances qui pourraient influencer ses praxéologies personnelles, à propos du calcul mental.
En accord avec Vause (2011, p. 27), qui affirme qu'*il est souvent peu aisé pour le chercheur de déterminer ce qui relève des croyances*, et avec Furinghetti et Pehkonen (2002, p. 46), qui les considèrent comme des entités *hidden and elusive*, nous avons pris quelques précautions afin d'éviter de fausser les résultats recueillis.
Nous avons demandé à une professeure des écoles novice, qui a en charge une classe de CM1 et CM2 (9-10 ans), de pouvoir observer et filmer quelques unes des séances de calcul mental telles qu'elle les a prévues dans sa progression. Après la première observation de classe, nous lui avons demandé de compléter, en au plus dix lignes et en temps limité, la phrase suivante : « *Pour moi, le calcul mental …* ». Après avoir lu son texte et visionné les vidéos réalisées, nous avons eu un entretien avec l'enseignante et lui avons aussi soumis un questionnaire afin de caractériser sa praxéologie personnelle, que nous avons définie à partir du type de tâche proposée à ses élèves lors des séances observées : « atteindre un nombre cible en combinant n nombres, à l'aide des quatre opérations ». Puisqu'elle les évoque à plusieurs reprises, nous lui avons demandé de préciser ce qu'elle entend par « stratégies de calcul ». En constatant qu'elle insiste beaucoup sur la règle à respecter pour accomplir la tâche retenue et sur les notions mathématiquement incorrectes mais jamais sur les techniques mobilisées pour accomplir un calcul, nous lui avons demandé quel est le but de ce choix. N'ayant jamais demandé à ses élèves de justifier, par exemple, la technique permettant de calculer le produit par une puissance de 10, nous avons aussi voulu savoir quelle est la technologie qu'elle propose à ses élèves. Nous avons conclu notre protocole en demandant à l'enseignante ce que c'est, selon elle, une séance de calcul mental.
C'est l'articulation de diverses entrées – les vidéos des séances observées, les deux courtes « dissertations » en amont et en aval, l'entretien et le

[3] Nous considérons comme novice tout enseignant exerçant le métier depuis pas plus de trois ans.

questionnaire – qui nous a permis d'évaluer dans quelle mesure les connaissances ouvragées de l'enseignante ont une influence sur sa praxéologie personnelle aussi bien mathématique que didactique.
Pour accomplir le type de tâche retenu, l'enseignante se contente que les élèves présentent la suite des calculs nécessaires pour atteindre le nombre cible. En pensant qu'il faut les conduire vers le calcul réfléchi à petits pas, l'enseignante accepte que ses élèves se servent de la calculatrice ou du calcul posé en colonne pour accomplir la tâche retenue. Ses croyances semblent alors bien caractériser sa praxéologie : par ses choix mathématiques – car elle repousse à plus tard le travail sur les propriétés des opérations sous prétexte que les élèves ne sont pas encore prêts – et didactiques – car elle accepte des techniques qui ne relèvent pas du calcul réfléchi mais qui compensent le manque d'assurance de certains élèves.
Ces premiers résultats confortent ainsi nos réflexions à propos de l'intégration des croyances dans l'analyse du bloc technologico-théorique de la praxéologie personnelle d'un enseignant.

Références

Inspection Générale de l'Éducation Nationale (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. Rapport n° 2006-034.

Celi V. (2017). Intending teachers' beliefs and knowledges on mental computation in French primary school: which perspectives for the learning? which needs for the teaching? In *Simposium Más allá de la alfabetización numérica: una matemática formativa para la Educación Primaria*. 5° Congreso Internacional Educational Sciences and Development (Santander, 25-27 mai 2017).

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle*, 91-120.

Croset, M.-C. & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36(2), XX-XX.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. *Mathematics education library, 31*, 39-58.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In D. B. McLeod & V. Adams (Eds.), *Affect and* *mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 75-88). New York: Springer-Verlag.

Ponte, J. P. (1994). Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning. In L. Bazzini (Ed.), *Proceedings of the fifth International Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education* (pp. 169-177). Pavia: ISDAF.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, meta-cognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Shulman L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundation of a new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.

Vause A. (2011). *Des pratiques aux connaissances pédagogiques des enseignants: les sources et les modes de construction de la connaissance ouvragée*. Université Catholique de Louvain, Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation.

Praxeologies in the Pósa method

Dániel Katona

Doctoral School of Mathematics, Eötvös Loránd University, Hungary

&

Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences

Abstract. The basic characteristics of the Pósa method for discovery or inquiry-based learning mathematics are presented, with special emphasis on the use of the '*web of problem threads*' (WPT), a sample of which is offered as well. Some principles of the method and attributes of WPT are analysed as that of praxeologies in the ATD, as a short initial of a recently started research on regarding and perhaps modifying the Pósa method as a study and research path.

Résumé. Nous présentons les caractéristiques de base de la méthode Pósa d'apprentissage des mathématiques par exploration ou investigation, avec un accent particulier sur l'utilisation du 'réseau de fils de problèmes' (WPT), dont un extrait est également offert. Nous étudions les principes de la méthodologie et les caractéristiques du WPT en tant que praxéologies comme une courte introduction à une recherche récente qui considère – en la modifiant peut-être – la méthode de Pósa comme un parcours d'étude et de recherche.

Resumen. Se presentan las características básicas del método Pósa para el aprendizaje de las matemáticas basado en el descubrimiento o la investigación, poniendo especial énfasis en la 'red de hilos de problemas' (WPT), que también se ejemplifica. Los principios del método y los atributos de la WPT se analizan en términos de praxeologías, como una breve introducción de una investigación recientemente iniciada para observar y quizás modificar el método Pósa, considerándolo como un recorrido de estudio e investigación.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*

Editorial, año

This study was funded by the Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences.

1. The Pósa method

1.1. The Pósa camps and current related projects

Lajos Pósa, a mathematician and mathematics teacher, started to organise weekend math camps for 12-18 years old mathematically gifted children in Hungary in 1988, using the now called ‘Pósa method’. Presently, his former students, now colleagues organise also experimental out-of-school sessions, called the Flying School Program, with the same method for not only highly selected and gifted, but interested students. Experimental classes, with curricular constraints, in secondary school have also been launched in September 2017.

Besides, in the frame of a research program at the Hungarian academy of Sciences, as well of the doctoral study of the author at the Eötvös Loránd University, the research on the theoretical descriptive and comparative analysis of the method were started in 2017, with a potential long-term goal of curricular changes, that “may be carried out through the action of a charismatic leader” (Chevallard, 1992, p. 220), in our case, Lajos Pósa.

1.2. Principles and methodological tools of the Pósa method

– students’ *enjoyment of doing mathematics*, starting from thinking on problems offering *appropriate challenge*, during which they *discover as much as they can*;

– emphasis on *study as a group*, special role of participants’ dialogues;

– let and teach *students to pose ‘good’ questions* and *integrate their questions into the course of study*;

– *freedom of making mistakes*;

– emphasis on the connection between problems posed, which form *threads*, that regularly cross each other forming a *web of problem threads*. Students are given at least 3-4 problems at the same time from different threads, which offers a *freedom of choice*

1.3. The Web of Problem Threads[1] (WPT)

In its current state, the Pósa WPT consists of hundreds of problems. The presented sample can only offer a really vague picture. There is even no space for presenting 1 whole thread, only some central problems of it, which are

[1] The concept was introduced in (Katona & Szűcs, 2017) by Péter Juhász and the author

hoped to reveal the essence. The solutions are also for the reader to find, through study and research.

<u>Problem 1</u> In how many different ways can you get from A to B in the diagram below, if you can only proceed from left to right?

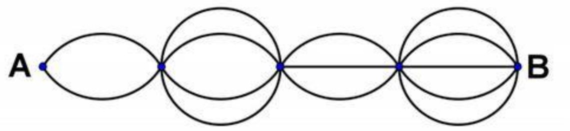


Figure 1. Paths in 'bubble figure' 1

Similar problems appear in the thread, with exactly the same task, but with different figures, like in Figure 2.

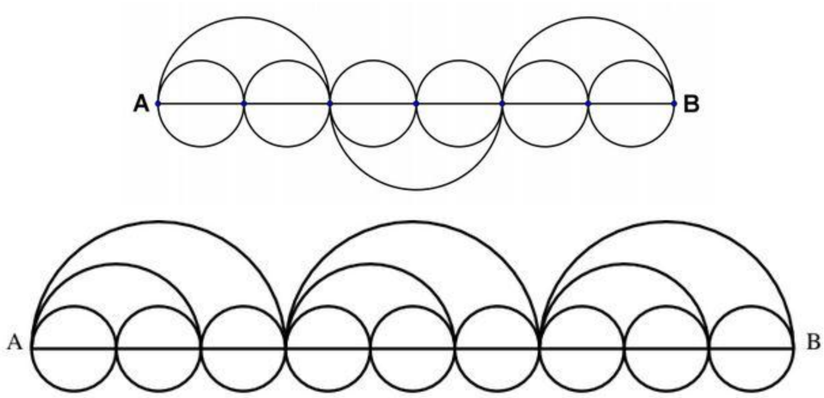


Figure 2. Some more 'paths in bubble figure' problems

<u>Problem 2</u> In how many different ways can you get from the bottom left corner to the top right one in the diagram below, if you cannot step on the black square, and in each step you can move one to the right or one upwards?

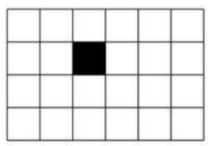


Figure 3. Paths in hollow grid 1

This problem is usually preceded by a corresponding one, but without the 'black hole', and not necessarily with the same size (e.g. with a 10 x 13 rectangle grid).

<u>Problem 3</u> … an astronaut … lives in a space station that consists of 27 space modules… set at the vertices of the little unit cubes that make a 2×2×2 cube. There are passages between each neighbouring modules, represented by the

> edges of the unit cubes. Our astronaut can only use these passages to move between the modules.

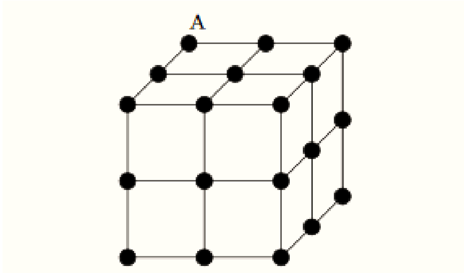


Figure 4. The space station

> Our hero is now at the module signed by vertex A, in Figure 4, and would like to go to the opposite vertex of the two-unit cube. In how many different ways can they do this, if they do not want to move away from their target? (Katona & Szűcs, 2017, p. 22-23)

Working with these problems, students shall develop ‘recursive thinking’, which is the supposed *kernel* of the thread formed by these and other, partly similar problems. Recursive thinking appears, as for counting the possible ways from A to B (Problem 1), from the bottom left to the top right corner (Problem 2), or from A to the opposite vertex of the cube (Problem 3) students can (usually do) use the results of counting the ways between smaller segments of the figures, other intersection points (Problem 1), between different squares of the grid (Problem 2), or between different modules of the space station (Problem 3).

Kernel is the form, the manifestation of a connection between the problems of a thread. The concept was introduced by the author in (Katona & Szűcs, 2007). These connections and the kernels are basically part of the a priori structure of the problems, which – as the whole WPT – are mainly pre-designed by the teachers, during which designing procedure the problems are selected or constructed for giving birth to the kernels, that is, kernels create the problems. However, during particular implementations of the method, students’ unanticipated ideas may establish new connections, even new kernels, and the operation of WPT is even more ‘dynamic’, students-governed, which is to be discussed in the next section.

Understanding the connections between the problems and the ‘consideration of the whole’ are essential parts of students’ work (with teachers’ assistance) to be done.

2. Interpreting the Pósa method in the ATD context

The main issue under study in this section is whether the designed courses of learning in the Pósa method are, or can be regarded, or expanded into study and research paths, or they are basically teacher-predetermined. It is a crucial question for further studies how to implement and develop the method to avoid it being used as a way to teach pre-established praxeologies, which have already “turned into monuments” (Chevallard, 2006, p.25).

2.1. The complexity of praxeologies in the Pósa method

A praxeology contains not only the ‘*praxis*’ part, the *task* and the *technique*, but the ‘*logos*’ part, the *technology* and the *theory* (Chevallard, 2006, p. 24). I call it the *complexity of praxeologies*. In school mathematics settings, we may ask, whether solving a problem by using certain techniques without a proper knowledge of background theory would count as learning. However, in the Pósa method, the ‘logos’ part is essential, as students are expected to seek for explanations of solutions and their ideas, as well, to reveal and discuss the connections between problems and kernels.

2.2. The dynamic nature of praxeologies as reflected in the use of the WPT

“Human praxeologies are open to change, adaptation and improvement” (Chevallard, 2006, p. 23). I call it the *dynamic nature of praxeologies*. The dynamic nature of praxeologies in the Pósa method is connected to the special demands of the particular student group and of the teacher. Firstly, the problems may be modified, and different solutions can be given to them. Secondly, the threads to be followed by the students are always chosen for the particular student group.

2.3. Generating question driven study and research paths (SRP) in the Pósa method?

G*enerating questions* are essential elements of the curriculum development process within the *paradigm of questioning the world*. Chevallard (2006) warns that “one should not go directly to the questions *Q’* … without being motivated to do so by the study of a previous, crucial question *Q*...”, to avoid that “the monumentalized praxeologies … called forth by the study of question *Q*’…” (p.28).

Can ‘real’ generating questions be detected in the Pósa method? Looking at the problems presented in section 1, one may argue for the lack of them, the problems seem rather to be *derived* questions from a (or more) missing generating question(s). However, the status of a question, whether it is generating or derived, is *relative*. Given a generating question *Q*, one can always find a previous generating question that leads to *Q* as a derived question.

For instance, on the one hand, for Problems 1, a new generating question *Q* may be formulated, and our problem becomes its *Q’* or Q^n ($n \in \mathbf{Z}^+$). With this new *Q*, we, for instance, make inquiries into the possible ways to travel between certain cities, also visiting some other cities between, and one possible derived question may be about the number of different paths. A very simple example is illustrated by Figures 5 and 6.

Figure 5. Generating *Q* for the Pósa *Q’* questions - map

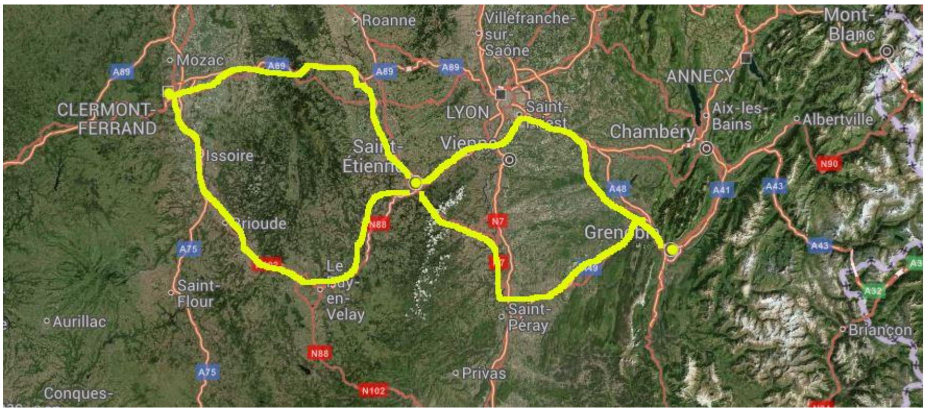


Figure 6. Generating *Q* – map with route graph

This new generating question is about the number of paths on highways between Grenoble and Clermont-Ferrand, also passing through Saint Étienne. It generates a derived, and mathematically more abstract question illustrated in Figure 7, that is similar to the one in Problem 1.

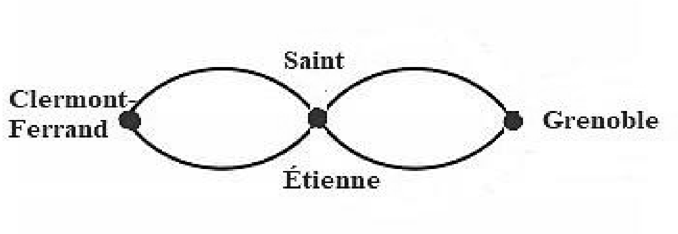


Figure 7. Generating *Q* – route graph

Problems 1, 2 and 3 also have generating power. They generate questions like (in the case of Problem 1) ‘The number of paths from A to the first meeting point’ or ‘In how many ways, as last sections of your journey, from the last intersection point before B, can you reach point B?’ Based on observations of Pósa camps, where these problems were posed, students did actually posed these derived questions. The emergence of these derived questions actually generates the recursiveness of the solving process, the kernel of the thread.

2.4. Issues for further study on the Pósa method in the ATD context

– selecting the appropriate items – individual problems / threads of problems / the kernels of the threads /… – in the Pósa method to be regarded as praxeologies;

– study on ‘kernels’ as ‘logos’ parts, and their relation to type(s) of connection(s) between questions in an SRP;

– determining generating and derived questions within the Pósa web for interpreting WPT as a system of ‘question-answer maps’;

– study the relativeness of questions being generating, and what makes a question generating

– study the relationship between the concepts ‘appropriate challenge’ and ‘system of generating and derived questions’;

– study on the dynamicity of the WPT, comparing different implementations of the method with the same ‘generating questions’, whether different derived questions emerged;

– basic guidelines for the development of a new curriculum in Hungary based on the Pósa method and on the new paradigm of questioning the world too

References

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal für Mathematik-Didaktik 13*(2-3), 215-230.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Katona, D., & Szűcs, G. (2017). Pósa-method & cubic geometry: A sample of a problem thread for discovery learning of mathematics. In T. J. Karlovitz (Ed.), *Differences in pedagogical theory and practice* (pp. 17-34). Komarno, Slovakia: International Research Institute s.r.o. http://www.irisro.org/educonf2017may/12KatonaDaniel-SzucsGabor.pdf

A General Scheme for a Heterogeneous Manifold of Transitions

Reinhard Hochmuth

Institute for Didactics of Mathematics and Physics, Leibniz Universität Hannover, Germany

Abstract. A general praxeological scheme is applied to express relations between praxeological blocks depending on the goal of the analysis and the specific institutional setting within which a mathematical praxeology is considered. Besides its heuristic function, the scheme provides a framework for context dependent categorizations of praxeologies. The poster exemplarily illustrates the application of the scheme to two different contexts: measures supporting students in their first year of study; the use of mathematics in engineering sciences.

Résumé. Un schéma praxéologique général est utilisé pour décrire les relations entre des blocs praxéologiques en fonction de l'objectif de l'analyse et de l'environnement institutionnel dans lequel on considère les praxéologies mathématiques. À côté de cette fonction heuristique, le schéma propose un cadre pour la catégorisation des praxéologies à partir de deux contextes différents : des mesures de support pour les étudiants universitaires de première année, l'utilisation des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur.

Resumen. Se presenta un esquema praxeológico general para describir las relaciones entre bloques praxeológicos en función del objetivo del análisis y del entorno institucional en el que se consideran las praxeologías matemáticas. Al lado de esta función heurística, el esquema proporciona un marco para la categorización de praxeologías a partir del contexto. El poster ilustra con ejemplos la aplicación de este esquema a dos contextos distintos: medidas de apoyo para estudiantes de primer curso universitario; el uso de las matemáticas en ingeniería.

1. The 4T-Model

The anthropological theory of the didactic (ATD) aims at a precise description of knowledge and its epistemic constitution (Chevallard, 1992, 1999; Winslow, Barquero, Vleeschouwer & Hardy, 2014). This theoretical framework allows explicating institutional specificities of knowledge and related practices. A basic concept of ATD are

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*

Editorial, año

praxeologies, which are represented in so called “4T-models (T, τ, θ, Θ)” consisting of a practical and a theoretical block. The practical block (know how, “doing“) includes the type of task (T) and the relevant solving techniques (τ). The theoretical block (knowledge block, discourse necessary for interpreting and justifying the practical block, “spoken environment”) covers the technology (θ) explaining and justifying the used technique and the theory (Θ) justifying the underlying technology. Praxeologies give descriptions of mathematics by reference models that are activity oriented (techniques, technologies). The interconnectedness of knowledge is modelled in ATD by means of local and regional mathematical organizations that allow contrasting and integrating practical and epistemological aspects in view of different institutional contexts.

2. A General Scheme

Following Winslow & Grønbæk (2014) we refer to the notion $R_I(x, o)$ introduced by Chevallard (1991) to indicate the relation of a position *x* (roles of persons such as teachers and students) within an institution *I* to a praxeology *o*. Examples for institutions are in our case: school, university, engineering course, mathematical lectures, lectures about pedagogical content knowledge, etc. Transitions between relations are in the following represented by an arrow. Of course, transitions can itself be described in terms of 4T-models. But a discussion of this point lies beyond the scope of this contribution.

Then a general scheme suitable for describing and analysing a large and heterogeneous family of transitions is given as follows:

$$R_{S_1}(s_1, o) \rightarrow R_{S_2}(s_2, \omega[X(o)])\ with\ X \in\ \wp\{\tau, \theta, \Theta\},$$

where *o* represents a praxeology within an institution S_1, $\wp\{\tau, \theta, \Theta\}$ the power set of $\{\tau, \theta, \Theta\}$ (the set consisting of technique, technology and theory of *o*) and ω a praxeology within an institution S_2 in view of one or several blocks of the praxeology *o*. The latter generality in the scheme allows to express that techniques, technologies or theories of *o* might be differently relevant in the relation of a position x_2 within the institution S_2 to a (perhaps new) praxeology ω.

We consider the scheme amongst others as a heuristic tool for the characterization and categorization of institutionalized and possibly problematic (from an individual and/or an institutional point of view) relations. It allows focusing on relations between praxeologies and their blocks as well as on specific task constructions or course designs etc. We claim that such a scheme particularly allows to focus on important knowledge and goal related institutional aspects, which have to be addressed, if one intends to optimize teaching and learning conditions.

3. Application contexts

The poster focuses on the heuristic function of the scheme and demonstrate its potential usefulness for characterizing and categorization praxeological issues in two different contexts:

a) measures supporting students in their first year of study;

b) the use of mathematics in engineering sciences.

Ad a) Measures for supporting students in their first year of study are investigated in the WiGeMath project (*Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase*; Effects and success conditions of mathematics learning support in the introductory study phase), which is a joint research project of the Universities of Hannover and Paderborn (Colberg et al., 2016; Liebendörfer et al.) led by Biehler, Hochmuth and Schaper. The aim of the WiGeMath project is to develop and exemplify a taxonomy that categorizes features and goals of projects of mathematics learning support and to use this taxonomy to evaluate different support measures at German universities. In the WiGeMath project, different supporting measures are subsumed under one of four categories, namely bridging courses, mathematics support centres, support measures that parallel courses and redesigned lectures. With design challenges for bridging courses in mind a more specific scheme as above was used in (Biehler & Hochmuth, 2017).

For the poster results from the project are picked up and reanalyzed applying the above general scheme as lens. It illustrates in particular the following three basic foci of supporting students in transitions:

- Techniques: Improving skills in applying techniques stemming from current or past attained praxelogies without further developing technology ($X = \{\tau, \theta\}$);
- Technology: Improving and extending technological knowledge concerning past attained praxelogies ($X = \{\theta\}$);
- Theory: Improving or reflecting theoretical and technological aspects of past attained praxelogies ($X = \{\theta, \Theta\}$).

Ad b) Here, S_1 typically represents a Higher Mathematics course for engineering students (HM), S_2 a course on System and Signal Theory for electrical engineering students (SST). For further details we refer to (Schreiber & Hochmuth, 2015; Peters, Hochmuth & Schreiber, 2017). One can generally observe that basic techniques and notions from HM are relevant for SST, but details concerning the justification of assertions taught in HM are not only nearly irrelevant but often misleading. For the poster, again, we point to a three typical situations in SST:

- HM-technique but SST-justification ($X = \{\tau\}$);
- SST-technique relying on HM-techniques and HM- as well as SST-justifications and –theory ($X = \{\tau, \theta, \Theta\}$);
- SST-justification relying on HM-technique and –justification ($X = \{\tau, \theta\}$).

4. Outlook (Work in Progress)

The psychological lens of qualitative learning jumps has been introduced by Holzkamp (1993, pp. 239) within the framework of a learning theory that is based on the subject scientific approach (Holzkamp, 1985; see also Tolman (1991) for an English written introduction) and aims (besides others) to provide individuals with analytic tools for the self-reflection of problematic experiences and situations to reveal their inherent dependencies and circumstances. The focus lies on institutionalized teaching-learning situations. Ideas from the *Theory of Didactic Situations* as well as from the notions *Didactic Moments* and *Study & Research Courses* might also be taken into account. It turns out, that depending on the teaching-learning situation steps of qualitative learning jumps can be related to specific types of the general scheme. A suitable mathematical context is provided by the convergence of function sequences differentiating pointwise, uniform as well as $L^p (0 < p \leq \infty)$-convergence, linear and nonlinear approximation and smoothness modules.

5. The poster

The poster explains the scheme and presents for both application contexts examples demonstrating the heuristic function of the scheme and its potential for characterizing and categorization issues.

References

Biehler, R., & Hochmuth, R. (2017). Relating different mathematical praxeologies as a challenge for designing mathematical content for bridging courses. In *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings. Khdm-Report 17-05* (pp. 14-20). Kassel: Universität Kassel.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, 2nd edition*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. *Recherches en didactique des mathématiques, Selected Papers. La Pensée Sauvage, Grenoble,* 131–167.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 19*(2), 221–266.

Colberg, C., Biehler, R., Hochmuth, R., Schaper, N., Liebendörfer, M., & Schürmann, M. (2016). Wirkung und Gelingensbedingungen von Unterstützungsmaßnahmen für mathematikbezogenes Lernen in der Studieneingangsphase. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (pp. 213–216). Heidelberg: WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Hochmuth, R., & Schreiber, S. (2015). Conceptualizing Societal Aspects of Mathematics in Signal Analysis. In S. Mukhopadhyay & B. Geer (Eds.), *Proceedings of the Eight International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 2, pp. 610–622). Portland: Ooligan Press.

Holzkamp, K. (1985). *Grundlegung der Psychologie*. Frankfurt/Main: Campus.

Holzkamp, K. (1993). *Lernen : Subjektwissenschaftliche Grundlegung.* Frankfurt/Main: Campus

Liebendörfer, M., Hochmuth, R., Biehler, R., Schaper, N., Kuklinski, C., Khellaf, S., Colberg, C., Schürmann, M., & Rothe, L. (in press). A framework for goal dimensions of mathematics learning support in universities. To appear in Proceedings of CERME 10.

Peters, J., Hochmuth, R., & Schreiber, S. (2017). Applying an extended praxeological ATD-Model for analyzing different mathematical discourses in higher engineering courses. In *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings*. khdm-Report 17-05 (pp. 172-178). Kassel: Universität Kassel.

Tolman, C. W. (1991). Critical Psychology: An Overview. In C. W. Tolman & W. Maiers (Eds.), *Critical Psychology: Contributions to an historical science of the subject* (pp. 1–22). Cambridge: Cambridge University Press.

Winsløw, C., Barquero, B., Vleeschouwer, M. de, & Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics education: from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 95–111.

Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(1), 59-86.

Aire et de périmètre dans les manuels scolaires brésiliens à la transition entre l'école élémentaire et le collège

Lúcia de Fátima Durão Ferreira
EDUMATEC, Université Federale de Pernambouc, Brésil

Paula Moreira Baltar Bellemain
EDUMATEC, Université Federale de Pernambouc, Brésil

Abstract. His work is part of an ongoing PhD research about the teaching and the learning of area and perimeter in the transition period between Grade 6 (students of age 10-11) and Grade 7 (students of age 11-12) in the Brazilian educational system. The part presented in this text concerns of an analysis of Grade 5 and Grade 6 textbooks, with the help of elements from magnitude's filters, the scale of levels of co-determination and the idea of *reprise*. The analyses have shown that area and perimeter belong to the domain of magnitudes and measurements, the predominant types of tasks are "determining the measure of an area" and "determining the measure of a perimeter", as well as "change the units of area" (the latter, only in Grade 7). The occasions responsible for *reprise* the content in the textbook analyzed don't seem enough, at first glance, to assure the learning of new objects presented in Grade 7.

Résumé. Ce travail s'inscrit dans une recherche doctorale en cours sur l'enseignement et l'apprentissage de l'aire et du périmètre à la transition de la 5ième année (élèves de 10-11 ans) à la 6ième année (élèves 11-12 ans) de l'enseignement obligatoire brésilien. La partie présentée dans ce texte concerne l'analyse de manuels scolaires de 5ième et 6ième, à l'aide du filtre des grandeurs, de l'échelle des niveaux de co-détermination et de la notion de reprise. Les analyses montrent que l'aire et le périmètre sont des thèmes du domaine des grandeurs et mesures, les types de tâche prédominants sont «déterminer la mesure d'une aire» et «déterminer la mesure d'un périmètre» ainsi que «changer les unités d'aire» (ce dernier, seulement en classe de 6ième). La prise en charge des reprises proposée dans les manuels scolaires analysés ne paraît pas a priori suffisante pour assurer l'apprentissage des nouveaux objets étudiés en 6ième.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Editorial, año

1. Introdution

Ce travail s'inscrit dans une recherche doctorale[1] en cours, dont le but est étudier les relations possibles entre les difficultés conceptuelles d'apprentissage auxquelles sont confrontés les élèves de la 6ième année sur l'aire et le périmètre et la façon dont ces objets sont enseignés depuis le debut de la scolarité obligatoire au Brésil (1ière année – élèves de 6 ans) et plus particulièrement dans la transition de la 5ième à la 6ième année.

Le corpus de matériaux empiriques construit pour étudier cette question est composé de plusieurs éléments complémentaires :

- Les Paramètres Curriculaires Nationaux brésiliens (recommendations officielles, mais non obligatoires) ;
- Les manuels scolaires de la 1ière à la 6ième année utilisés dans les classes observées ;
- Des observations de l'enseignement de l'aire et du périmètre dans des classes de 5ième année et 6ième année ;
- Des cahiers d'élèves des classes observées ;
- Des tests et des entretiens d'élèves des classes observées ;
- Des entretiens avec les équipes pédagogiques de l'école observée (les enseignants observés et la gestion de l'école);
- Des documents explicitant le projet pédagogique de l'établissemnt scolaire étudié ;

Au Brésil, il existe un niveau de scolarité appelé Enseignement Fondamental, composé de deux sous-niveaux, dont le premier (1ière à la 5ième année), adressé aux enfants de 6 à 10 ans est assuré par des professeurs polivalents. Le deuxième sous-niveau, qui demarre à la 6ième , est composé de quatre classes (élèves de 11 à 14 ans) et est assuré par des professeurs spécialistes par discipline.

Nous cherchons à étudier comment est conduite la transition entre les deux sous-niveux de l'enseignement fondamental dans des conditions institutionnelles assez favorables. Pour cela, nous avons choisi un établissement scolaire dans lequel il y a les deux sous-niveaux de

[1] Il s'agit d'un projet de thèse, développé à la UFPE, sous la direction de Paula Moreira Baltar Bellemain, avec le financement de la CAPES (Organisme du gouvernement brésilien de financement de la recherche et de l'enseignement supérieur), pour le doctorat sandwich sous la direction d'Alain Bronner et en collaboration avec Mirène Larguier.

l'enseignement fondamental (co-habitation des deux institutions des points de vue des locaux et des encadrements pédagogiques), où les manuels scolaires de mathématique des deux sous-niveaux sont des mêmes auteurs et où des dispositifs pédagogiques sont mis en place pour favoriser la transition entre les deux sous-niveaux étudiés (des réunions pédagogiques avec tous les enseignants de l'école et des compte rendu, par exemple).

Le découpage choisi pour cette communicaton affichée est celui de l'enseignement de l'objet aire (y comppris la relation entre l'aire et le périmètre), tel qu'il est proposé dans les manuels scolaires de 5$^{\text{ième}}$ et de 6$^{\text{ième}}$ années utilisés dans les classes observées. Il s'agit, en particulier d'étudier des reprises (Larguier, 2009) réalisées dans les manuels de 6$^{\text{ième}}$ année et leurs rapports à ce qui est proposé dans les manuels de 5$^{\text{ième}}$ année.

2. Explicitation des outils d'analyse

L'analyse des manuels scolaires s'appuie sur des éléments du filtre de la grandeur aire (Bellemain, Bronner & Larguier, 2017) lequel prend ses racines dans le filtre des grandeurs (Anwandter-Cuellar, 2012) et le filtre du numérique (Bronner, 2007).

Dans leurs analyses de manuels scolaires de mathématiques brésiliens et français, pour la classe de sixième, Bellemain, Bronner & Larguier (2017) ont considéré sept types de tâche, que nous avons adaptés aussi à l'étude du périmètre. Ceci nous conduit à considérer *a priori* 14 types de tâche potentiels: comparer des aires (T_{CA}) ou des périmètres (T_{CP}), déterminer la mesure d'une aire (T_{DA}) ou d'un périmètre (T_{DP}), étudier les effets de déformations et des transformations géométriques et numériques sur l'aire d'une famille de surfaces (T_{TA}) et sur leurs périmètre (T_{TP}), produire une surface d'une aire donnée (T_{PA}) ou de périmètre donnée (T_{PP}), produire une surface d'une aire plus grande ou plus petite qu'une aire ou que l'aire d'un objet donné (T_{GA}) ou de périmètre plus grande ou plus petit qu'un périmètre donné ou que le périmètre d'un objet donné (T_{GP}), changer d'unités d'aire (T_{UA}) ou d'unité de longueur (T_{UP}), déterminer la valeur d'une espèce de grandeurs, autre que l'aire (respectivement le périmètre), dans un problème dont l’énoncé comporte des données concernant l’aire (T_{VA}) ou le périmètre (T_{VP}).

Nous avons modélisé les praxéologies mathématiques autour des types de tâche ci-dessus, dans les deux manuels analysés ainsi que les domaines, les secteurs et les thèmes relatifs aux objets aire et périmètre (selon l’échelle des niveaux de co-détermination). De plus, nous avons tenu compte d’autres éléments du filtre de la grandeur aire (et de son analogie au périmètre), en particulier, les dynamiques intra-domaine, inter-domaines, intra-mathématique et extra-mathématique.

Puisque l’aire et du périmètre sont en partie enseignés de la 1^{ière} à la 5^{ième} année, nous nous intéressons aux indices dans les manuels scolaires des *reprises* (LARGUIER, 2009), c’est à dire, à la manière par laquelle ces objets sont actualisés lors des nouvelles rencontres avec des sujets liés à l’aire et au périmètre en classe de 6^{ième}. Nous nous intérogeons aux liens de différentes natures qui se tissent avec ce qui a été étudié précedement : s’agit-il de révisions systématiques des objets étudiés à l’école élémentaire, sans rencontre de nouveaux objets (par des rappels ou des révisions) ? s’agit-il de reprises d’objets de savoir enseignés à l’étape antérieure en lien avec l’apprentissage de nouveux objets ?

3. Analyse des manuels scolaires

Nous avons repéré quatre domaines dans le manuel scolaire de 5^{ième} (Imenes, Lellis & Milani, 2015) - nombres et opérations ; espace et forme ; grandeurs et mesures ; traitement de l’information - et cinq domaines dans celui de 6^{ième} (Imenes & Lellis, 2010) – aritmétique, géométrie, mesures, algèbre et statistique. Dans les manuels pédagogiques destinés à l’enseignant, l’intention de favoriser les liaisons entre contenus et l’approche des contenus en espirale est exprimée, ce qui a pour conséquence que «les sujets sont abordés plus d’une fois, de différentes manières » (Imenes & Lellis, 2010, p. 6) aussi bien sur le même manuel que d’un manuel à l’autre dans la collection.

La raison d’être affichée pour le domaine des grandeurs et mesures dans le manuel de 5^{ième} année est justifiée par l’usage dans la vie et la dynamique inter-domaines : « aussi bien sur son importance sociale que parce que [ce domaine] est utile à la prise de sens des nombres, en rapport aux axes des *Nombres et Opérations* et *Espace et Forme* et car il sert de base à l'axe *Traitement de l'Information*» (IMENES, LELLIS & MILANI, 2015, p. XIII).

Nous avons remarqué, aussi bien en 5^{ième} qu'en 6^{ième}, l'accent sur les mesures et une place secondaire accordée à la notion de grandeur, ce qui est aparement justifié par l'objectif de mettre en évidence un regard sur les mathématiques liés à la vie sociale.

Dans le manuel de 5^{ième}, les relations entre l'aire et le périmètre de polygones sont un théme du secteur aire, dans le domaine grandeurs et mesures. En 6^{ième}, dans le domaine intitulé *mesures*, nous avons le thème *périmètre*, dans le secteur *mesure de longueur* et les thèmes *aire* et *formules pour le calcul de l'aire d'un carré et d'un rectangle*, dans le secteur *mesure de l'aire*.

3.1 Analyse praxeologique autour du périmètre

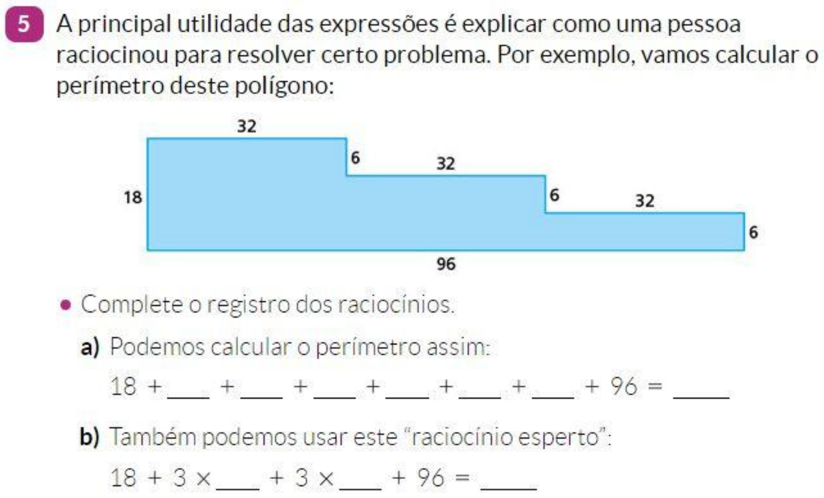
Nous n'avons repéré que deux types de tâche autor du thème périmètre: T_{CP} (comparer des périmètres) et T_{DP} (déterminer la mesure du périmètre d'une figure), avec une nette majorité des tâches de type T_{DP}.

Types de tâche	5ième	6ième
T_{CP} – Comparer des périmètres	3	1
T_{DP} – Déterminer la mesure du périmètre d'une figure	10	26

Tableau 1. Types de tâche autour de l'objet périmètre dans les manuels scolaires de 5ième et 6ième.

Dans tous les spécimens de tâches de type T_{DP}, il s'agissait de déterminer le périmètre de polygones par la technique τ_{DP} – addition des longueurs des côtés. Les principaus éléments technologiques et théoriques mobilisés sont la définition de périmètre, les opérations numériques d'addition et multiplication et leurs propriétés, d'abord avec les nombres naturels, puis avec des nombres décimaux positifs.

Nous présentons ci-dessous un exemple de tâche de type T_{DP}.


5 A principal utilidade das expressões é explicar como uma pessoa raciocinou para resolver certo problema. Por exemplo, vamos calcular o perímetro deste polígono:

• Complete o registro dos raciocínios.

a) Podemos calcular o perímetro assim:

18 + ___ + ___ + ___ + ___ + ___ + ___ + 96 = ____

b) Também podemos usar este "raciocínio esperto":

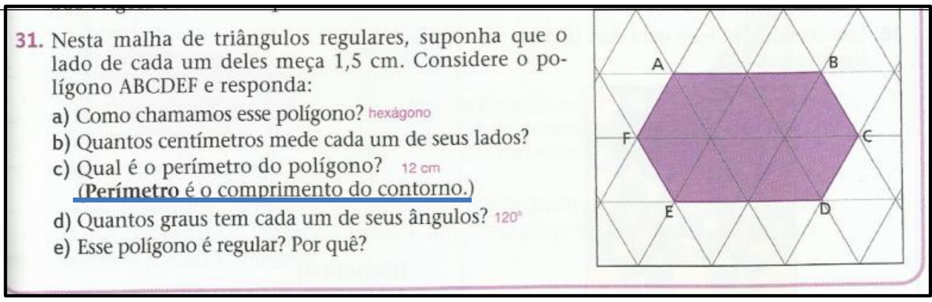
18 + 3 × ___ + 3 × ___ + 96 = ____

Figure 1. T_{DP} – Déterminer la mesure du périmètre d'une figure (5º ano, p.84)

L'approche du périmètre dans le manuel de 5ième est d'abord en tant qu'outil dans une dynamique entre le domaine des grandeurs et mesures et celui nommé nombres et opérations, plus particulièrement pour l'étude des thèmes autour des expressions numériques et de l'adition et la soustraction de nombres décimaux.

Le périmètre est travaillé, en tant qu'objet lors de l'étude du thème relations entre l'aire et le périmètre de figures poligonales, dans lequel est traité aussi le type de tâche $\mathbf{T_{CP}}$ – Comparer des périmètres.

En classe de 6ième, le périmètre est mesuré avec des unités conventionelles et non conventionnelles, à l'appuie du papier quadrillé et isométrique. Son étude est centré sur les calculs. La première rencontre avec le périmètre en 6ième se fait en tant qu'outil dans une dynamique inter-domaines avec la géométrie, lors de l'étude du thème polygones, dans la figure 2 ci-dessous. Il s'agit de tâches de type $\mathbf{T_{DP}}$ e la technique est encore une fois $\tau_{DP.}$ La phrase « Le périmètre est la longueur du contour » y figure comme élément d'une révision systématique au sens de Larguier (2009).



31. Nesta malha de triângulos regulares, suponha que o lado de cada um deles meça 1,5 cm. Considere o polígono ABCDEF e responda:

a) Como chamamos esse polígono? hexágono

b) Quantos centímetros mede cada um de seus lados?

c) Qual é o perímetro do polígono? 12 cm

(Perímetro é o comprimento do contorno.)

d) Quantos graus tem cada um de seus ângulos? 120°

e) Esse polígono é regular? Por quê?

Figure 2. T_{DP} – Déterminer la mesure du périmètre d'une figure (6º ano, p.93)

Encore en tant qu'outil, dans une dynamique inter-domaines, cette fois-ci avec le domaine de l'artithmétique, associé au thème sur les nombres décimaux. Le périmètre aparaît dans une tâche de type $\mathbf{T_{DP}}$, dans laquelle avant d'employer la technique $\tau_{DP,}$ il s'agit de mesurer à l'aide d'une règle graduée les longueurs des côtés. Des commentaires dans le manuel pédagogique du professeur attirent l'attention sur le caractère approché des mesures obtenues par mesurage effectif.

Le type de tâche $\mathbf{T_{CP}}$ n'aparaît qu'une fois, dans les exercices d'une section nomée *Supertestes,* ayant pour fonction servir à l'autoévaluation par l'élève. Nous interprétons ceci comme rattaché à la synthèse selon Larguier (2009), où l'élève et/ou le professeur cherche à faire un contrôle des apprentissages.

3.2 Analyse praxéologique autour de l'aire

La majorité des tâches sur l'aire aussi bien dans le manuel de $5^{\text{ième}}$ que dans celui de $6^{\text{ième}}$ sont du type déterminer la mesure de l'aire, à l'aide d'unités conventionnelles ou non conventionnelles.

Types de tâche	**$5^{\text{ième}}$**	**$6^{\text{ième}}$**
T_{CA} – Comparer des aires	5	8
T_{TA} – Étudier les effets de déformations et des transformations géométriques et numériques sur l'aire d'une famille de surfaces	0	4
T_{DA} – Déterminer la mesure d'une aire	36	67
T_{VA} – Déterminer la valeur d'une espèce de grandeurs, autre que l'aire, dans un problème dont l'énoncé comporte des données concernant l'aire	3	2
T_{UA} – Changer d'unités d'aire	0	10

T_{PA} – Produire une surface d'une aire donnée	6	0

Tableau 2. Types de tâche autour de l'aire dans les manuels scolaires de 5ième et 6ième.

L'aire apparaît en 5ième en tant qu'outil pour l'étude du thème fractions, dans une dynamique inter-domaines (grandeurs et mesures avec nombres et opérations). En tant qu'objet, son étude se fait dans un chapitre sur la notion d'aire comprise comme l'étendue d'une surface exprimée à l'aide d'unités de mesure, comme nous présentons ci-dessous un exemple.

Figure 3. T_{DP} – Déterminer la mesure de un'aire (5º ano, p.110)

Les tâches du type $\mathbf{T_{DA}}$ sont résolues à l'aide de la technique $\boldsymbol{\tau_{DA2}}$ – dénombrement des carreaux entiers sur la largeur et sur la longueur suivi de la multiplication des valeurs ainsi obtenues. Un élément technologique central (**ϴ**) est celui de l'approche de la multiplication ratachée à la configuration rectangulaire.

Pour resoudre les tâches de type T_{CA} proposées sur pappier quadrillé dans le thème des relations entre aire et périmètre de polygones, la technique mise en oeuvre est composée par la juxtaposition d'une technique τ_{DA1} – de dénombrement des carreaux suivi de $\boldsymbol{\tau_{CA1}}$ - comparaison des valeurs numériques ainsi obtenus. Les éléments technologiques en jeu (**ϴ**) sont ceux autor de la mesure de l'aire comprise comme la quantité de surfaces unitaires nécessaires pour paver la figure et l'ordre des nombres.

En plus de l'usage des carreaux sur papier quadrillé, dans le domaine des grandeurs et mesures (en 5ième) ou du domaine des mesures (en 6ième), les objets aire et périmètre sont étudiés en rapport aux unités du système international de mesures, en particulier, avec des centimètres et des centimètres carrés. De manière générale sont étudiés l'aire et le périmètre de certains polygones.

En 6[ième] les praxéologies autour des tâches de type déterminer la mesure de l'aire apuyées sur la technique de dénombrement de carreaux, sont une *reprise* de connaissances étudiées en 5[ième], sous une approche où les connaissances anciennes servent de support à la rencontre avec la formule de l'aire d'un rectangle.

Ensuite, des tâches de type $\mathbf{T_{DA}}$ sont résolues par la technique τ_{DA3} – décomposition de figures polygonales en rectangles et carrés, usage des formules de l'aire des rectangles et des carrés et addition des aires.

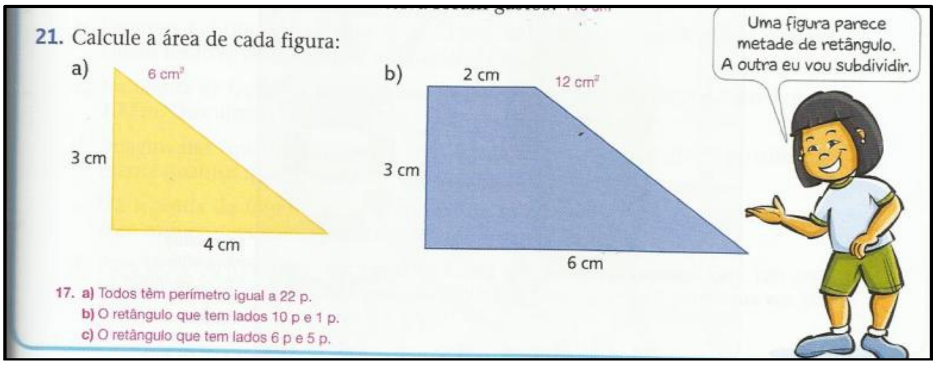


Figure 4. $\mathrm{T_{DP}}$ – Déterminer la mesure de un'aire (6º ano, p.227)

Ces tâches sont *reprises* (Larguier, 2009) aussi pour introduire de nouvelles connaissances concernant le calcul de l'aire de triangles et trapèzes.

Le travail sur la formule de l'aire d'un rectangle ayant des mesures des longueurs des côtés des nombres fractionnaires met en place aussi une *reprise* de cette formule, rattachée au départ à la situation dans laquelle les mesures des longueurs sont entières.

Conclusion

Les *secteurs* et les *thèmes* rattachés à l'étude des objets aire et périmètre sont différentes entre les manuels de 5[ième] et 6[ième] et nous avons observé une dynamique inter-domaines sont plus intenses en 5[ième] et une dynamique intra-domaine des mesures plus prononcée en 6[ième].

Dans les deux manuels, l'accent est mis sur la mesure, comme nus l'avons constaté par les titres des secteurs et par la quantité très nettement supérieur des tâches de type déterminer la mesure de l'aire et déterminer la mesure du périmètre d'une figure. Même les tâches du genre comparer (des aires ou des périmètres) sont solvente résolues par des techniques dans lesquelles les aspects numériques sont eu centre.

Des *reprises* sont observées dans les manuels de 6ième année, en tant que revision systématique ou synthèses. Cependant, le lien avec ce qui a été étudié l'année précedente n'est pas toujours fait de manière explicite dans les remarques du manuel pédagogique du professeur, ce qui peut restreindre les conditions favorables à la transition entre les sous-niveaux (plus particulièrement entre la 5ième et la 6ième année).

Références

Anwandter-Cuellar, N. (2012). *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France* (Thèse de doctorat).

Bellemain, P. M. B. ; Bronner, A., & Larguier, M. (2013). Étude comparative de la reprise de l'enseignement de l'aire en classe de sixième en France et au Brésil. *4e congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Toulouse, France.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique: le numérique en question?* Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactiques des Matematiques*, 19(2), 221-266.

Imenes, L. M. ; Lellis. (2010). *Matemática*. São Paulo, Ed. Moderna.

Imenes, L. M. ; Lellis, ; Milani, E. (2015). *Projeto Presente Matemática*. São Paulo, Ed. Moderna.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde: un problème de la profession.* (Thèse de doctorat). Université Montpellier 2, Montpellier.

Condiciones y restricciones de la evaluación en matemáticas. Una propuesta de evaluación de la interactividad mediada en el marco de la TAD

César Augusto Delgado García

Departamento de matemáticas, Universidad del Valle y Universidad San Buenaventura, Colombia

Liliana Patricia Ospina Marulanda

Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Quindío y Universidad San Buenaventura, Colombia

Abstract. We present progress made in doctoral thesis «Configuration of the assessment practices of mathematics teachers at university». Some problems related to assessment in mathematics are outlined and there is a need to analyse and describe the configuration of assessment practices at university level, focusing attention on the conditions and constraints that hinder or prevent the evaluation in mathematics mediating in the activities of teaching and study for the acquisition of learning, from the different levels of the scale of mathematical-didactic co-determination. It is hoped to contribute elements for the analysis of actions that tend to improve the assessment processes in the area.

Resumen. Presentamos los avances de la tesis doctoral: «Configuración de las prácticas evaluativas de los profesores de Matemáticas en la Universidad». Se esbozan algunos problemas relacionados con la evaluación en matemáticas y se plantea la necesidad de analizar y describir la configuración de las prácticas de evaluación a nivel universitario, focalizando la atención sobre las condiciones y restricciones que dificultan o impiden que la evaluación en matemáticas medie en las actividades de enseñar y de estudio para la adquisición de los aprendizajes, desde los diferentes niveles de la escala de codeterminación matemático-didáctico. Se espera aportar elementos para el análisis de acciones que propendan por mejorar los procesos evaluativos en el área.

Résumé. Nous présentons des progrès réalisés dans la thèse de doctorat «Configuration des pratiques d'évaluation des professeurs de mathématiques dans l'université». Certains problèmes relatifs à l'évaluation, dans des mathématiques, sont ébauchés et se formule la nécessité d'analyser et de décrire la configuration des pratiques d'évaluation à un niveau universitaire, en focalisant l'attention sur les conditions et les restrictions qu'ils compliquent ou empêchent que l'évaluation dans des mathématiques arrive à être un médiateur dans les activités d'enseignement et d'étude pour l'acquisition des apprentissages, depuis différents niveaux de l'échelle de codeterminación mathématique-didactique. Il s'attend apporter des éléments pour l'analyse d'actions qui tendent pour améliorer les processus d'évaluation dans l'aire.

Liste des editeurs (Eds)

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)

VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)

Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*

Editorial, año

1. Problema de investigación y referentes teóricos

Actualmente la concepción dominante de la evaluación en matemáticas en el nivel universitario es *sumativa y puntual*, considerada *al margen de las actividades* de enseñanza y de estudio, este tipo de evaluación se corresponde con el paradigma didáctico llamado por Yves Chevallard (2015) «*paradigma monumentalista*».

Esta concepción justificada desde una epistemología conductista y positivista deja en la sombra una gran cantidad de variables que influyen en la calidad de los aprendizajes. En este sentido diferentes investigaciones (Edith Litwin. 2010; Mariana Bosch y Josep Gascón, 2001) llaman la atención sobre la importancia de tomar en consideración variables como:

- ✓ Atención a las necesidades intelectuales de los estudiantes
- ✓ Interpretación sistemática de las retroalimentaciones que se generan de los observables de la interactividad alumno-medio
- ✓ Evaluación y re-orientación de las praxeologías didáctico-matemáticas del profesor
- ✓ Evaluación de las praxeologías institucionales.

Estas observaciones se inspiran en una perspectiva epistemológica constructivista que postula a la *acción* y la t*ransformación* de las estructuras de conocimiento actuales en función de *procesos de negociación* de significados como fuentes del aprendizaje. Esta visión epistemológica conduce a plantear, desde la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (*TAD*), un *giro de la didáctica* hacia la actividad de reconstrucción de las obras matemáticas –actividad que se sitúa «*en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales*»– a partir de *cuestiones* cuyas respuestas no están disponibles, en el estudiante, pero que son necesarias para resolver toda una clase de situaciones matemáticas en un *recorrido de estudio e investigación*. A esta manera de proceder se le llama en la TAD el paradigma didáctico de «*cuestionamiento del mundo*».

En consecuencia, nos proponemos adelantar estudios, tomando como unidad de análisis básica la «*praxeología local*» (Bosch & Gascón, 2001) relacionada con el *tema* de la derivada con el fin de hacer visibles los aspectos que confluyen en los procesos evaluativos que se expresan en el «*contrato didáctico*» como resultado de la cadena de condiciones y restricciones que provienen de los diferentes «*niveles de codeterminación matemático-didáctico*». Es así como el presente proyecto de investigación tiene como propósito analizar y describir la *configuración de las prácticas evaluativas de las matemáticas* en tres instituciones universitarias colombianas, desde la dimensión social, pedagógica, escolar, disciplinar y personal, focalizando la atención sobre las condiciones y restricciones que dificultan o impiden que la evaluación en matemáticas sea un mecanismo que articule las actividades de enseñar y de estudiar las matemáticas con el objetivo que los aprendizajes sean más operativos. Así interesa conocer:

- ✓ ¿Cuáles son las características de las praxeologías institucionales que se expresan en el «contrato didáctico» dominante en relación con los procesos de evaluación del aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario?
- ✓ ¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan o impiden que la evaluación en matemáticas medie en las actividades de enseñar y de estudio para la adquisición de los aprendizajes?

2. Metodología de Investigación

Cualitativa, de tipo descriptivo y explicativo. Se trata de analizar los datos teóricos y empíricos que emergen de las instituciones en los niveles de la escala de codeterminación señalados por la TAD con el fin de estudiar la configuración de las prácticas de evaluación a nivel universitario. Consideramos cuatro *dimensiones*: antropológica, didáctica, epistemológica y socio-cognitiva, lo que hace necesario considerar un *sistema de unidades de análisis* siendo la unidad central la «*praxeología didáctica local*» (Marianna Bosch & Joseph Gascón, 2005), en el *tema* de la derivada. El *objetivo general* es conformar una visión que dé cuenta de las condiciones y restricciones producto de la transposición, en relación con los procesos de evaluación en las matemáticas universitarias.

El análisis de los datos se realizará teniendo en cuenta la *Teoría Fundamentada* (TF) desde los planteamientos propuestos por Anselm Strauss y Juliet Corbin (2002) quienes establecen las técnicas y procedimientos para la recolección y análisis de datos, con el propósito de construir marcos teóricos de alcance medio que explican el fenómeno objeto de estudio. La TF contempla, para el análisis de datos, la codificación abierta, la codificación axial y la codificación selectiva.

3. Aportes a la teoría

Se hace evidente que frente a los problemas que presenta la evaluación del aprendizaje en matemáticas hay un equilibrio no deseado, del sistema didáctico, que impide acceder al logro de aprendizajes propios para enfrentar la contingencia y situaciones que cambian muy rápidamente. En tal sentido, hay un llamado a plantear una evaluación que articule la *actividad de enseñanza*, *la actividad de estudio* en torno a su objetivo, el aprendizaje, la cual hemos denominado *la evaluación de la interactividad mediada* (EIM), cuya función consistiría en *regular* la *actividad de enseñanza* y la *actividad de estudio*, para que se alcancen aprendizajes más operativos. Así, se trata de una evaluación que genere y alimente una *dialéctica* entre las *acciones del profesor* –o un par más experto– y las *acciones del estudiante*, donde las primeras están orientadas a ayudar al estudiante a cubrir *lagunas* o generarle *perturbaciones* que hagan necesario la modificación de los estados de conocimiento actuales y, las segundas, del lado de las acciones del estudiante, se orientan a alcanzar el éxito enfrentando el *medio* y de esta manera afecta las acciones del profesor que se deben ajustar al estado de conocimiento de los estudiantes para retroalimentarlos y para *validar* e *institucionalizar* las obras matemáticas de los participantes.

En consecuencia, la evaluación se focaliza en la *interactividad* entendida como la definen César Coll, Rosa Colomina, Javier Onrubia y José Rochera, (1995): «[…] la articulación de las actuaciones de los profesores y los alumnos […] en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje determinado.» (p. 204) y, en la naturaleza de la *mediación* (Vygotski, 1930) ejercida sobre ella por *sistemas de prácticas y artefactos culturales* que, potencialmente, pueden generar tensiones con los *sistemas de conocimiento actuales* de los estudiantes que maximicen la interacción imprimiendo una dinámica a la construcción de *zonas de desarrollo* *próximo* –el ecotono. La evaluación de la *interactividad mediada* tomará en consideración las cuestiones matemáticas que surgen en la organización y gestión de las obras matemática y didáctica relacionadas con ciertos modos de comprender (MoC) de los estudiantes –observables de la acción, producto de actos mentales– y modos de pensar (MoP) –características de los actos mentales que se infieren de observaciones de los MoC que se repiten– (Gerson Harel, 2008) en busca de mediar y construir, a partir de ellos, *Zonas de Desarrollo Próximo* que los acerquen a los MoP y MoC institucionales.

Es decir, la función de la EIM consistiría en asegurar la efectividad de la mediación entre la actividad de enseñanza y la actividad de estudio, para que se alcancen los aprendizajes esperados. Así, la evaluación debe mirar el *proceso interpersonal* y el *proceso intrapersonal*. El proceso interpersonal dependerá de la relación entre las OM y las OD que proponga el profesor, la cual hay que mantener en constante observación. En tanto que el proceso intrapersonal hace referencia a desequilibrios cognitivos y re-equilibraciones (Jean Piaget, 1975) relacionados con el medio didáctico y a-didáctico generado en torno a las cuestiones y situaciones. Se trata entonces de evaluar cómo el medio ambiente -medio material, situaciones a-didácticas y didácticas- afecta los actos mentales relacionados con los *MoP* y *MoC* de los estudiantes, en función de la interactividad. Es decir, de «*las formas de organización de la actividad conjunta de los participantes*» (Coll et al, p. 205)

4. Resultados esperados

Se espera aportar elementos que informen sobre las prácticas evaluativas en la enseñanza de las matemáticas en la educación universitaria, a fin de develar aspectos implícitos y explícitos que regulan estas prácticas desde la dimensión social, pedagógica, escolar, disciplinar y personal.

Por tanto, se busca dar respuesta a un vacío de información en relación con las condiciones y restricciones que dificultan o impiden que la evaluación en matemáticas medie más positivamente, en las actividades de enseñar y de estudiar las matemáticas con el objetivo de que los aprendizajes sean más operativos. Se espera entonces que a la luz de los hallazgos, se aporten referentes teóricos y evidencias empíricas que propicien una mejor comprensión del papel de la evaluación en los procesos educativos a nivel universitario.

Referencias

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, Facultad de Enfermería de la Universidad de Antioquia

Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. (Provisional version of 09/13/01) http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In: Mercier, A. & Margolinas, C. (ed.), *Balises pour la didactique des mathématiques*. Grenoble: La pensée sauvage. pp. 107-121.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. In: *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul (Korea): Springer International Publishing. pp. 173-187.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. & Rochera, J. (1995). Actividad conjunta y habla. In: Fernández, B. & Melero, Z. M. (comp.), *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: Siglo XXI. pp. 193-326.

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In: Gold, B. & Simons, R. (Eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. Washington, DC: Mathematical Association of America. pp. 265-290

Litwin, E. (2010). La evaluación: campo de controversias y paradojas o un nuevo lugar para la buena enseñanza. En A. Camilloni et al. (2010). *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*, Buenos Aires: Editorial Paidós Educador. pp. 11-34

Piaget, J., (1975). L'équilibration des structures cognitives: *problème central du développement*. Presses universitaires de France. (EEG 33). Paris. Versión castellana: *La Equilibración de las Estructuras*

Cognitivas: problema central del desarrollo. Siglo XXI. 2000. Madrid.

Vygotski, L. S. (1930). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica, 1996.

An online course to teach ATD research praxeologies: The ICMI Awardees Multimedia Online Resources

Annie Bessot
Université de Grenoble Alpes, France

Marianna Bosch
Universitat Ramon Llull, Barcelona, Spain

Jean-Luc Dorier
University of Geneva, Switzerland

Abstract. We present some of the main elements of a projet of Multimedia Online Resource addressed to international researchers willing to be initiated in the ATD. The project was launched by the executive committee of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) to produce some material related to each Felix Klein and Hans Freudenthal medals awardees.

Résumé. Nous présentons quelques éléments d'un projet de ressource en ligne multimédia adressée à des chercheurs internationaux qui veulent s'initier à la TAD. Le projet a été lancé par le comité exécutif de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) pour produire un projet pour chaque médailliste Felix Klein et Hans Freudenthal.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 1. *Analyse et évaluation des usages de la TAD dans la recherche et la Formation en didactique*
Axe 2. *Le paradigme du questionnement du monde et la question curriculaire*
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

1. The ICMI-AMOR project

The executive committee of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) has decided during its meeting in June 2015 to launch an operation in order to produce some material related to each Felix Klein and Hans Freudenthal medals awardees. This material will consist in short video, text, interviews, guidelines, etc. that could be incorporated in a Massive Open Online Course (MOOC) that would represent a general overview of the international community in Mathematics education.

Jean-Luc Dorier has been designated by the EC to initiate this project for the three French medallists (Guy Brousseau, Yves Chevallard and Michèle Artigue) and he has proposed Michèle Artigue (Paris), Annie Bessot (Grenoble), Marianna Bosch (Barcelona) and Claire Margolinas (Clermont-Ferrand) to lead this project. The team has decided to realise a 2 hours video made of 10-12 modules of 10 minutes for each awardee, along with some material like texts, but also extracts of class videos and protocols, textbooks, etc., in order to exemplify some ways of making the theoretical tools operational. The three sets of material will be introduced by a unique presentation pointing out some common aspects. This will constitute a core set of material, that would serve as example for the other awardees and it will be accessible in English, French and Spanish, either with subtitles or different versions in each language, depending on the difficulty of translation.

Moreover, on top of this work and as a second step in the project, the team has decided to prepare an extended proposal for each medallist, mostly in French, that will develop the issues raised in the first level and will give more opportunity to the students to try some theoretical and methodological tools through various examples.

We are here presenting the proposal – still in process – of the course on ATD, for its discussion among the ATD community. One of the main resources used in its preparation is an invited conference given by Yves Chevallard in Osaka (Japan) in October 2016 where he presented the principles and use of the ATD to a public that was not familiar with this approach and, thus, corresponds to the once considered in the ICMI – AMOR project.

2. Overview of the course

The course is organised according to what can be considered as two general learning strategies. The first one, more traditional, strongly relies on Yves Chevallard's lecture notes and reproduces the lecture structure, centred on four ATD "sub-theories": the theory of didactic transposition, personal and institutional relationships, praxeologies and the ecology of the didactic (modules 2-5). In each module, the student will be faced with an initial question related to each sub-theory and some empirical and methodological elements will be introduced to elaborate some pieces of answers. We can relate it to a *study and research activity* (SRA) focused on a previously established ATD-research praxeology.

The second part of the course addresses the more recent developments of the ATD to approach the transition from the "visiting works" to the "questioning the world" paradigms. The strategy adopted here corresponds more to the spirit of *study and research paths* (SRP). An initial question is formulated: Why is there such a sudden and strong interest in teaching inquiry-based activities at school? How to address this problem? The student is then invited to follow a team of researchers in their specific way of approaching this question. Some elements of the researchers' praxeologies will be explicitly described, while others will only be shown *in vivo*.

The provisional titles of each module can help get a first overview of the course:

Introduction

1. Yves Chevallard and the anthropological theory of the didactic

Lecture study

2. The didactic transposition theory
3. Personal and institutional relationships
4. Praxeologies
5. The ecology of the didactic

The ATD at work

6. Initial question, units of analysis, institutions

7. Research methods and didactic engineering
8. A study and research path on forecasting Facebook user growth
9. A priori analysis: Herbartian schema and dialectics
10. In vivo and a posteriori analysis: chronogenesis
11. In vivo and a posteriori analysis: mesogenesis and topogenesis
12. Ecological analysis and open questions

3. Some elements of the “lecture study” modules

Module 2 takes as initial question the teaching of proportionality. The process of didactic transposition is introduced together with a mention of the enlargement of the unit of analysis associated to each question. The teacher usually assumes the knowledge to be taught as a given, and focuses on the design and implementation of teaching and learning activities. This is not the perspective of the ATD researcher, who starts by questioning the nature and origin of the knowledge to be taught. Some new theoretical elements need to be introduced to name and describe the entities that appear in this process – the noosphere and the scholarly knowledge – and the kind of constraints they impose on the knowledge to be taught.

Proportionality is a good example of the construction and evolution of a strong mathematical organisation that has been part of the mathematics to be taught during a long period: the theory of ratio and proportions and the rule(s) of three. With this case, various aspects of the didactic transposition process can be illustrated with some empirical data easy to consult. The evolution of the scholarly knowledge can be seen through productions of mathematicians of the “classic era” like Newton or Euler, the disappearing of the classic organisation in today’s mathematics but not in today’s sciences). The productions of the noosphere can be mainly approached through educators’ discourses about the importance of proportional reasoning and the contents of some teacher education courses. Finally, the evolutions of the knowledge to be taught can be made visible through some examples of textbooks from different periods: classic books including the theory of ratios and proportions, New Maths books without any trace of it, modern or current textbooks with a mixture of pieces from the old and the new mathematical organisations.

This module does not provide a full analysis of the didactic transposition phenomena affecting proportionality. It only introduces the main tools for the analysis and provide a selection of evidence that can help the student address some of the questions that will be left open.

A similar strategy is used with the module on institutional and personal relationships. The case study selected here is the teaching of fractions and the empirical evidence provided is made of the productions of students showing personal idiosyncrasies in their way of solving an arithmetical problem. This differences in the personal relationships to fractions can be explained by the students' nationality and the way fractions are taught in the educational system of their country: the institutional relationships that contribute to shape the personal relationships.

In the module about praxeologies, the classic organisation of ratio and proportions is again taken as an example. The stability of this construction make it easy to illustrate the notions of types of tasks, techniques, technologies and theories. It also shows, by contrast, the lack of elaborated technological discourses in today's mathematics and, more importantly, the difficulties created by an unstable school theoretical treatment of quantities.

Finally, the module on the ecology of didactic – still in preparation – will take as an example the case of school algebra to illustrate the various constraints coming from the different levels of didactic codetermination, using the examples developed in Bosch (2015).

4. The "ATD at work" modules

The last set of modules aim at reproducing a true research process carry out by a team of researchers around the question of inquiry based learning and the notion of *study and research path*. We adopt the strategy followed in what we call "study and research paths for teacher education" (Ruiz-Olarría 2015). The course starts with a teacher initial question and its first approaches from different institutional perspectives. Empirical elements taken from the experimentation of a *study and research paths* implemented in a first year university course are provided to support the analyses of inquiry activities using the Herbartian schema and the different study dialectics. It is also used to address the question of the ecology of this new type of activities and the new epistemological, didactic and pedagogical needs that are raised in the evolution from the paradigm of visiting works to the paradigm of questioning the world.

5. The dissemination of the ATD

Many of the elements used in the modules have been already experienced in different talks, seminars or research courses in different countries and with different types of audiences. However, their adaptation to a fully online course still remains a big challenge for us. We all have different experiences as "ATD students" and may know about better ways of making some of the main notions and methodologies available to others. Some of us also have some experiences as "ATD teachers" (or just study helpers) that can bring about new insight. We therefore welcome any suggestion, comment or criticism from the ATD research community.

References

Chevallard, Y. (2017). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: An Attempt at a Principled Approach. *Lecture at Osaka University, October 2016, 10th.*

Bosch, M. (2015). Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. In S. J. Cho (ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 51-69). Springer International Publishing Switzerland.

Kim, S. (2015). *Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? : études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques.* Thèse doctorale. Aix-Marseille Université, France.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid.

Les besoins praxéologiques du professeur

Floriane Wozniak
LIRDEF, Université de Montpellier, France

Abstract. The primordial issue (Chevallard, 2011) studies the praxeological equipment need or useful for an institution or a person to perform a project. In this case, a methodologic problem appears: How identify this equipment? This text studies how a researcher in didactics can explore the mathematical and didactical praxeologies that are required to teach mathematics.

Résumé. La problématique primordiale (Chevallard, 2011) considère l'équipement praxéologique indispensable ou utile pour qu'une institution ou une personne réalise son projet. Un problème méthodologique se pose alors : comment identifier cet équipement ? Ce texte envisage les pistes que peut explorer le didacticien afin d'identifier les besoins praxéologiques – mathématiques et didactiques – des professeurs.

Liste des editeurs (Eds)
El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza (pp. xx-yy)
VI congrès international de la TAD (Autrans, 22-26 janvier 2018)
Axe 3. *La TAD et la professionnalisation du métier d'enseignant*
Editorial, año

1. Introduction

Comme aide à l'étude, le professeur permet aux élèves de construire un rapport aux savoirs conforme à celui que veut instaurer l'institution scolaire. Pour ce faire, une fois les praxéologies à enseigner clairement identifiées, il conçoit les organisations mathématiques à faire vivre en classe et choisit les organisations didactiques adaptées à son projet. Ce texte aborde la question méthodologique de la mise au jour des besoins praxéologiques du professeur pour l'enseignement, qu'Yves Chevallard et Gisèle Cirade (2010, p. 44) nomment « l'équipement praxéologique "normal" ». Identifier ces besoins, c'est anticiper ce que pourraient être les difficultés des professeurs dans l'exercice de leur métier, les problèmes de la profession.

Un besoin traduit un rapport de nécessité car si les conditions ne sont pas remplies ce n'est plus tout à fait le projet initial qui est réalisé. C'est pourquoi l'identification d'un besoin se réalise à l'aune d'un modèle praxéologique de référence. La question abordée par ce texte s'inscrit donc dans ce qu'Yves Chevallard (2011) appelle la problématique primordiale :

> Étant donné un projet d'activité dans lequel telle institution ou telle personne envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ? (p. 98).

De manière évidente, les besoins primaires des professeurs portent sur la connaissance des savoirs mathématiques à enseigner dont la thèse de Gisèle Cirade (2006) donne de nombreux exemples. Elle y montre aussi comment un dispositif didactique[1], *les questions de la semaine* couplé au *forum des questions*, mis en place en formation de futurs enseignants par Yves Chevallard, est particulièrement efficace pour : (a) révéler que les questions des individus sont en réalité les questions d'une profession ; (b) travailler collectivement ces questions ; (c) faire apparaître certains

[1] Le dispositif vise à élaborer une réponse à des questions posées par les participants au séminaire, préalablement construites et reconnues par tous comme des problèmes de la profession.

besoins praxéologiques qu'ils soient explicitement exprimés ou qu'ils émergent de l'étude des questions elles-mêmes[2]. Ce texte n'abordera donc pas les besoins praxéologiques des professeurs qui sont dits – explicitement ou implicitement – voire reconnus par les professeurs eux-mêmes. Il traite des outils à la disposition des chercheurs pour identifier les besoins que les professeurs ne peuvent pas spontanément reconnaître.

Après avoir fait un point sur la nature des besoins praxéologiques mathématiques et didactiques des professeurs, trois pistes sont explorées qui font chacune l'objet d'une section : l'analyse écologique, les observations naturalistes et le destin des ingénieries didactiques.

2. Les savoirs professionnels des professeurs

Dans le monde anglo-saxon, l'étude des savoirs des professeurs de l'enseignement secondaire, s'est fortement développé à partir des travaux de Lee S. Shulman (1987). Celui-ci s'est particulièrement intéressé au moment où l'étudiant spécialiste d'une discipline – *expert student* – devient professeur – *novice teacher* – en construisant un nouveau rapport aux objets de savoir à enseigner. Il identifie sept types de savoirs requis pour enseigner :

- content knowledge ;
- general pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter;
- curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers;
- pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding;
- knowledge of learners and their characteristics;
- knowledge of educational contexts, ranging from the workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and

[2] Comprendre une question nécessite d'étudier d'où elle vient et ce qu'elle dit de la situation de celui qui la pose (des conditions et des contraintes qui pèsent sur lui).

> - knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds. (p. 8).

Cette catégorisation distingue les savoirs professionnels communs à l'ensemble des professeurs indépendamment de la discipline enseignée, des savoirs professionnels spécifiques aux savoirs enseignés qu'il classe en trois catégories : les savoirs relatifs à la discipline enseignée – *the subject matter content knowledge* – ou au curriculum – *the curriculum knowledge* – et les savoirs pédagogiques relatifs aux savoirs enseignés – *the pedagogical content knowledge* –.

La thèse de Gisèle Cirade (2006) identifie de quoi sont faits ces savoirs spécifiques aux savoirs enseignés pour les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Elle distingue les mathématiques *à enseigner*, les mathématiques *pour l'enseignant* qui sont « les mathématiques que celui-ci peut trouver avantage à mobiliser pour outiller sa pensée et son action » (p. 185) et les mathématiques *pour l'enseignement* qui débutent quand les professeurs « commencent à s'interroger sur les *raisons d'être* de telle notion, de telle théorie, de tel théorème » (p. 133). Yves Chevallard et Gisèle Cirade (2010, p. 45) structurent alors les *praxéologies pour la profession* ainsi :

> Bien entendu, cette catégorie contient la sous-catégorie des praxéologies *à enseigner* ; mais elle est loin de s'y réduire : au plan mathématique, elle inclut ainsi les connaissances indispensables pour *identifier* les praxéologies à enseigner. L'ensemble (flou, et évolutif) des praxéologies mathématiques *à enseigner* peut alors s'inclure dans une autre sous-catégorie, celle des praxéologies *pour l'enseignement*, qui comprend, avec les *praxéologies didactiques* relatives à telle ou telle praxéologie mathématique *à enseigner*, les praxéologies mathématiques directement utiles pour concevoir et construire ces praxéologies didactiques (dont l'élaboration suppose aussi des praxéologies *pour la profession* qui ne sont pas à strictement parler des praxéologies *pour l'enseignement*). On peut donc écrire ceci : praxéologies pour la profession $\supset$ praxéologies pour l'enseignement $\supset$ praxéologies à enseigner.

De leur côté, Deborah Ball, Mark Thames et Geoffrey Phelps (2008) cherchent à identifier les effets sur les apprentissages des élèves des savoirs mathématiques pour enseigner (*mathematical knowledge for Teaching*) en considérant les pratiques des professeurs des écoles :

> By "mathematical knowledge for teaching," we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics. Important to note here is that our definition begins with teaching, not teachers. It is concerned with the tasks involved in teaching and the mathematical demands of these tasks. Because teaching involves showing students how to solve problems, answering students' questions, and checking students' work, it demands an understanding of the content of the school curriculum. (p. 395).

Ceci les conduit à proposer une catégorisation selon deux pôles. Concernant les savoirs relatifs au contenu enseigné – *the subject matter knowledge* – ils identifient : 1) *Commun content knowledge* qui sont les savoirs mathématiques que d'autres personnes peuvent avoir donc non spécifiques des professeurs de mathématiques[3]; 2) *Horizon content knowledge* qui articulent les différents domaines des mathématiques au sein du curriculum[4] ; 3) *Specialized content knowledge* (SCK) qui sont les savoirs mathématiques spécifiques aux professeurs[5]. Concernant les savoirs pédagogiques relatifs aux savoirs enseignés – *the pedagogical content knowledge* – ils identifient : 4) *Knowledge of content and students* qui combinent la connaissance des étudiants et des mathématiques[6] ; 5) *Knowledge of content and teaching* qui combinent la connaissance de

[3] « But some of this requires mathematical knowledge and skill that others have as well – thus, it is not special to the work of teaching » (Ball et al., 2008, p. 399).

[4] « First grade teachers, for example, may need to know how the mathematics they teach is related to the mathematics students will learn in third grade to be able to set the mathematical foundation for what will come later. It also includes the vision useful in seeing connections to much later mathematical ideas. » (Ball et al., 2008, p. 403).

[5] « The demands of the work of teaching mathematics create the need for such a body of mathematical knowledge specialized to teaching. » (Ball et al., 2008, p. 400).

[6] « Teachers must anticipate what students are likely to think and what they will find confusing. When choosing an example, teachers need to predict what students will find interesting and motivating. » (Ball et al., 2008, p. 401).

l'enseignement et des mathématiques[7] ; 6) *Knowledge of content and curriculum*. Pour illustrer ce que sont les savoirs mathématiques spécifiques du professeur (SCK), une liste de types de tâches mathématiques intitulée *Mathematical Tasks of Teaching* est par ailleurs proposée :

- Presenting mathematical ideas ;
- Responding to students' "why" questions;
- Finding an example to make a specific mathematical point;
- Recognizing what is involved in using a particular representation;
- Linking representations to underlying ideas and to other representations;
- Connecting a topic being taught to topics from prior or future years;
- Explaining mathematical goals and purposes to parents;
- Appraising and adapting the mathematical content of textbooks;
- Modifying tasks to be either easier or harder;
- Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly);
- Giving or evaluating mathematical explanations;
- Choosing and developing useable definitions;
- Using mathematical notation and language and critiquing its use;
- Asking productive mathematical questions;
- Selecting representations for particular purposes;
- Inspecting equivalencies (Ball et al., 2008, p. 400).

Aborder la question des besoins praxéologiques des professeurs, c'est aborder la question des conditions et des contraintes non pas d'un point de vue descendant – comment les déterminants didactiques des niveaux supérieurs pèsent sur le système didactique – mais d'un point de vue ascendant qui vient du système didactique : qu'est-ce qui est nécessaire aux professeurs pour enseigner ? Reste donc à déterminer comment identifier ces besoins qui peuvent aussi bien être relatifs à l'organisation mathématique qu'à l'organisation didactique.

[7] «Teachers evaluate the instructional advantages and disadvantages of representations used to teach a specific idea and identify what different methods and procedures afford instructionally. » (Ball et al., 2008, p. 401).

3. Les analyses écologiques

Les analyses écologiques (Artaud, 1997) et l'étude des phénomènes de transposition didactique permettent de mettre au jour certains besoins praxéologiques des professeurs. Ainsi par exemple, dans Chevallard et Wozniak (2011), nous avons étudié pourquoi les manuels scolaires de troisième n'introduisaient pas les probabilités selon une approche fréquentiste, alors que cet aspect était présent dans les programmes scolaires du moment.

Notre étude épistémologique sur la base de l'ouvrage *Introduction à la théorie des probabilités* de B.V Gnedenko et A. Khintchine a ainsi montré comment la problématique fréquentiste permet d'établir les règles du calcul des probabilités. Il s'agit là d'un aspect méthodologique essentiel : envisager les possibles – c'est-à-dire ce qui pourrait être – est une façon de comprendre pourquoi les phénomènes didactiques sont ce qu'ils sont, en l'occurrence ici une absence d'enseignement d'un certain objet de savoir. Une reprise historique de la construction de la notion de probabilité a ensuite permis d'illustrer comment la définition classique « nombre de cas favorables/nombre de cas possibles » peut conduire à dissocier dans la culture scolaire le calcul des probabilités de son fondement statistique. Ainsi, l'enseignement des probabilités est l'enseignement d'une syntaxe sans sémantique : pour un élève, la probabilité d'un évènement ce n'est rien d'autre que ce qu'on obtient en appliquant les règles du calcul des probabilités. Nous avons alors reconsidéré les rôles respectifs de l'estimation[8] et de la prévision[9] dans la modélisation probabiliste de la variabilité statistique pour envisager ce qui « pourrait être ». Ce faisant, cette étude a permis de diagnostiquer un besoin de connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement des probabilités selon un abord fréquentiste en classe de troisième.

Un tel type d'études n'est pas le seul moyen de repérer des besoins de connaissances des professeurs. L'observation naturaliste de classes peut aussi y contribuer.

[8] On ne connait pas la probabilité P(A) et on l'estime à partir de la fréquence.

[9] Connaissant la probabilité P(A), on veut prédire le nombre de réalisations de A en *n* sorties.

4. Les observations naturalistes

Les observations où le professeur est libre d'action offre l'opportunité de comparer ce qui se *fait* à ce qui *pourrait être* afin de déterminer ce qui *devrait être* pour permettre aux élèves de construire des rapports aux savoirs idoines avec l'institution de référence. Ce pas de côté, essentiel en théorie anthropologique du didactique, met à distance les contraintes institutionnelles.

Afin de déterminer les besoins praxéologiques des professeurs des écoles pour l'enseignement de la modélisation, une étude qualitative (Wozniak, 2012) a été réalisée sur la base d'observations de professeurs abordant un même problème de grandeur inaccessible avec des élèves de CM2. Pour déterminer la hauteur d'un édifice représentant un géant dans un parc d'attraction, il est possible d'utiliser le modèle de la proportionnalité sous l'hypothèse que les proportions d'un humain et du géant sont les mêmes. Alors que trois techniques différentes sont envisageables, les professeurs enseignent systématiquement celle qu'ils ont eux-mêmes utilisée pour résoudre le problème, écartant les propositions d'élèves utilisant une technique alternative. Les hypothèses sont énoncées sans être interrogées ou légitimées et le domaine de validité n'est pas considéré. Tout se passe comme si le problème posé n'était qu'un habillage, prétexte à appliquer un modèle appris. Ces observations révèlent les difficultés des professeurs pour appréhender – et même reconnaître – des phénomènes liés à la variabilité ou pour conduire d'une démarche de modélisation.

Sur le plan méthodologique, les besoins praxéologiques se révèlent par la distance entre les pratiques observées et le modèle praxéologique de référence portant sur l'organisation mathématique et l'organisation didactique. Modèle qui dépend de l'enjeu de savoir et du rapport institutionnel à cet objet qui prévaut dans l'institution de référence. Cette distance se mesure notamment au travers du discours technologique qui révèle à la classe les connaissances utilisées, les décrit, explicite, justifie, questionne et finalement valide ce qui a été construit ensemble. Il faut des mots, des notations, des ostensifs pour que la classe se dise à elle-même les savoirs qu'elle a collectivement construits et qui intégreront une culture partagée. C'est pourquoi j'ai proposé (Wozniak, 2012) une classification des praxéologies en fonction du rôle du discours technologique.

Une praxéologie muette n'est visible que par sa composante *praxis* au travers de la technique mise en œuvre alors que la composante *logos* est inaudible ou tue. Une praxéologie faible laisse entrevoir la composante *logos* au travers des ostensifs associés à la technique utilisée alors que le discours technologique est implicite ou limité à la seule description de la technique. Enfin, une praxéologie forte met en œuvre dialectiquement les deux composantes *praxis* et *logos* pour agir, penser et valider l'action.

Si le recours à des praxéologies muettes ou faibles est un indice de besoins praxéologiques, il est encore nécessaire de valider ce qui a été repéré comme un besoin de la profession et non comme un besoin des seuls professeurs observés. Ceci se réalise en considérant ce que les pratiques individuelles révèlent des contraintes qui pèsent sur le système didactique. Dans ce cas, une absence de (re)connaissance de la modélisation, liée à un défaut de formation scientifique des professeurs des écoles et à une faible intégration de la démarche d'investigation pourtant explicitement dans les programmes scolaires du fait de l'espace des contraintes révélé par Jean-Luc Dorier et Francisco J. Garcia (2013).

J'en viens à présent à considérer une autre voie que l'observation naturaliste des professeurs, celle de l'observation de situations d'enseignement conçues par et pour la recherche.

5. Le destin des ingénieries didactiques

Une ingénierie didactique, est une réponse à une question de recherche que, le plus souvent, les professeurs ne se posent pas ou du moins par dans les mêmes termes. Ceci explique pour une part qu'il ne suffit pas de proposer de telles situations pour que les professeurs les adoptent et les mettent en œuvre telles qu'elles ont été conçues.

Dans le prolongement de nos recherches sur le nombre ordinal (Margolinas et Wozniak, 2014), nous nous sommes intéressées à la réception par les professeurs d'une ingénierie didactique conçue pour la recherche (Margolinas et Wozniak, 2015). Les deux enseignantes expérimentatrices avaient suivi scrupuleusement nos instructions pour la mise en œuvre de l'ingénierie. Pourtant, l'année suivante l'une d'elles n'a pas repris l'ingénierie, estimant la charge trop lourde pour un enseignement du nombre ordinal, qui selon elle, se limitait à celui des adjectifs ordinaux (premier, deuxième, etc.). L'autre professeure a apprêté l'ingénierie de recherche en utilisant un autre type de matériel et en adaptant les situations à l'organisation spécifique de sa classe. Pour ce faire, elle a utilisé notre ouvrage (Margolinas et Wozniak, 2012) qui présente les enjeux didactiques d'un enseignement du nombre à l'école maternelle ainsi que les praxéologies mathématiques et didactiques utiles.

L'expérimentation d'une ingénierie agit ainsi comme un milieu adidactique. Pour que le professeur en « tire bénéfice », il est nécessaire qu'il en perçoive la raison d'être, qu'il puisse « lire » l'expérience comme une réponse à une question. Du point de vue de la dialectique des médias et des milieux, l'ingénierie didactique est un média pour le professeur expérimentateur et notre ouvrage a été l'outil qui a permis d'interroger l'expérimentation afin de la constituer en milieu pour développer son équipement praxéologique.

Nous avons proposé à un troisième professeur d'utiliser à sa guise l'ingénierie de recherche dont nous avons présenté les différentes composantes (matériel, organisation des situations, productions d'élèves). Or si les organisations didactiques et mathématiques sont fixées par l'ingénierie, une part de *logos* dans l'accompagnement du travail de l'élève reste libre. La modification des organisations mathématiques par cette part de *logos* laissée libre va alors constituer un indicateur des besoins praxéologiques.

Enfin, dans un dernier cas, nous avons simplement présenté l'ingénierie didactique de recherche comme une ressource potentielle. Cette situation rejoint celle d'une observation naturaliste, l'ingénierie joue alors le rôle d'une ressource parmi d'autres[10].

Trois types d'observations ont ainsi été réalisés en lien avec l'ingénierie de recherche : une observation post-expérimentation, une observation organisée autour d'une mise en œuvre libre et une observation post-proposition d'une ressource. Dans ces trois cas, les besoins praxéologiques du professeur, autant que des contraintes qui

[10] Pas tout à fait, si on tient compte du double statut de chercheur et formateur de celui qui propose la ressource.

pèsent sur le système didactique, se révèlent par : a) ce que le professeur prend ou modifie de ce que le chercheur apporte de nouveau par rapport à ses pratiques habituelles au travers de l'ingénierie didactique ; b) la part de *logos* avec son effet sur les praxéologies mathématiques.

Que les observations soient naturalistes ou organisées autour d'une ingénierie didactique de recherche, l'écart au modèle praxéologique de référence est toujours un indicateur. Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2011) a montré toute la complexité de la réception des ingénieries didactiques au sein de l'institution scolaire en lien avec les types de questions auxquelles elles répondent, que ce soit pour la recherche, la formation ou la conception de situations d'enseignement dans les classes. Il apparaît que la capacité des professeurs à se saisir des outils didactiques proposés dépend de contraintes qui dépassent celles qui prévalent seulement dans la classe au moment où ils enseignent. Les besoins praxéologiques des professeurs sont en réalité des symptômes des conditions et des contraintes de leur situation et la (re)connaissance des praxéologies mathématiques et didactiques utiles est moins le problème d'un professeur singulier que de la profession dans son ensemble.

Ainsi, par exemple dans l'expérimentation de notre ingénierie didactique autour du nombre ordinal (Margolinas et Wozniak, 2014), nous pouvons interpréter ce que font les élèves comme un effet de ce que le nombre ordinal est un savoir dominé par le nombre cardinal. Les élèves au cours de l'expérimentation ont inventé ce que nous avons appelé une *quantité orientée* pour identifier la position d'une perle de couleur parmi plusieurs perles identiques sur un fil. Certains élèves ont par exemple écrit « 613 » pour exprimer le fait qu'il y a 6 perles de même couleur, puis la perle colorée et encore 3 perles de même couleur ; les quantités (6, 1 et 3) étant orientées par le sens de l'écriture. Les élèves ont ainsi contourné le nombre ordinal qui aurait conduit à dire que la perle colorée était en 7^{e} position à partir du nœud. La connaissance du nombre cardinal se constitue en obstacle pour l'apprentissage du nombre ordinal. Or si le nombre ordinal apparaît dans l'institution scolaire comme un savoir dominé par le nombre cardinal, c'est du fait de sa quasi absence comme savoir à enseigner au moment de l'expérimentation; l'aspect ordinal du nombre n'étant abordé que sous l'aspect langagier quand le nombre cardinal est quotidiennement travaillé.

6. Conclusion

Différentes pistes ont été envisagées pour identifier les besoins praxéologiques du professeur. Elles sont complémentaires et participent à établir un faisceau de faits qui, constitué en un tout, valide les éléments mis au jour. Chacune des pistes envisagées se fonde sur le triptyque de l'analyse écologique *ce qui est – ce qui pourrait être – ce qui devrait être* qui est un jeu sur les conditions et les contraintes et repose sur la comparaison à un modèle praxéologique de référence. Pour réaliser tel projet, il est nécessaire de mettre en œuvre telle(s) praxéologie(s) et c'est la distance à ce complexe praxéologique initialement établi qui permet d'identifier les manques et les besoins.

Un problème essentiel se pose alors, concevoir le modèle praxéologique de référence. Indépendamment de l'intention qui fait naître le besoin de définir un tel modèle et du type d'étude qu'il nourrit, sa conception repose, *a minima*, sur une enquête épistémologique sur la base d'hypothèses ou de postulats dont l'explicitation concourt à définir le domaine de validité.

Enfin, si reconnaître les besoins praxéologiques est un préalable à l'évolution des pratiques des professeurs, elle n'est qu'un point de départ, reste à déterminer comment répondre à ces besoins. Une réponse, formulée par la TAD, est la constitution en profession du métier d'enseignant, condition qui relève au moins du niveau de la société dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique.

Références

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parysz, M.-H. Salin (éds.), *Actes de la IX^e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Caen : ARDM & IUFM.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher education*, 59(5), 389-407.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élément de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueni-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y., Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. In Gueudet, G., Trouche, L. (ss la dir.) *Ressources vives* (pp.41-55). Rennes : PUR.

Chevallard, Y., Wozniak, F. (2011). Un cas d'infrastructure manquante : statistique et probabilités en classe de troisième. In Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 831-853). CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona).

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la professions et formation en IUFM*. Thèse de doctorat. Université de Provence.

Dorier, J.-L., F. J. Garcia (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, Vol. 45(6), 837-849.

Gnedenko, B. V., Khintchine, A. Ia. (1964). *Introduction à la théorie des probabilités*. Paris : Dunod.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles : de Boeck.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2014). Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. *ZDM*, vol. 46, issue 1, 29-44.

Margolinas, C., Wozniak, F. (2015). Les besoins épistémologiques du professeur : Le nombre ordinal. In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant, C. Mangiante-Orsola (Eds.), *Rôles et places de la didactique et des* *didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif.* (pp. 123-152). Grenoble : La pensée sauvage.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressorces et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueni-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Revue*, 57(1), 1-22.

Wozniak, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en didactique des mathématiques 32(1),* 7-55.

Author Index